



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

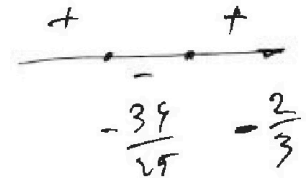


1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$



3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.



7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = b$$

$$b_{10} = b \cdot 9^9$$

$$b_{12} = b \cdot 9^{11}$$

$$b_{18} = b \cdot 9^{17}$$

0 93:

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

1 ступень $b_{10} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b_{18}}{b_{10}} = 9^8 = \sqrt[4]{\frac{(25x+34)(3x+2)^4}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)}} = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$\Rightarrow 9^2 = \sqrt[4]{|3x+2|} \Rightarrow 9^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

~~$$9^2 = \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x) \cdot \sqrt[4]{|3x+2|}$$~~

~~$$b_{14} = b_{10} \cdot 9^4 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}}$$~~

~~$$= b_{10} \cdot 9^2 = b_{12}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$(25x+34)^2 (3x+2)^2 = (2-x)^4 \cdot |3x+2|$$~~

~~$$(25x+34)^2 |3x+2| = (x-2)^4$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{b_{10} \cdot b_{18}} = b_{14}$$

см в

$$\frac{|25x+34|}{|3x+2|} = b_{14}$$

$$\frac{25x+34}{3x+2} \geq 0 \text{ с } \textcircled{3}$$

$$\left| \frac{25x+34}{3x+2} \right| = b_{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25x+34}{3x+2} = b \cdot 9^{13} \\ 2-x = b \cdot 9^9 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22



0 & 31

$$x + 6 \geq 0$$

$$\cancel{3 - x - 2z} \geq 0$$

$$y - 3x - x^2 + 2z \geq 0 \quad (2)$$

$$400 - z^2 \geq 0$$

$$x \geq -6$$

$$-2z \geq x - 3$$

$$y - 3x - x^2 + 2z \geq 0$$

$$2z \geq x - 3$$

$$0 \leq |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400 - z^2}$$



~~93~~

$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 4|y+2||y-18| = 400 - z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

то есть $f = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

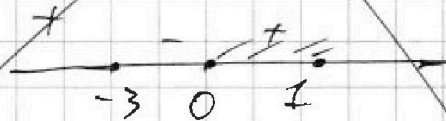
$p > 0$

~~$-1 \pm \sqrt{1-p} > p$~~

~~$\pm \sqrt{1-p} > p+1$~~

~~$1-p > p^2 + 2p + 1$~~

~~$\uparrow p^2 + 3p < 0$~~



~~$p > p > 0$~~

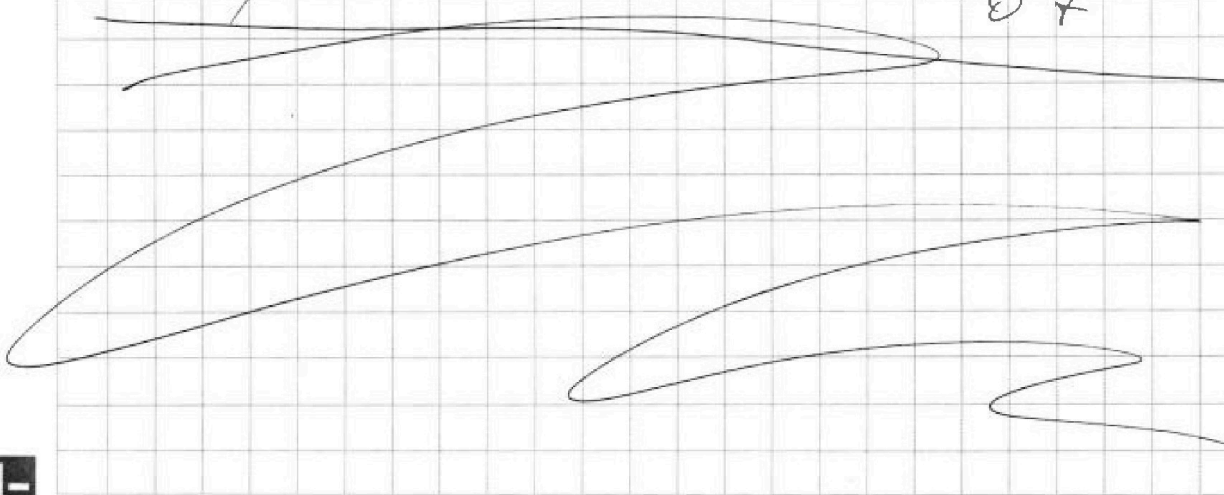
~~при $p > 0$
нет мин
и. Ф. нет
не пересекает
0 +~~

~~тогда
минимум/макс
не до
сиг (1; 1)~~

~~\rightarrow нет
 $f(t)$~~

~~монотон~~

~~на $[1; 1]$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(t)$

у меня форма \Rightarrow точки на МКК/МК

$f(t) \geq 0 \quad t_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$~~ $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$ $(p > 0)$
 $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$

