



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Пусть же конкретного x такая прогрессия существует.

$$\text{Плюс: } b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b \cdot q^0$$

$$b_{12} = 2 - x = b \cdot q^{11}$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = b \cdot q^{17}$$

$$\begin{aligned} 1) b \cdot q^0 \geq 0 &\Rightarrow b \cdot q^{11} = b \cdot q^0 \cdot q^{11} \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 - x \geq 0 \quad x \leq 2. \end{aligned}$$

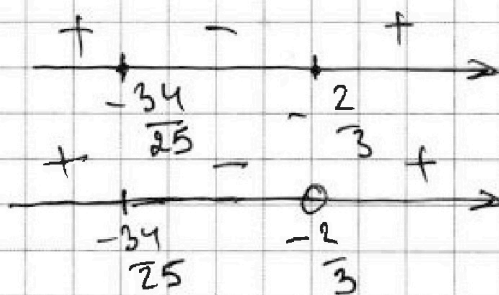
ОАБ:

2) ~~Т.к. $x \leq 2$ ~~то~~~~

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0$$

$$3x+2 \neq 0$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{34}{25}\right] \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Если $\exists i: b_i = 0 \Rightarrow \forall i: b_i = 0$

ноже $x = 2$ но же $b_{10} \neq 0 \Rightarrow \forall i: b_i \neq 0$

$$\frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

~~$$\frac{q^{12}}{q^0} = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$~~

~~невозможно~~ \rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Непонятно!!!

~~Умножить 2 выражения и вынести~~

~~$y = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$ либо $y^2 = \frac{1}{3x+2}$~~

~~Уг ОА 3: либо $x > -\frac{2}{3}$~~

~~либо $x \leq -\frac{34}{25}$~~

~~Или $x > -\frac{2}{3}$, тогда возьмем~~

~~$y^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$ $b(x) = 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - y^2 =$
 $= \sqrt{|25x+34|}$ т.к.~~

~~$\frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|} = (25+34) \cdot \text{не знак } (3x+2) \Rightarrow$~~

~~\Rightarrow System must not have sign~~

~~Что и по этому, но если ≥ 0~~

~~$(2-x)^2 = |25x+34|$ 1) $x > -\frac{34}{25}$~~

~~$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$~~

~~$x^2 - 29x - 3020$ $x = -1, 30$~~

~~2) $x \leq -\frac{34}{25}$ $x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad x^2 + 21x + 38 = 0$$

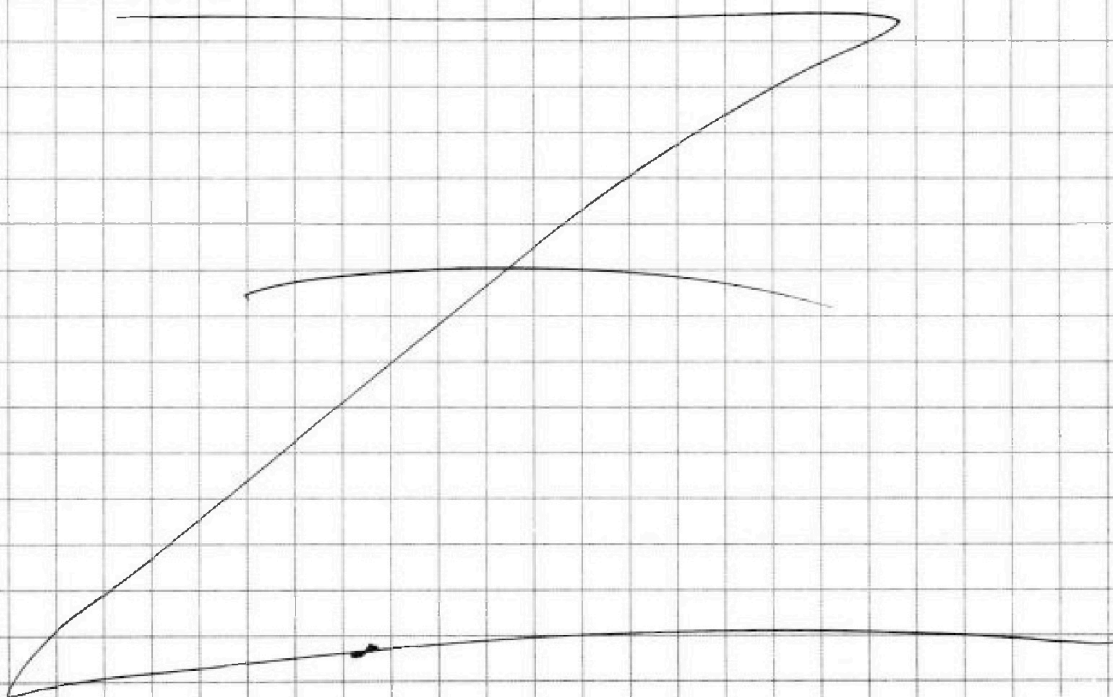
$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2} = \frac{-21 \pm \sqrt{289}}{2} =$$

$$= \frac{-21 \pm 17}{2} = -2; -19 \leq -\frac{34}{25}$$

И тогда корнями являются только $x \in \{-1; 30; -2; -19\}$

При этом для каждого из них $x \in \mathbb{Z}$ манера прогрессии.

