



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

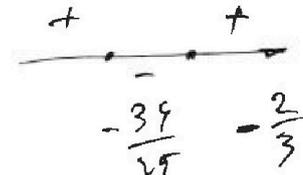


1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2-x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$



3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.



7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = b$$

$$b_{10} = b \cdot 9^9$$

$$b_{12} = b \cdot 9^{11}$$

$$b_{18} = b \cdot 9^{17}$$

0 93:

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

1 ступень $b_{10} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b_{18}}{b_{10}} = 9^8 = \sqrt[4]{\frac{(25x+34)(3x+2)^4}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)}} = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$\Rightarrow 9^2 = \sqrt[4]{|3x+2|} \Rightarrow 9^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

~~$$9^2 = \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x) \cdot \sqrt[4]{|3x+2|}$$~~

~~$$b_{18} = b_{10} \cdot 9^8 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$= \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$(25x+34)^2 (3x+2)^2 = (2-x)^4 \cdot |3x+2|$$~~

~~$$(25x+34)^2 |3x+2| = (2-x)^4$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{b_{10} \cdot b_{18}} = b_{14}$$

см в

$$\frac{|25x+34|}{|3x+2|} = b_{14}$$

$$\frac{25x+34}{3x+2} \geq 0 \text{ с } \textcircled{3}$$

$$\left| \frac{25x+34}{3x+2} \right| = b_{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25x+34}{3x+2} = b \cdot 9^{13} \\ 2-x = b \cdot 9^9 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq 31 \\ x+6 \geq 0 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ y-3x-x^2+2z \geq 0 \quad (*) \\ 400-z^2 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq -6 \\ -2z \geq x-3 \\ y-3x-x^2+2z \geq 0 \\ 20z \geq -20 \end{array}$$

$$0 \leq |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 4|y+2||y-18| = 400-z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по формуле корней $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

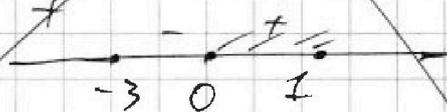
$p > 0$

~~$-1 \pm \sqrt{1-p} > p$~~

~~$\pm \sqrt{1-p} > p+1$~~

~~$1-p > p^2 + 2p + 1$~~

~~$\uparrow p^2 + 3p < 0$~~



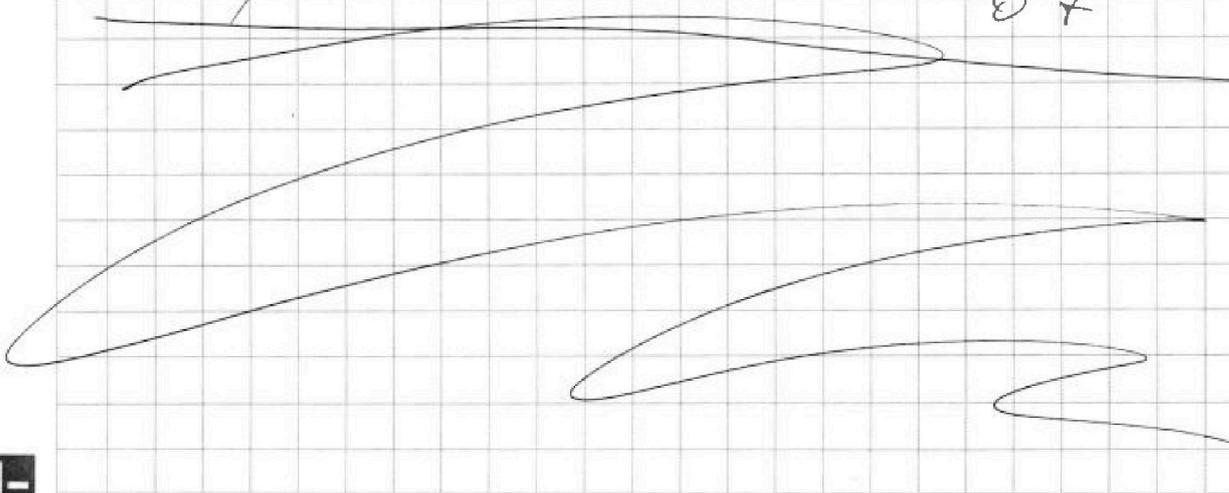
~~$p > p > 0 \rightarrow$~~

~~при $p > 0$
нет миним
и макс
не пересекае
0 +~~

~~тогда
минимум/макс
не до
ств $(-1; 1)$~~

~~\rightarrow нет
 $f(t)$~~

~~монотон
на $[1; 1]$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(t)$

у меня формула \Rightarrow точки на графике

$f(t) \geq 0 \quad t_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$~~ $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$ $(p > 0)$