$1 > \sqrt{1-p} \leq p \leq 1 > 1$

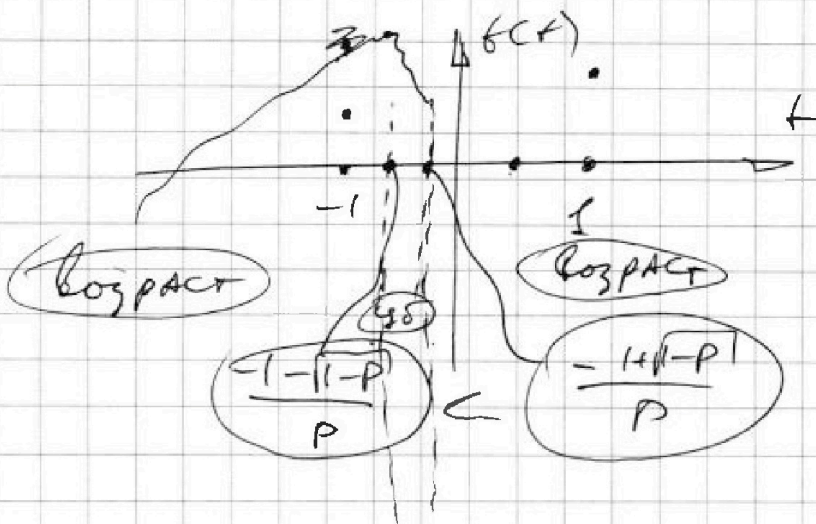
~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$~~ $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$
 $\sqrt{1-p} \geq 1-p$

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$
 $-1 + \sqrt{1-p} \leq p$
 $\sqrt{1-p} \leq p + 1$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$~~ $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$
 $1 < 1 + p \leq \sqrt{1-p}$
 \uparrow
 1



$f\left(\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}\right) \geq 0$
 \Rightarrow не решается

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 случай $p=0$

$$f(-1) = 4$$

$$f(1) = 28$$

$$f'(t) = 2t + 1$$



тогда найдем мин/макс

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 - 6 + 4 = 1 > 0$$

⇒ нет решений

4 случай $0 < p < 7$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) > 0$$

$$f'(t) = 7t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 28}}{14} < 0$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0$$

⇒ $f(t)$ — непрерывная

р.ч. не пересекает

5 случай $p < -7$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) < 0$$

⇒ непрерывная ⇒ есть решение

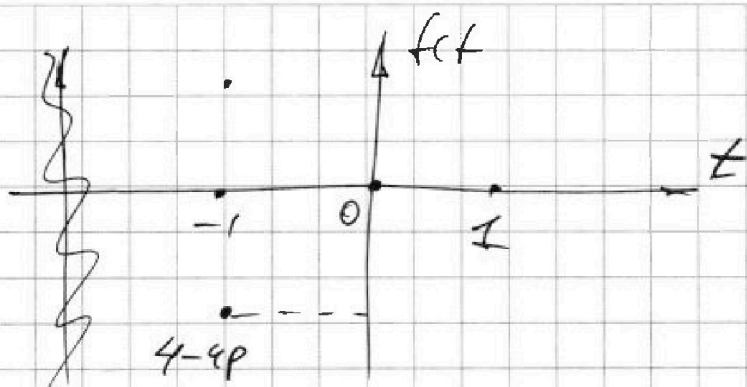


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) 1 ступень $p \geq 4$ $f(-1) < 0$ / $f(1) > 0$ \Rightarrow есть решение
т.ч. функция непрерывна $f(x)$
на $[-1, 1]$

2) 2 ступень $1 > p > 0$ $f(-1) > 0$ / $f(1) > 0$ \Rightarrow решение

рассмотрим на тот же максимум $f(x)$
минимум $f(x)$ \Rightarrow где это может быть? $f'(x) = 0$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

~~$$pt^2 + 2\sqrt{p}t + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$(\sqrt{p}t + \frac{1}{\sqrt{p}})^2 - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$t = \pm 2$$~~

~~$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4p}}{2p} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$~~

~~$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$p^2$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{23} \quad \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\sin x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} \cos t = x \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

$$p(4x^3 - 3x) + 6(2x^2 - 1) + 3(p+4)x + 10 = 0$$

$$4px^3 - 3px + 12x^2 - 6 + 3px + 12x + 10 = 0$$

$$f(x) = 4px^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 0$$

~~$$4x^3(p+3) + 4(3x+1)$$~~

~~$$f'(x) = 12px^2 + 24x + 12 = 0$$~~

~~$$px^2 + 2x + 1 = 0$$~~

~~$$4f(px^2 + 3) \quad f'(x) = 12px^2 + 24x + 12$$~~

$$f(-1) = -4p + 12 - 12 + 4 = 4 - 4p$$

$$px^2 + 2x + 1 = 0$$

$$f(1) = 4p + 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

PZ 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Т. треугольн $\triangle CPE \sim \triangle CFE$

$$\frac{CP}{\sin \alpha} = \frac{EP}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} &= \frac{EP}{CP} = \frac{EP}{CB} = \\ &= \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta} \end{aligned}$$

б) $\triangle CPE \Rightarrow \angle PAE = \angle EP = \angle AEP$

$\triangle APE$ - бн. - \triangle

$\Rightarrow AP$ - биссектриса $\angle CAE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$

$$\begin{aligned} AC &= 7 \text{ г} \\ AE &= 20 \text{ г} \end{aligned}$$

в) Т. треугольн $\triangle ABC \sim \triangle ABE$

$$\frac{AC}{\sin \angle CPA} = 2R_1$$

$$\frac{AE}{\sin \angle ABE} = 2R_2$$

($\sin \angle CPA = \sin \angle ABE$)