Ответ: $-19; -2; -1; 30$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad p: \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\underline{4p \cos^3 x} - \underline{3p \cos x} + \underline{12 \cos^2 x} - 6 + \underline{3(p+4) \cos x} + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 = \cancel{p-1} (1-p) \cos^3 x$$

$$(\cos x + 1)^3 = (\sqrt[3]{1-p} \cos x)^3$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x$$

$$\cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) = 1$$

$$1) \quad p = 0 \quad \cos x \cdot 0 = 1 \quad x \in \emptyset$$

$$2) \quad p \neq 0 \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$b) \quad -1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} > -1 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Фигурирует!!!

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

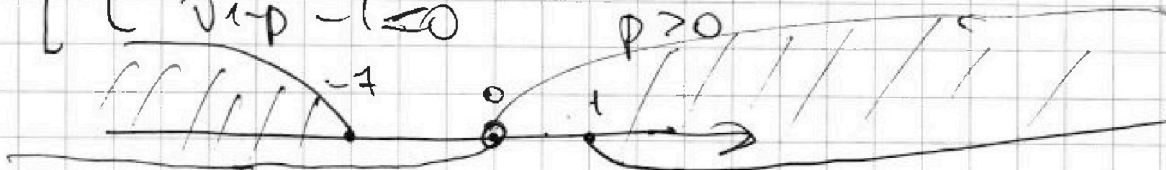
$$\frac{2 - \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

[{	$2 - \sqrt[3]{1-p} \geq 0$	$1-p \leq 8$	$p \geq -7$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 < 0$	$1-p < 1$	$p > 0$
		$2 - \sqrt[3]{1-p} \leq 0$	$p \leq -7$	
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0$	$p < 0$	

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq -1$$

$$\frac{1 + \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0 \quad \frac{\sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0$$

[{	$\sqrt[3]{1-p} \geq 0$	$p \leq 1$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0$	$p < 0$
		$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$	$p \geq 1$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 \leq 0$	$p \geq 0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Для любого } p \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

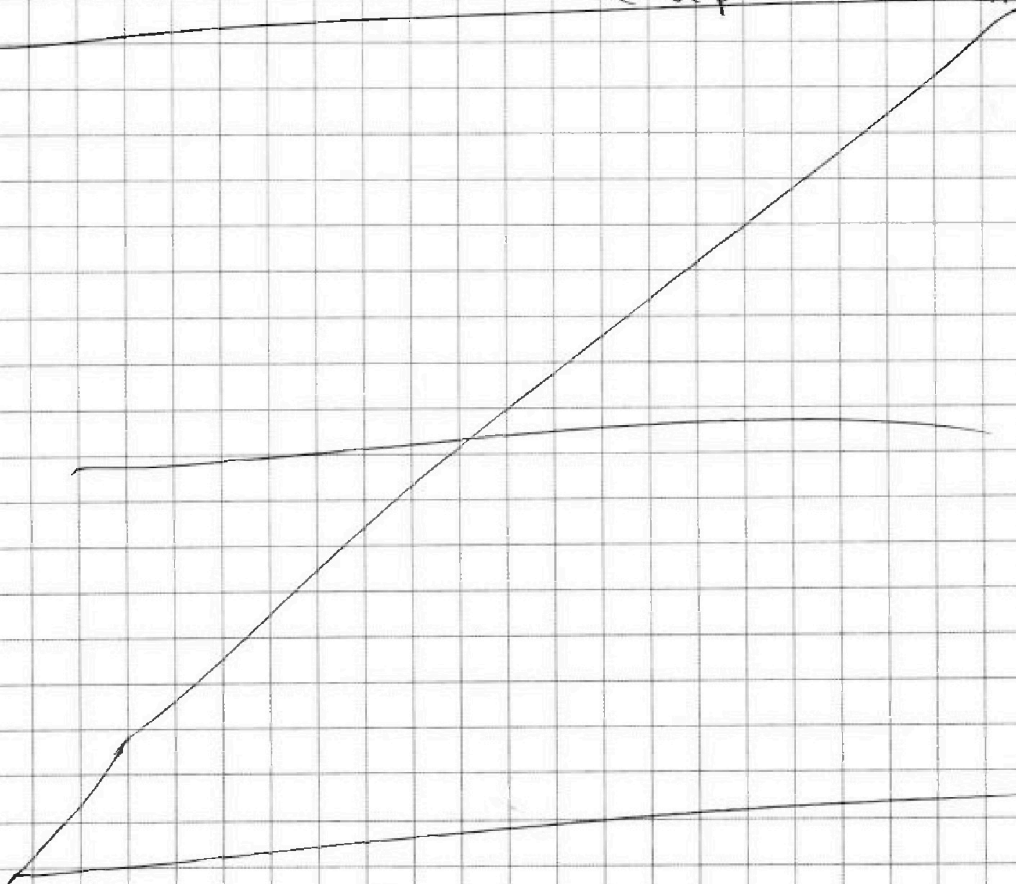
Решение: Для $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