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$

$1 > \sqrt{1-p} \leq p \leq 1 > 1$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$~~

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$

$\sqrt{1-p} \geq 1-p$

$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \geq 1$

$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \geq 1$

$\sqrt{1-p} \geq 1-p$

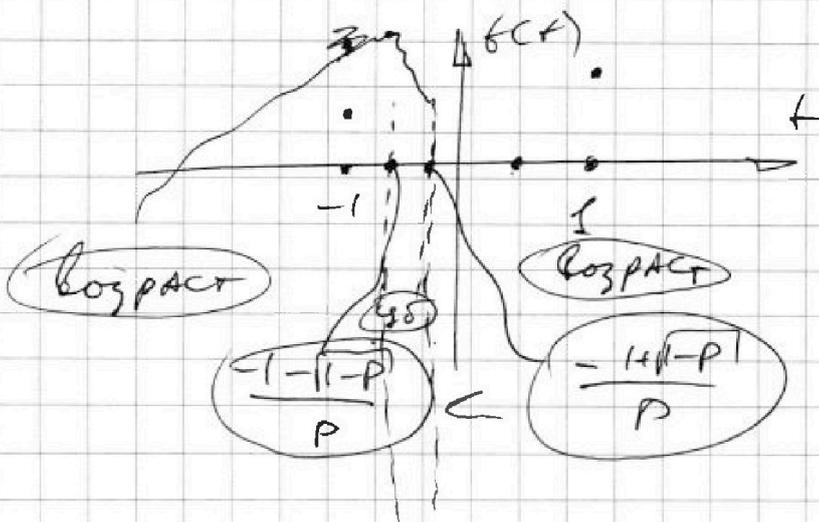
~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$~~

$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$

$1 < 1+p \leq \sqrt{1-p}$

\uparrow

1



$f\left(\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}\right) \geq 0$

\Rightarrow не решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 случай $p=0$

$$f(-1) = 4$$

$$f(1) = 28$$

$$f'(t) = 2t + 1$$



тогда найдем мин(макс)

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 - 6 + 4 = 1 > 0$$

⇒ нет решений

4 случай $0 < p < 7$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) > 0$$

$$f'(t) = 7t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 28}}{14} < 0$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0$$

⇒ $f(t)$ — непрерывная

р.ч. не пересекает

5 случай $p < -7$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) < 0$$

⇒ непрерывная ⇒ есть решение

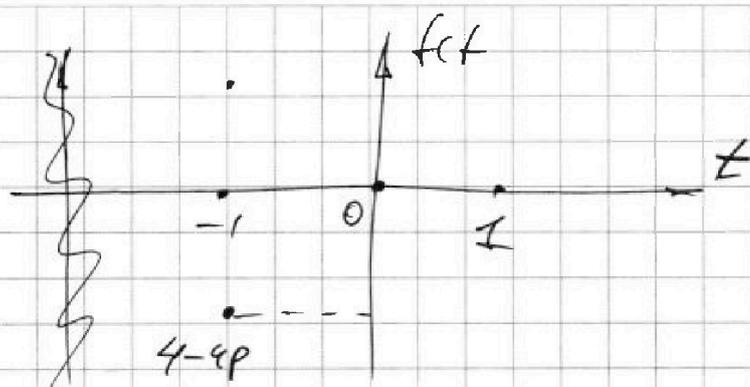


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) 1 ступень $p \geq 4$ $f(-1) < 0$ / \Rightarrow есть решение
 $f(1) > 0$ / т.ч. функция непрерывна $f(x)$
на $[-1, 1]$

2) 2 ступень $1 > p > 0$ $f(-1) > 0$ / решение
 $f(1) > 0$ / максимум $f(x)$
рассмотрим на отрезке минимум $f(x)$
при этом условии $f'(x) = 0$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

~~$$pt^2 + 2\sqrt{p}t + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$(\sqrt{p}t + \frac{1}{\sqrt{p}})^2 - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$t = \pm 2$$~~

~~$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4p}}{2p} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$~~

~~$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$p^2$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{23} \quad \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (1 + 2\cos^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$f(t) = 4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

~~$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$~~

~~$$f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12 = 0$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

~~$$4f(pt^2 + 1) \quad f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12 = 0$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

$$f(-1) = -4p + 12 - 12 + 4 = 4 - 4p$$

$$f(1) = 4p + 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

PZ 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Т. окружностей $\triangle CPE$

$$\frac{CP}{\sin \alpha} = \frac{EP}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} &= \frac{EP}{CP} = \frac{EP}{CB} = \\ &= \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta} \end{aligned}$$