$$\frac{AC}{AE} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{20}$$

г) по п. 4 \Rightarrow

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$$

п. 4

$$\frac{EP}{CP} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}}$$

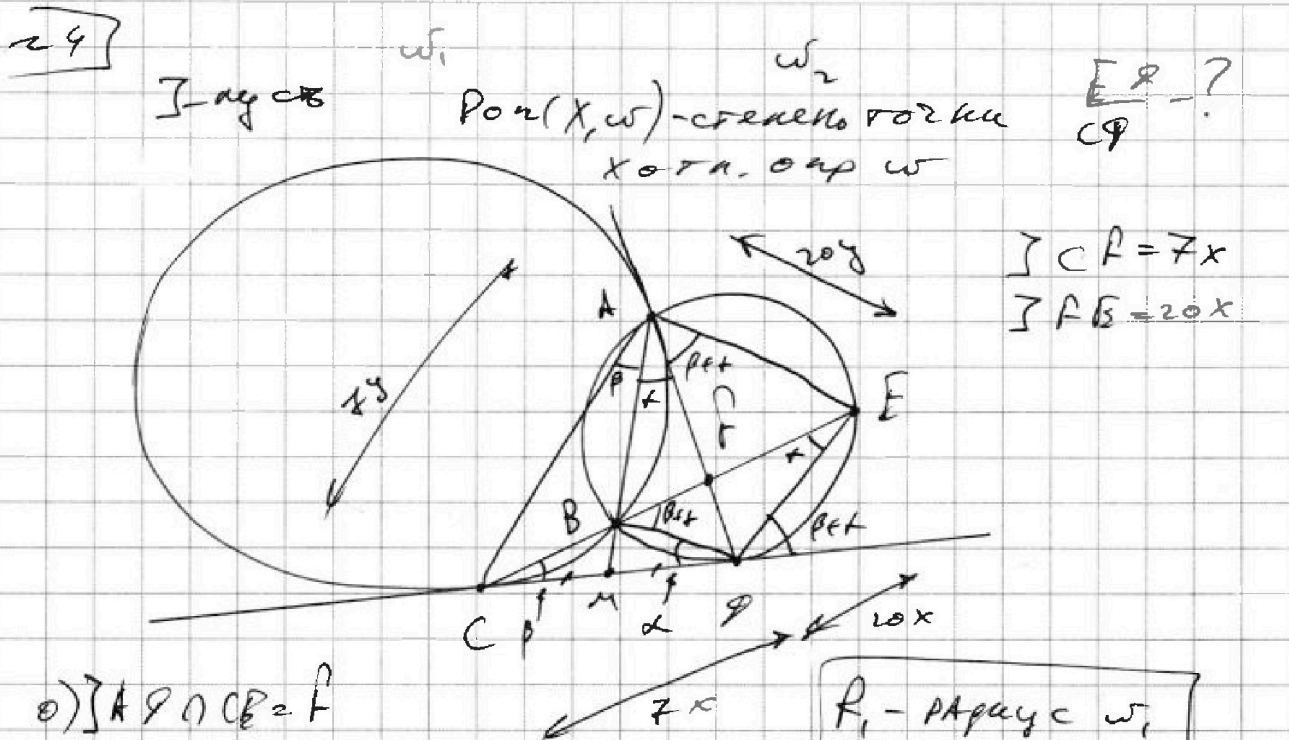
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



0) $\Gamma \cap \omega = 7x$

$\angle B A \Gamma = \angle A B \Gamma = \alpha = \angle B \Gamma C$

AB -радиус ω_1 и $\omega_2 \Rightarrow \Gamma \cap AB = M$

$POH(M, \omega_1) = POH(M, \omega_2) \Rightarrow MC^2 = MB^2$

1) $\angle C A M = \beta = \angle B C M$ (из касания)

2) $\triangle C P E \sim \triangle C B \Gamma$ (по формуле углов)

$\frac{CE}{CP} = \frac{EP}{CB}$

3) по т. синусов $\triangle ABC$ и $\triangle AB \Gamma$

$\frac{CB}{\sin \beta} = 2R_1, \quad \frac{B \Gamma}{\sin \alpha} = 2R_2 \Rightarrow \frac{B \Gamma}{BC} = \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

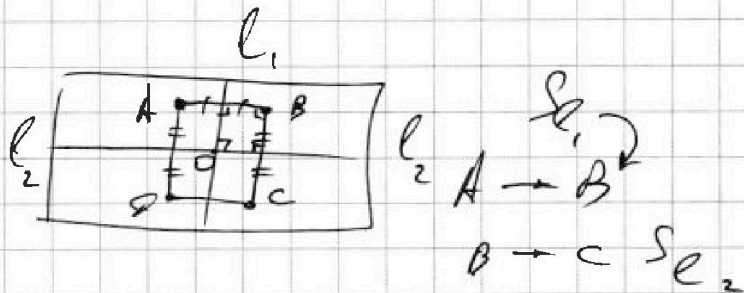
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В симметрии отображают углы
 равно симметричны сим отображают
 и углы

1) $2CB + 2CB$



по т. Уолла

$A \rightarrow D (S_{l_1})$

$\Rightarrow A \in O$ является на одной
 прямой с O

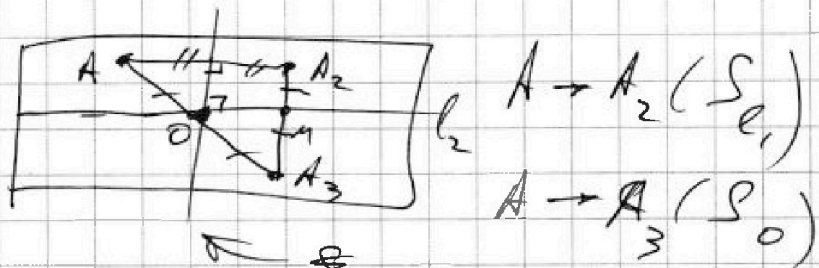
$\Rightarrow ABCD$ прямоугольник

($AD \parallel BC, AD = BC$
 \Rightarrow паралл + угол $\angle A = 90^\circ$)

\Rightarrow точка O является центральной

2) $OB +$ центр

без отр $OB \Rightarrow$



$A \rightarrow A_2 (S_{l_1})$

$A \rightarrow A_3 (S_{l_2})$

(22)

$A_2 A_3 \parallel l_1 \Rightarrow \angle A_2 A_3 O = 90^\circ$

(21)