\exists такое $s \in \mathbb{R}$ (когда), что

можно для каждого p выбрать

$$\text{корень } x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$





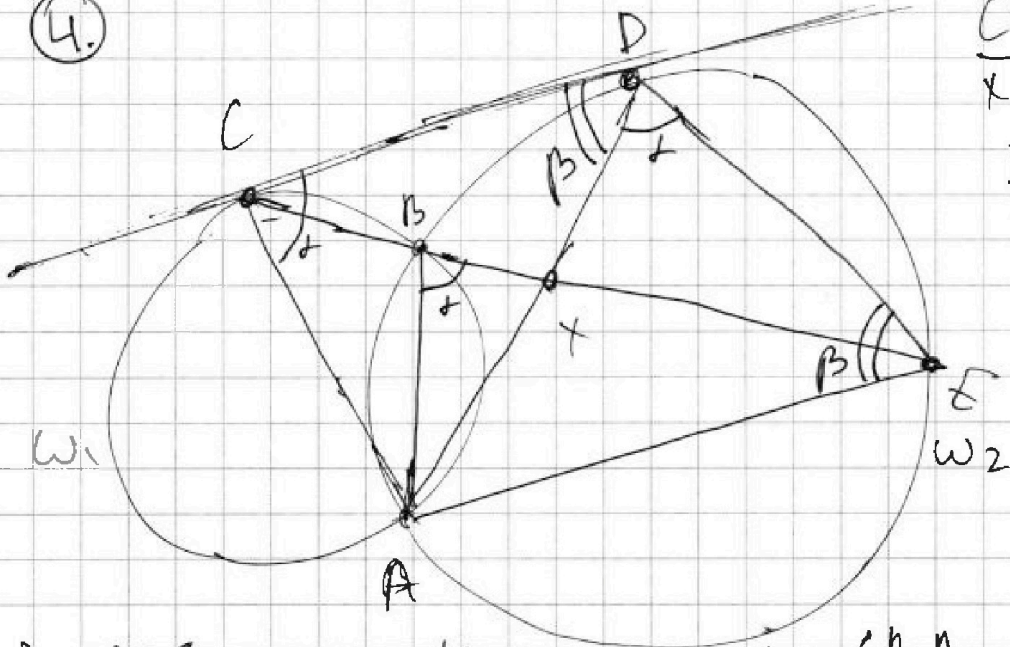
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



$$\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

1) $\angle ADE = \alpha = \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA =$
(внеш. кр. дуга)

= внешний угол в ω_1 опирающийся на дугу CA (центр не содержит точку B) = $\angle ACD = \alpha$

(углы между кас. и хордой)

2) $\angle AED = \beta = \angle CDA$ (углы между кас. и хордой)

3) $\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE \\ \angle ADC = \angle AED \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD}$ 4) $\triangle ADE: \frac{AE}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

Продолжение \rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

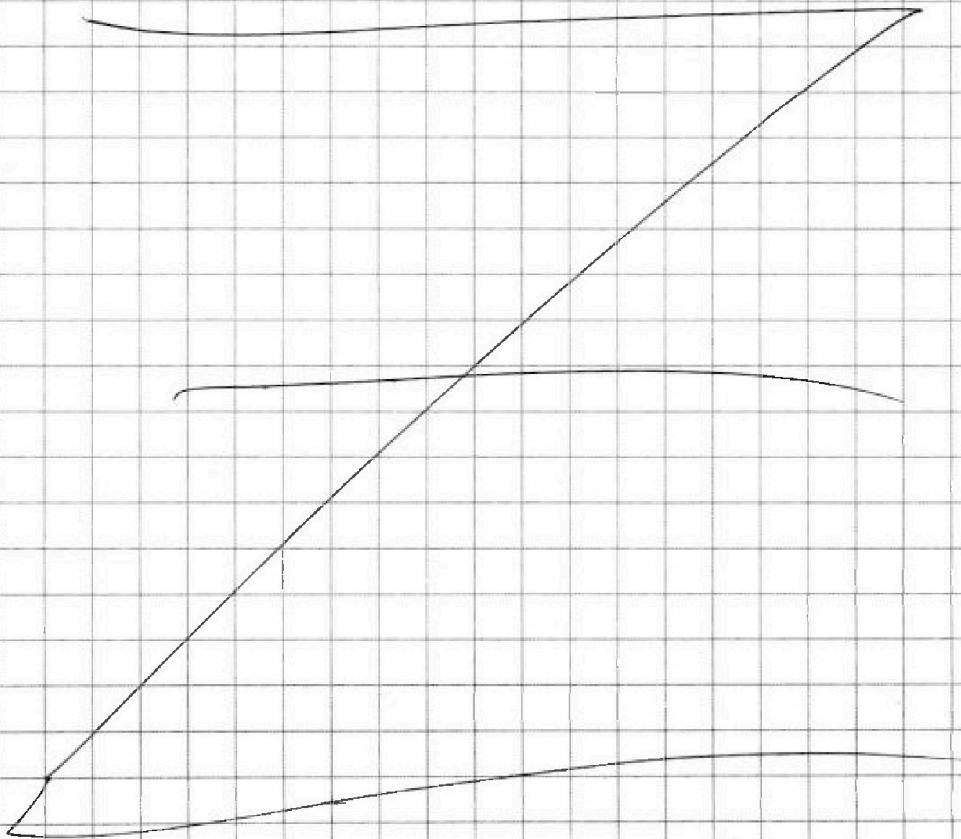
4. Продолжение!!!

$$5) \triangle CDE: \frac{7}{20} = \frac{CX}{XE} = \frac{S_{CDX}}{S_{XDE}} = \frac{CD \cdot \sin \angle CDX}{ED \cdot \sin \angle XDE}$$

$$\frac{CD \cdot \sin \beta}{ED \sin \alpha} = \frac{7}{20} \quad \frac{ED}{CD} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \left(\frac{ED}{CD} \right)^2 = \frac{20}{7} \quad \left. \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть AB - есть и симметрия A и симметрия B
~~и~~ пусть зафиксируем точку, пусть

была выбранной симметрия - это X ,

пусть была симметрия относительно

одной прямой линии - Y и пусть - Z .

1) По формуле "включения элементов":

$$\# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z -$$

$$- \# X \cap Y - \# X \cap Z - \# Y \cap Z + X \cap Y \cap Z.$$

2). Т.к. все три симметрии относительно одной и той же точки и в том отношении равноправны друг другу

предмет X - это и есть генеральная симметрия относительно точки

$$\text{пересечение} \Rightarrow X \cap Y \cap Z = Y \cap Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z - X \cap Y -$$

$$- X \cap Z. \text{ б) По смыслу } \# X:$$

Каждый пример будет конкретизировать

следующим образом: рассмотрим,

~~и~~ пусть и точки



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всему набору средних линий, и
концами с нулевыми 4 узлами
Ной симметрии. Инвертируем,
что так же преобразует все распе-
новки с центральной симметрией,
поскольку это мы брали только
централно-симметричные распе-
товки, а все центрально-симмет-
ричные расположения мы ~~уже~~
расширили т.к. ~~уже~~ на каждой
расстановке можно восстановить
первое зеркало и левки. И тогда

$$\#X = \binom{4}{\frac{500-120}{2}} \quad \text{аналогично } \#Y = \#Z = \binom{4}{500-60}$$

Теперь посчитаем $\#X \cap Y$ и $\#X \cap Z$,
очевидно, что $\#X \cap Y = \#X \cap Z$.
т.к. для любой средней линии
рассуждения аналогичны



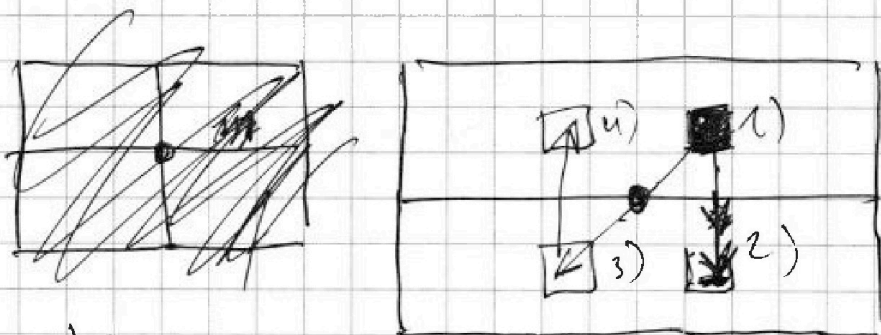
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Две окружности обобщенно
находятся $\#X \cap Y$, где Y —
эллиптическая дуга. Имеет
интересное, что выбор одной
клетки, еще 3 выбираем
это не мешает. Расстояние
не является дугей!



Кг (1) по углам 2, 3 и 4)

для тем 4) — симметрия 1) относительно

уже дуги от центра дуги, потому
то что ее по углам дуги дуги
центральную относительно точки дуги.