$AA_2 \parallel l_2$

$\Rightarrow O \in l_2$

образует
 углы
 симметрией

$A_2 A_3 \cap l_2 = M \in AA_2 \cap A_3 A_2$
 $\Downarrow A_2 M = A_3 M$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $120; 2, 500; 2 \rightarrow$ 0 - центр в центре досочки сетки



посчитаем число способов размещения флета чтобы он обладал симметрией

отн. центра ~~и др.~~ $A_1 - ?$, (и возможно горизонтальной вертикальной)

отн. гор. прямой (средней) $A_2 - ?$

отн. верт. прямой (средней) $A_3 - ?$

для этого разделим прямоугольник

на две половинки по соот. средней

линии, а разместим там 4 флета

то $\sum_{n=2}^4 C_n^4$ для всех трех

случаев выразим их отн. центра

или соотв. средней. получим

следующие 4 варианта итого

$$A_1 = C_n^4$$

$$A_2 = C_n^4$$

$$A_3 = C_n^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) рассмотрим # размещем на доске
которые образуют симметрии
отн. в двух срезах (возможны
отн. центра)
для этого возьмем четверть

кратчайшими

поп на рисунке

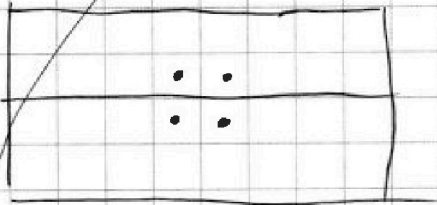
и выберем там две клетки

это $C_{\frac{n}{2}}^2$ способов оставшиеся

$$A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$$

однозначно определяются по ним

3) # # размещем образуют
одною из осей симметрии и
центральной A_5 (и возможно отн
центральной оси)



приведем соответс



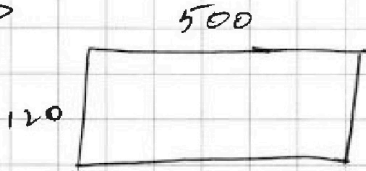
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

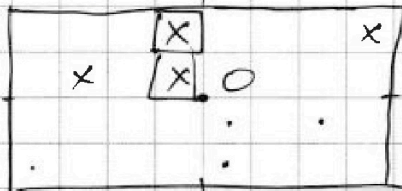
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



отн. центра
отн. середины
- поперек
] - по с/б

1



$P = 500 - 120 \cdot \frac{1}{2}$
k-?

получаем # способов

разместить фалеек т.ч. 2-го и 3-го б/г симметрично отн. к с/б. $120; 2; 500; 2 \Rightarrow$ центр в середине

~~с/б. первую линию n способов
вторую (n-2) т.ч. небыл в фокусе и
в симметричную. третью (n-4) аналог.
четвертую (n-6) а оставшиеся 4-х сделаем
и еще учтем углы все пересечением их f!
(однозначно) $A_1 = n(n-2)(n-4)(n-6) \cdot \frac{1}{f!}$~~

2) получаем # способов размещения f

$500 - 60 =$
 ≈ 30000

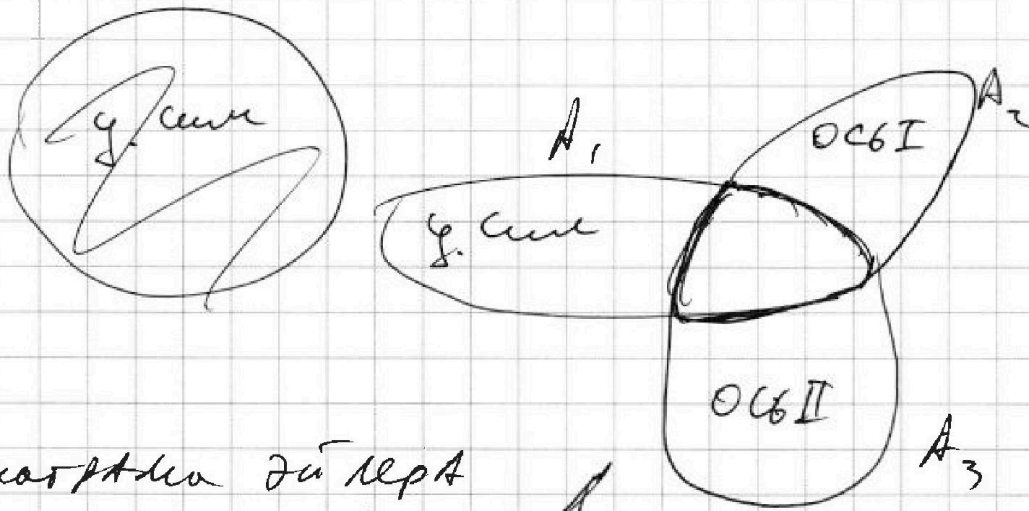


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



квадратная дилерская
таблица

3) кол-во способов размещения
элементов гонок образуют все
симметричные

возможных вариантов $C_{\frac{n}{2}}^2$ - # способов
выбрать тем 2 клетки

остальные беспорядочно
оразнообразно (УТВ (см)) $A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$

итого у квадратной \Rightarrow общее число

$$\text{равно } A_1 \in A_2 \in A_3 = 2 C_{\frac{n}{2}}^2 = 3 C_n^4 - 2 C_{\frac{n}{2}}^2$$

$$= 2 C_{15000}^2 + 3 C_{30000}^4$$

\leftarrow УТВ!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~26) (a, b, c)~~