Значит будет конус дуги
пример так: 1) выбираем



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

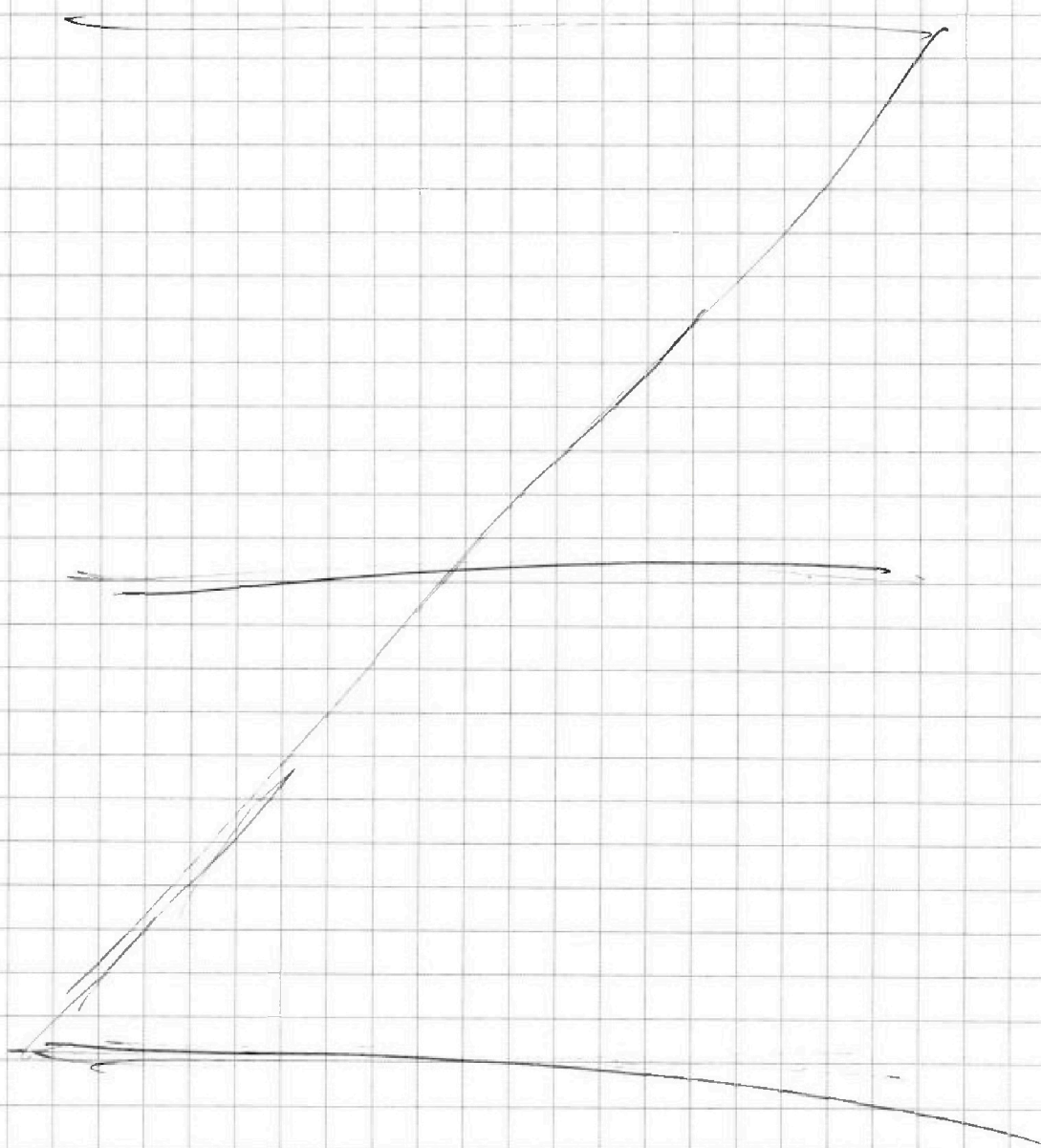
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~21~~ ~~120~~ и того получится:

$$\binom{500-120}{4}$$

$$\# \times U \times V \times Z = 3 \binom{500-60}{4} - 2 \binom{500-30}{2}$$

Ответ: ~~3~~ ~~$\binom{500-60}{4}$~~ ~~3~~ $\binom{30000}{4} - 2 \binom{15000}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $(a; b; c):$ $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ a < b \\ b - a \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 1000 \end{array} \right.$

Если $a \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 0$
 $a \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1$
 $a \equiv 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \equiv 1 \\ a^2 \equiv 0 \end{array} \right. \quad a^2 + b = 1000 \Rightarrow a^2 + b \equiv 1$
 1) $a^2 \equiv 1 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b \not\equiv a \Rightarrow$
 2) $a^2 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow a \not\equiv b$

\Rightarrow Если $a^2 + b = 1000$, то $b - a \not\equiv 3 \Rightarrow$

\Rightarrow просто пропустим условие $b - a \not\equiv 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$\left. \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ p \\ -p \\ -p^2 \\ p^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 \\ -p^2 \\ p \\ -p \\ -1 \\ 1 \end{array}$

- все возможные варианты

$\left\{ \begin{array}{l} a+c < b-c \\ |p| > 1 \end{array} \right.$

\Rightarrow рассмотрим $(1; p^2), (-p^2; -1)$

1) $\left\{ \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (c+1)^2 + c + p^2 = 1000 \\ c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \end{array}$

$c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$

~~$9 - 4(p^2 - 999) \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 2500 \Rightarrow p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$~~

$9 - 4(p^2 - 999) = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) x^2 + (2p)^2 \equiv 3 + 999 \cdot 4 \pmod{3}$$

$$x^2 + (2p)^2 \equiv 3 \pmod{3} \quad \text{т.к. } \begin{cases} x^2 \equiv 0 \\ (2p)^2 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 + 0 \equiv 0 \\ 0 + 1 \equiv 1 \\ 1 + 0 \equiv 1 \\ 1 + 1 \equiv 2 \end{array} \right\} = x^2 \equiv 0$$

$$(2p)^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 2p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(9 - 999)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 990}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{1 + 440}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3 \cdot 21}{2} = 30; -33$$