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = p^2$ - простое

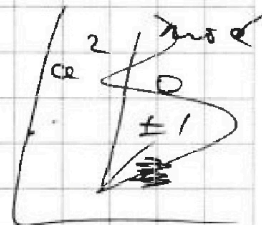
3) $a^2 + b^2 = 1000$

a	a^2 (mod 3)
0	0
1	1
2	0
3	1

a	a^2
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	

a	a^2
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	

3) $a^2 + b^2 = 0$
4



1) $a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$

$a^2 + b^2 + c^2 + c(a+b) = p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26 (a, b, c)

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = a^2 + c^2 - c(a + b) = p^2$

4) $a^2 + b = 1000$

a	$(\text{mod } 4) a^2$
$\equiv 1$	1
$\equiv 2$	0
0	0

1) ~~$a^2 + b = 1000$~~

1) $a \equiv 4 \quad b \equiv 4$

2) $a \equiv 1 \quad b \equiv 3$

$a = 4k$

$b = 4d$

$16k^2 + 4d = 1000$

$4k^2 + d = 250$

$d \equiv 2 \Rightarrow d = 2l$

$4k^2 + 2l = 250$

$2k^2 + l = 125$

$l \equiv 1 \Rightarrow l = 2m + 1 = 16m + 8$

$2k^2 + 2m + 1 = 125$

$k^2 + m = 62$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 1000 - a^2$$

~~$$1) a \in 1000 - a^2$$~~

~~$$2) 1000 - a^2 - a \div 3 \Leftrightarrow 1000 - a(a+1) \div 3$$~~

~~$$(a+c)(b+c) = p^2$$~~

~~$$(a-c)(1000 - a^2 - c) = p^2$$~~

~~$$1000a - 1000c - a^3 + a^2c - ac + c^2 = p^2$$~~

~~$$(a+c) + c(b+c) = p$$~~

$$\text{уб)} \quad (a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} (a-c) \neq \pm 1 \\ (b-c) \neq \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = p = b-c \\ \downarrow a = b \text{ по } a < b \text{ и } a > 0 \end{cases}$$

~~$$2) \begin{cases} (a-c) = +1 \\ (b-c) = +p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b < p^2+1 \\ a < b^2+1 \end{cases}$$~~

$$a = c+1$$

$$b = p^2 + c$$

~~$$c+1 < c-p^2$$~~
~~$$1+p^2 < 0 \text{ и}$$~~

$$b = a \div 3$$

$$p^2 - 1 \div 3$$

$$p^2 \neq 1$$

$$\text{случ } p \neq 3 \quad \text{случ } p = 3$$

$$a' \mid (a')^2 \pmod{3}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c_{1,2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \neq \quad c = \frac{-66}{2} = -33$$

$$c = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{array} \right. \quad \text{а)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 30 \end{array} \right.$$

проверки
"все да"

б) $c^2 = 17c - 920 =$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 40 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

$$- \frac{63 - 17}{2} = - \frac{46}{2} = 23$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 40 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

проверки
"все да"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~$a^2 + b = c^2$~~

~~$a^2 + b = c^2 + 9 - 6c + c - 1 = 289$
 $= c^2 - 5c + 8 = 1000$~~

~~$20 \cdot 9 = 360 \quad c^2 - 5c - 992 = 0$~~

~~$+ 289$
 3969
 $9 = 29 + 4 \cdot 992 = 11 \cdot 3$~~

~~$992 \overline{) 2}$
 $496 \overline{) 2}$~~

~~$\Rightarrow c \in \mathbb{Z}$~~

$c^2 + 81 - 18c + c - 1 = 1000$

$c^2 - 17c + 920 = 0$

$3969 \overline{) 3}$
 $1323 \overline{) 3}$
 $441 \overline{) 7}$
 $63 \overline{) 7}$
 9

~~121
 $121 \overline{) 121}$
 337~~

$3969 \overline{) 11}$
 3

4000
 $\underline{- 32}$
 3968
 $+ 25$
 $3993 \overline{) 11}$
 $363 \overline{) 11}$
 $33 \overline{) 11}$
 3

6) 2.1) $p = 3$

~~$a - c = 1$
 $b - c = 9$~~ $\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$

$25 \cdot 2 \cdot 11$
 $(1000 - 10) \cdot 4 =$
 $= 4000 - 40$
 $= 3960$

$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$

$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 3960}}{2}$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3}}{2}$

$c^2 + 3c + 10 = 1000$

$c^2 + 3c = 990$

~~$c \in \mathbb{Z}$~~ $\Rightarrow c(c + 3) = 990$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2) $(a-c) = 1$
 $(b-c) = p^2$~~
множители

x^0 - противоречие

3) $(a-c) = -1$
 $(b-c) = p^2$ \Rightarrow $a = c - 1$
 $b = c - p^2$

$a < b$
 $c - 1 < c - p^2$
 $p^2 < 1 \quad x^0$

4) $(a-c) = p^2$
 $(b-c) = 1$ \Rightarrow $a = p^2 + c$
 $b = 1 + c$

$p^2 < 1 \quad (a < b)$
 $\Rightarrow x^0$

5) $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$ \Rightarrow $a = c - p^2$
 $b = c - 1$

$a < b \quad \odot$

$b - a = -1 + p^2 \neq 3$

из п. 2 $\Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кривизна вектора на поверхности

Сферический $\triangle ABC$ на поверхности

вектор \vec{AB} в данной сфере

$\vec{AB}_1 \perp \vec{AC}$ (дог-о-т-т-т-т-т)

$\Rightarrow (\vec{AB}_1 = \vec{AA}_1 = \vec{CC}_1)$

$\Rightarrow \vec{AA}_1 \perp \vec{AC}, \vec{CC}_1 \perp \vec{AC}$

$\Rightarrow A, C, C_1$ — параллельны

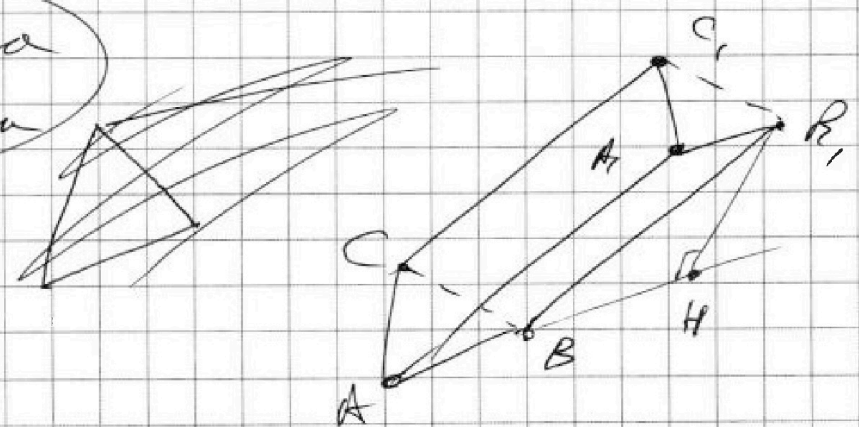
$\sum \vec{AC}, \vec{CA} = 5 = a \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{5}{a}$

$\sum \vec{AA_1}, \vec{A_1A} = R_1 \cdot AB = 6 \Rightarrow R_1 = \frac{6}{a}$

Т. к. $\triangle B, B_1 \Rightarrow KB^2 = \frac{25}{a^2} - \frac{36}{a^2} < 0$

\Rightarrow кривизна нулевая

3 сферы
неверно





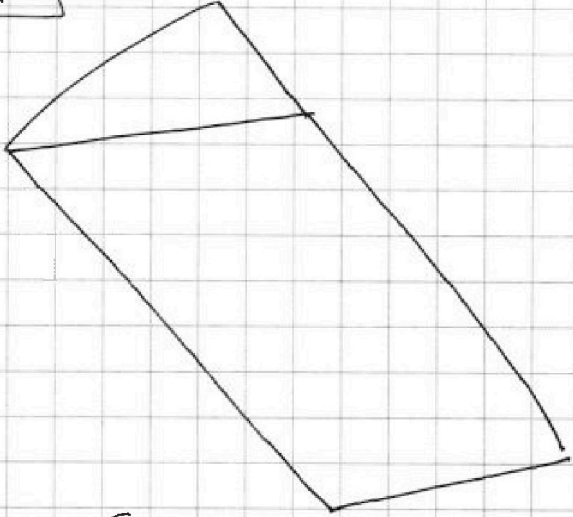
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
← ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27



$$\angle AB = a$$

$$\Rightarrow S_{A, R, AB} = S_{C, B, BE} = b$$

$$\angle B_0 K \perp AB, K \in AD$$

$$B_0 L \perp AB, L \in CD$$

$$\Rightarrow B_0 K = B_0 L$$

$$B_0 B \perp ABC$$

$$B_0 \in (ABC)$$

$$\triangle B_0 B L = \triangle B_0 B K$$

по т. о з х

$$\Rightarrow B_0 L = B_0 K$$

по т. о з х \perp к AB

$$(B_0 L \perp C = L B_0 K \perp B = 90^\circ)$$

$$B_0 B L = \triangle B_0 B K$$

по кат и гипот

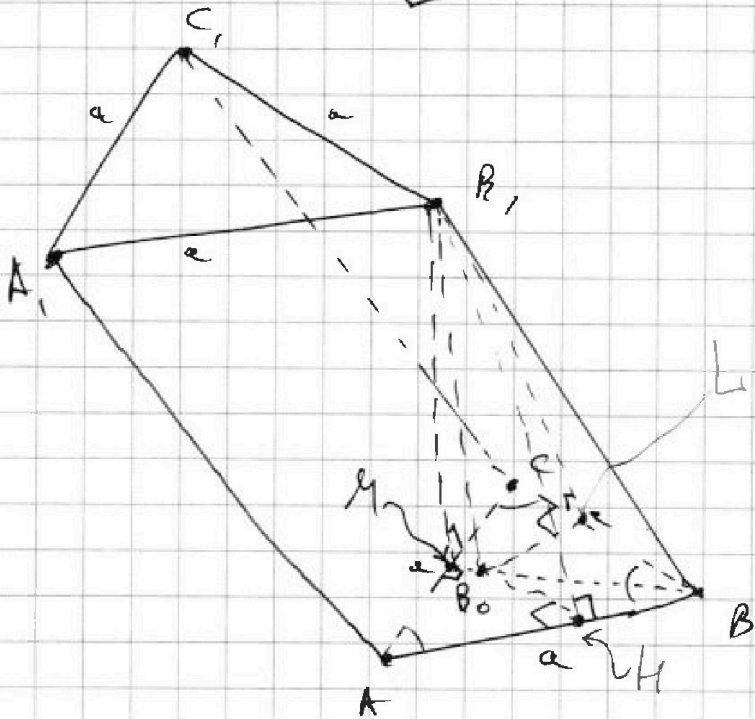
$$\Rightarrow B_0 B - \text{высота}$$

$$\angle ABC$$

$$B_0 B \perp AC \quad (BC = AB)$$

$$B_0 B \perp AC = M$$

M - серед AC



по т. о з х \perp к AB $B_0 M \perp AC$

по т. о проецирования высоты $B_0 B \perp AC = M$

$$(\angle B_0 B A = \angle B_0 B C) \Rightarrow$$

$$\angle A B A_1 = \angle C B B_1$$

$$AB \perp B_1 K \perp AB_1 = CB_1$$

$$S_{A, B_1, BA} = S_{C, B_1, BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