1) $c = 30$	$a = 31$
	$b = 30$
2) $c = -33$	$a = -32$
	$b = -24$

$$2) \begin{cases} a - c = -p^2 & a = c - p^2 \\ b - c = -1 & b = c - 1 \end{cases}$$

$$(c - p^2)^2 + (c - 1) = 1000$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c = \frac{(2p^2 - 1) \pm \sqrt{(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004}}{2}$$

$$(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004 = 4p^4 - 4p^2 - 4p^4 + 4005 = 4005 - 4p^2$$

$$-4p^2 = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + (2p)^2 \equiv 4005 \pmod{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Аналогично $p = 3$, $\text{mod } 2$

$$c = 17 \pm \sqrt{4005 - 4 \cdot 17^2}$$

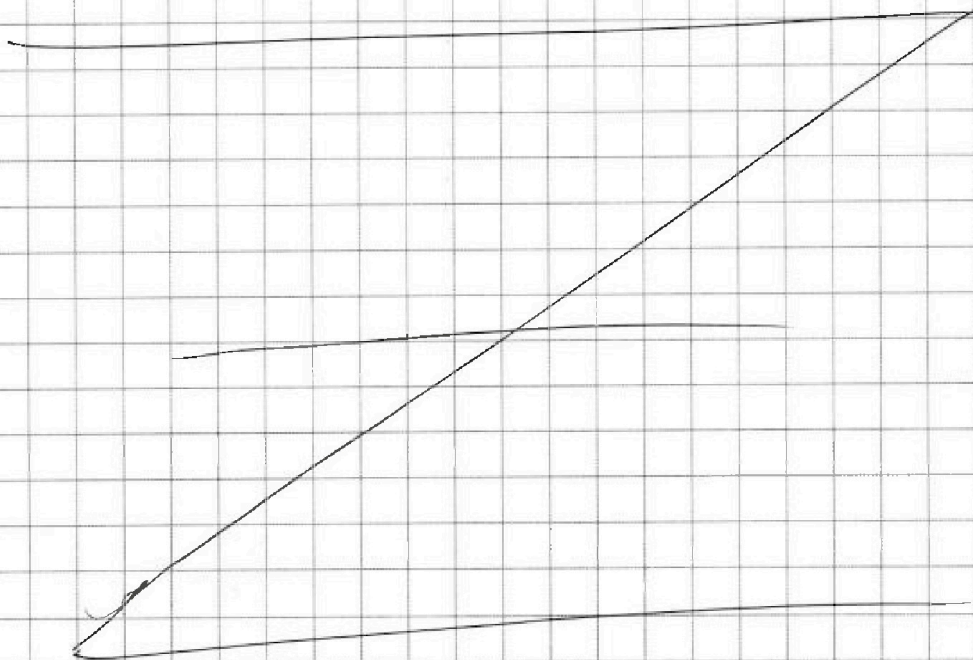
$$= \frac{17 \pm \sqrt{4005 - 4 \cdot 289}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{4005 - 1156}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm 3\sqrt{441}}{2} = \frac{17 \pm 63}{2} = 40; -23$$

$$1) \begin{cases} c = 40 \\ a = 31 \\ b = 39 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c = -23 \\ a = -32 \\ b = -24 \end{cases}$$

Ответ: $(31; 39; 40); (-32; -24; -23); (31; 39; 40); (-32; -24; -23)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and a secant line.

Diagram 1 (top): A circle with center O. A secant line intersects the circle at points A and B. A point D is on the circle. A line segment AD is drawn. A point X is on AD. A line segment BX is drawn. A line segment CD is drawn, where C is on the secant line. A line segment CE is drawn, where E is another point on the circle. The angle between the secant and AD is labeled α .

Diagram 2 (bottom): A similar diagram to the first one, but with different labels and annotations. The angle between the secant and AD is labeled β .

Handwritten Equations and Notes:

- $x = 29 \pm \sqrt{29^2 + 120}$
- $17 - 65 = (6^2 - 18) = -12$
- $29^2 = 841$
- $900 - 60 + 12 = 852$
- $ED = ?$
- $\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$
- $\frac{AD}{AE} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
- $CD^2 = CB(CA + CE)$
- $3600 + 360 + 45 = 400 + 40 + 5$
- $\frac{ED \cdot \sin \alpha}{CD \cdot \sin \beta} = \frac{20}{7}$
- $\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$
- $3i$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р:
 3) $p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$
 2 (корня).

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) = \\ &= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12\cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12\cos^2 x + \cos x (3p+12-3p) + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 4 = 0$$

$$t = \cos^3 x$$

~~$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 4 = 0$$~~

~~$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 + 4 = 0$$~~

$$(p-1)x^3 + (x+1)^3 = 0$$

$$(p-1)x^3 = - (x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{p-1} x = - (x+1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

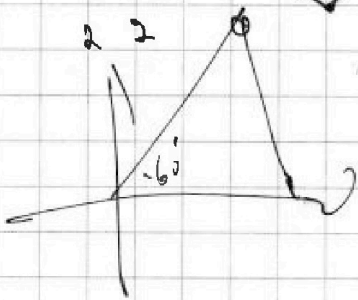
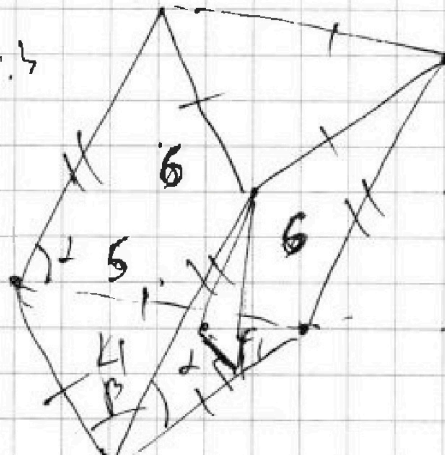
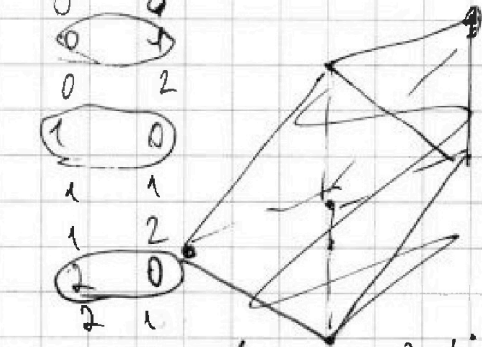
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$ $(b-a) \neq 3$ $(c;b;c)$
 $(a-c)(b-c) = p^3$ $v-?$

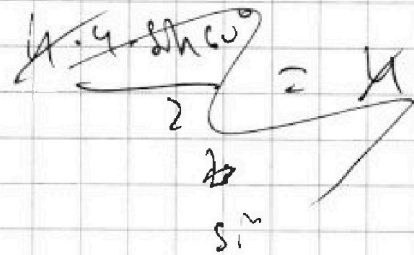
$a^2 + b^2 = 1000$ $p:3$

0	0
0	2
1	0
1	1
1	2
2	0
2	1
2	2



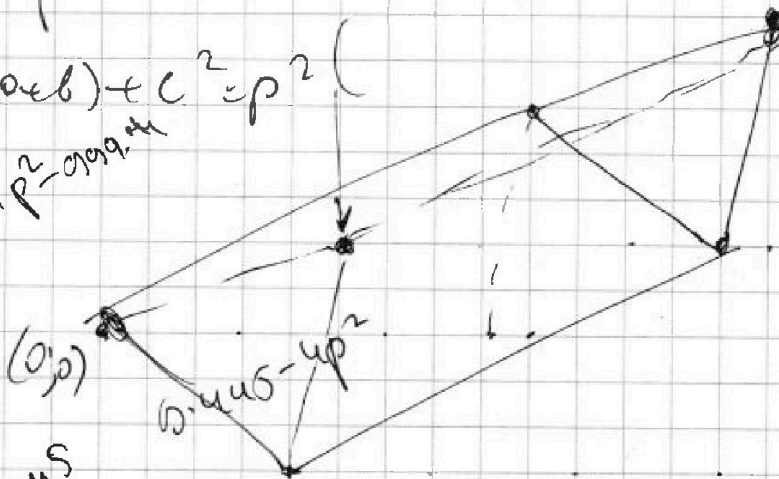
$x^2 + (p)^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ$

$(a-c) = p$
 $(b-c) = p$



$a^2 - c(a+b) + c^2 = p^2$

$9 = x^2 + p^2 - 9 \cdot \sin^2 60^\circ$



$\frac{x \cdot \sin 60^\circ}{2} = 4$

$x^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$9 - 4 = x^2 - 9 \cdot \sin^2 60^\circ$

$9 - 4 (p^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ) = x^2$

$-4 (p^2 = 9 \cdot \sin^2 60^\circ) = (x-3)(x+3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$e < b$$

$$e^2 + b^2 = 1000$$

32

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a-c < b-c$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} p^2 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \quad -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} p^2 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \quad -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + p^2 \\ e = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases} \quad p^2 = 1 \frac{3}{4}$$

$$b - 4(p^2 - 999) \geq 0$$

$$(c+1)^2 + c + p^2 = 1000$$

$$p^2 - 999 \leq \frac{9}{4}$$

$$p^2 \leq 999 \frac{9}{4}$$

$$p \leq 31$$

$$(c-p^2)^2 + c - 1 = 1000$$

$$(c+1)^2 + c$$

$$e^2 + 3c + p^2 - 1001 = 0 \quad p^2 - 999 = 0$$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$$