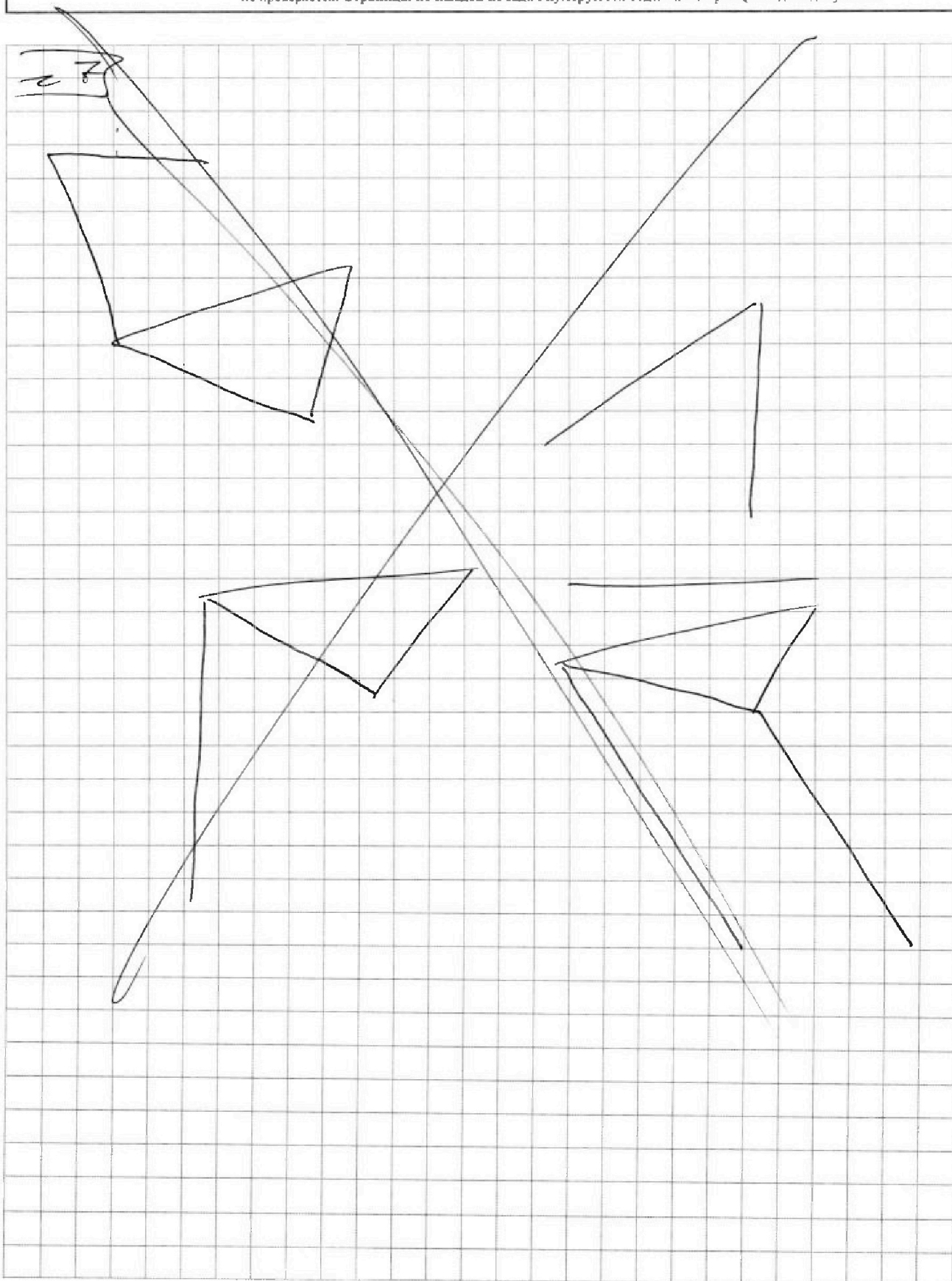
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





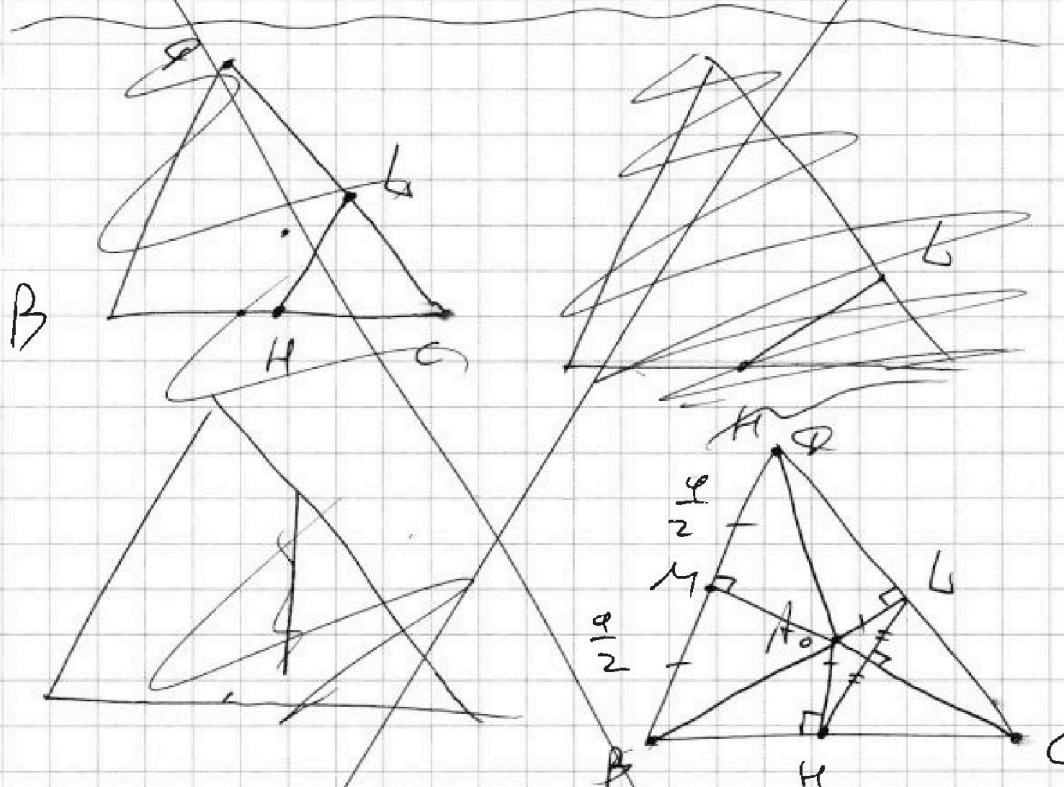
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ГОТОВИМ $\perp PA_0$: $\angle PMA_0 = 90^\circ \angle A_0LC$
 $\angle A_0MH \Rightarrow \delta$



$A_0L = A_0H$ (из 1, 2) $\Delta A_0CL = \Delta A_0CH$
 (кр. кат)

$\Rightarrow A_0C$ - бисс $\angle ACB$ $A_0C \perp BH = M$
 (т.к. $A_0M \perp BC$) $A_0C \perp HL$ (из симметрии A_0)

$S_{BCH} = \frac{AM \cdot a}{2} = 5 \Rightarrow AM = \frac{10}{a} \Rightarrow AA_0 = p$

по т. Пифагора в $\Delta A_0M \Rightarrow AM^2 - AA_0^2 = MA_0^2$

$MA_0^2 = \frac{100}{a^2} - p^2$

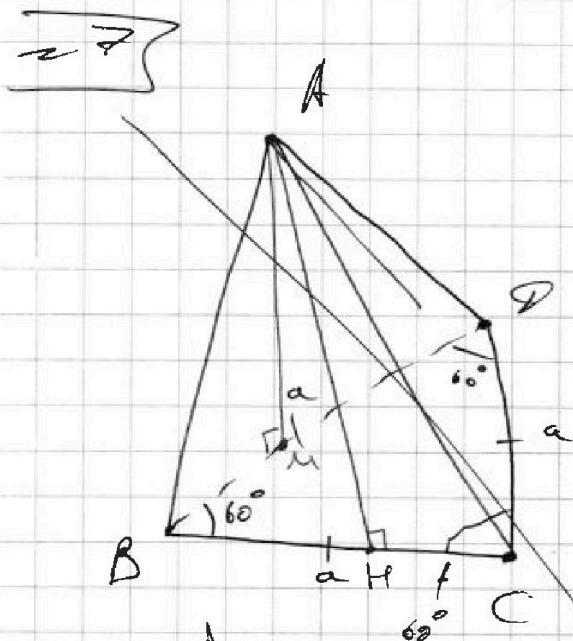


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \quad] \quad B D = a$$

$$B D = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2a$$

$$2) \quad S_{BCD} = \frac{B D \cdot \sqrt{3}}{4} = 4$$

$] \quad A K \perp B C, K \in B C$

$A M \perp B D, M \in B D$

$A L \perp D C, L \in D C$

\Rightarrow

без отрезков

$$S_{ABC} = S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{A K \cdot B C}{2} = \frac{D L \cdot A L}{2} = b$$

$$\Rightarrow A K = A L = \frac{12}{a}$$

$] \quad A Q \perp K L, Q \in K L$

$\times \quad A K L - \text{пр. б. в.}$

$$Q L = Q K$$

2) Q - середина KL

$] \quad A A_0 \perp B C, A_0 \in (BCD)$

$\text{прямые } A A_0 K \text{ и } A A_0 L$

равны по катетам $\Rightarrow A_0 L = A_0 K \Rightarrow A_0 \in \ell$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~27~~ $\triangle ABC \sim \triangle AA_0L \Rightarrow A_0L^2 = AL^2 - AA_0^2$

$$A_0L^2 = \frac{144}{a^2} - p^2 = A_0H^2$$

$$S_{\triangle AA_0B} = S_{\triangle A_0CB} - 2S_{\triangle A_0OC} =$$

$$= 4 - A_0H \cdot a = \frac{1}{2} \cdot MA_0 \cdot a$$

$$4 - A_0H \cdot a = \frac{MA_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - \sqrt{\left(\frac{144}{a^2} - p^2\right) a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{a^2} - p^2\right) a^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p^2 a^2 = t \\ 4 - \sqrt{144 - p^2 a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2 a^2} \end{array} \right\}$$

$$16 + 144 - t - \sqrt{144 - t} = \frac{1}{4} (100 - t)$$

$$160 - t - \sqrt{144 - t} = 25 - \frac{t}{4}$$

$$135 - \sqrt{144 - t} = \frac{3t}{4}$$

~~135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}~~
~~540 - 3t = 4\sqrt{144 - t}~~
~~540 - 3t = 32\sqrt{144 - t}~~

$$135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}$$

$$540 - 3t = 32\sqrt{144 - t}$$

$$540^2 + 9t^2 - 6 \cdot 540t = 32^2(144 - t)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) 3 слага $p > 0$

~~$f(-1) = 4$~~

~~$f(1) = 2p$~~

~~$f'(x) = 2x + 1$~~

~~точка мин / макс
поиск макс / мин
поиск p $f =$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

$p > 0$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p - 1 < 0$~~

не выполняется
неравенства

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$\frac{1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1$
 $\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > -1$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1 - p < 0$~~

~~$1 - p < 1 + 2p + p^2$
 $0 < p^2 - p$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