$$(c-p^2)^2 + (c-1) = 1000$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

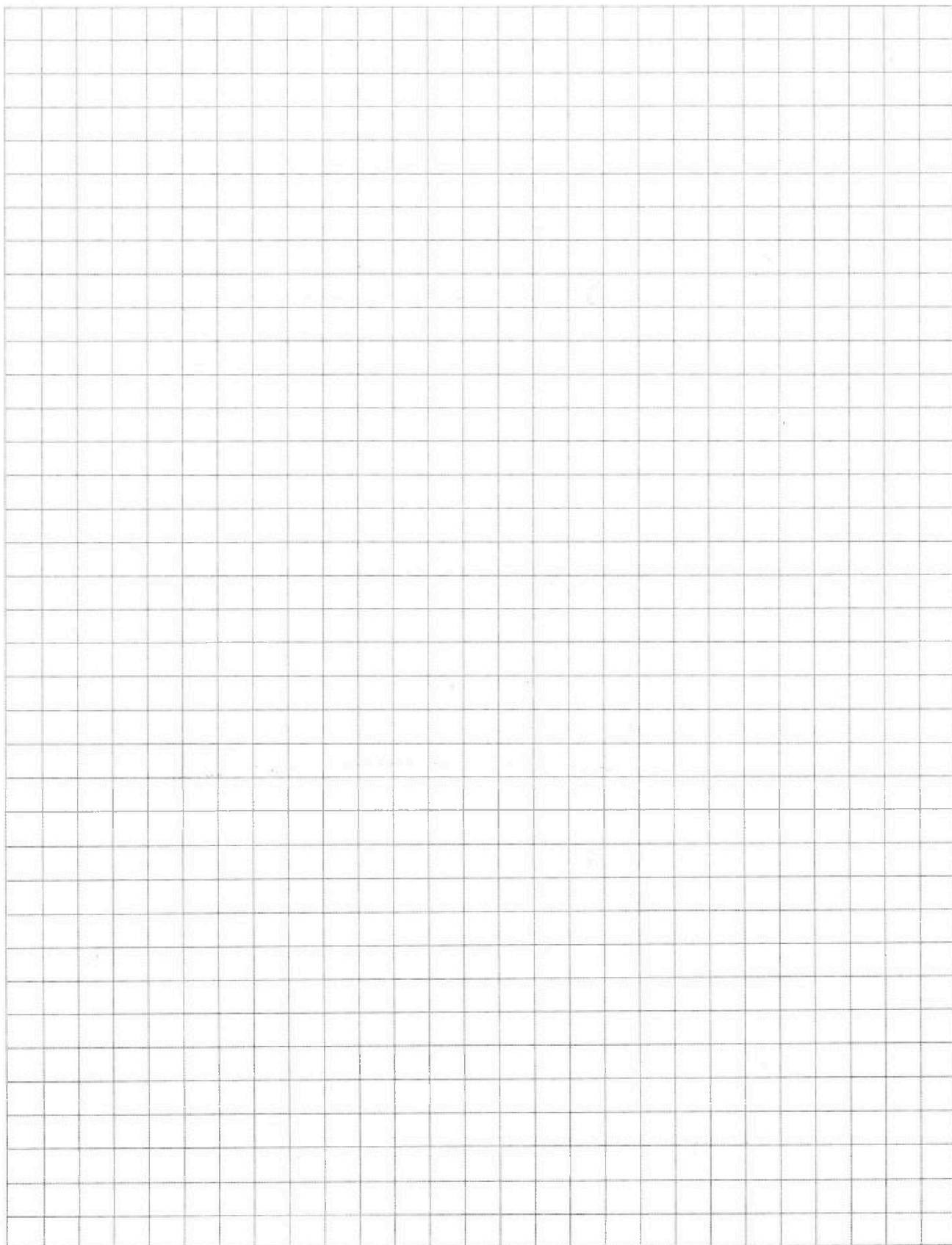


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ $(a, b, c) \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

1) $a < b$

2) $b - a \not\equiv 3$

3) $(a - c)(b - c) = p^2$

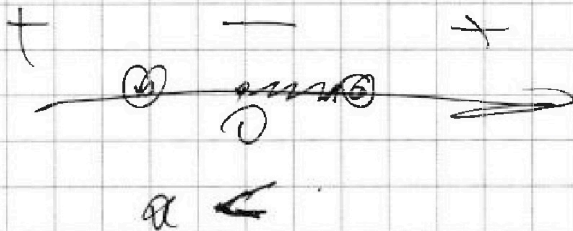
4) $a^2 + b = 1000$

$$a < 1000 - a^2$$

$$a^2 + a - 1000 < 0$$

$$(b - a)^2 = 999 + 120$$

$$a = -1 \pm \sqrt{1 + 1000}$$



$$a \not\equiv b \pmod{3} \quad 0 \leq 31$$

$$a^2 + b \equiv 1 \pmod{3}$$

0	4
1	0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} x \in \mathbb{R} :$$

$$\exists b_n : b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$b_{12} = 2 - x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^2}}$$

$$g = \frac{1}{\sqrt[4]{3x+2}}$$

$$x \leq 2$$

$$x \geq -\frac{2}{3}$$

$$b \cdot g^9$$
$$b \cdot g^{12}$$
$$g^8 =$$

$$b \cdot g^9 \geq 0$$

$$b \cdot g^{12} \geq 0$$

$$b \cdot g^{17} \geq 0$$

$$g^8 > 0$$
$$g^2 > 0$$
$$g^5 > 0$$

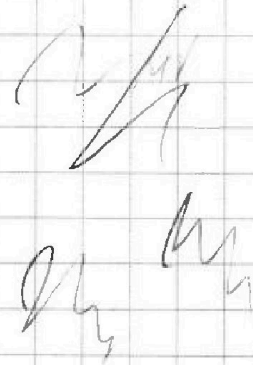
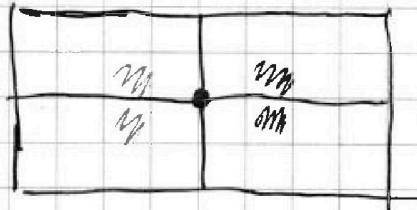


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1), 2), 3)

$$1) + 2) + 3) - 1) \cap 2) - 1) \cap 3) - 2) \cap 3) + 1) \cap 2) \cap 3)$$