б) $\triangle CPE \Rightarrow \angle PAE = \angle EPB = \angle AEP$

$\triangle APE$ - бп. - ч

$\Rightarrow AP$ - биссектриса $\angle CAE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$

$$\begin{aligned} AC &= 7 \text{ см} \\ AE &= 20 \text{ см} \end{aligned}$$

в) Т. окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle ABE$

$$\frac{AC}{\sin \angle CPA} = 2R_1$$

$$\frac{AE}{\sin \angle ABE} = 2R_2$$

($\sin \angle CPA = \sin \angle ABE$)

$$\frac{AC}{AE} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{20}$$

г) из п. а) \Rightarrow

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$$

д) из п. а)

$$\frac{EP}{CP} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24

ω_1 ω_2

Γ -лучи $\text{Pon}(X, \omega)$ -сечение голика хотя, оар ω $\Gamma \cap \varphi$?

$\Gamma \cap \varphi = 7x$
 $\Gamma \cap B = 20x$

0) $\Gamma \cap \varphi \cap CB = P$

$\Gamma \angle B A P = \angle A B \varphi = \alpha = \angle B \varphi C$

AB -пар. осе ω_1 и $\omega_2 \Rightarrow \Gamma$ ~~сечение~~ $AB \cap \varphi = M$

$\text{Pon}(M, \omega_1) = \text{Pon}(M, \omega_2) \Rightarrow MC^2 = M\varphi^2$

1) $\Gamma \angle C A M = \beta = \angle B C M$ (из касания)

2) $\triangle C \varphi E \sim \triangle C B \varphi$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{E \varphi}{C \varphi} = \frac{\varphi \varphi}{C B}$

3) по т. синусов $\triangle ABC$ и $\triangle AB \varphi$

$\frac{C B}{\sin \beta} = 2R_1, \quad \frac{B \varphi}{\sin \alpha} = 2R_2 \Rightarrow \frac{B \varphi}{C B} = \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

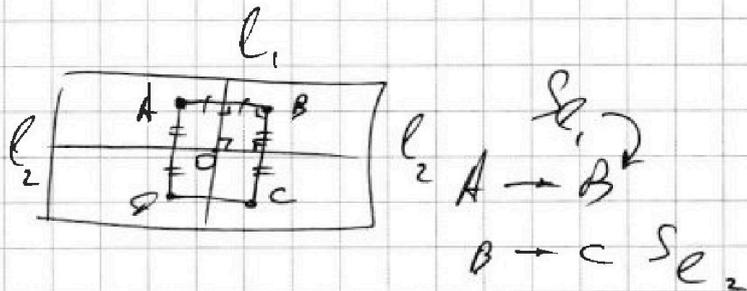
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В симметрии отображают углы
 равно симметричны сим отображают
 и углы

1) $2CB + 2CB$



по т. Уинд

$A \rightarrow D (S_{l_1})$

$\Rightarrow A \in O$ лежат на одной
 прямой \Rightarrow того

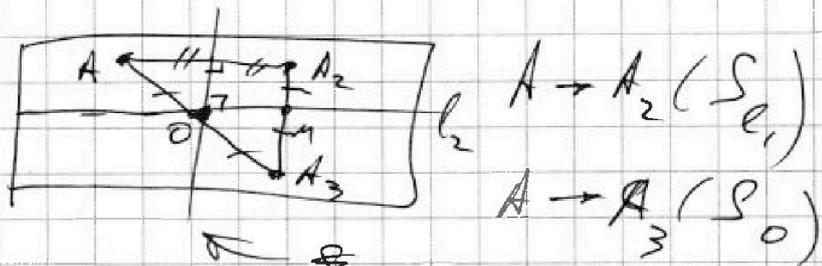
$\Rightarrow ABCD$ прямоугольник

($AD \parallel BC, AD = BC$
 \Rightarrow паралл + угол $\angle A = 90^\circ$)

\Rightarrow точка O является центральной

2) $OB +$ центр

без отр $OB \Rightarrow$



$A \rightarrow A_2 (S_{l_1})$

$A \rightarrow A_3 (S_{l_2})$

(2)

$A_2 A_3 \parallel l_1 \Rightarrow \angle A_2 A_3 O = 90^\circ$

(2)

$AA_2 \parallel l_2$

$\Rightarrow O \in l_2$ центр

образует
 углы
 симметрией

$A_2 A_3 \cap l_2 = M \in AA_2 \cap A_3 A_2$
 \Downarrow
 $A_2 M = A_3 M$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $120; 2, 500; 2 \rightarrow$ 0 - центр в центре досочки сетки



посчитаем число способов размещения флета чтобы он обладал симметрией

отн. центра ~~и др.~~ $A_1 - ?$, (и возможно горизонтальной вертикальной диагональной)

отн. Гор. прямой (средней) $A_2 - ?$

отн. Верт. прямой (средней) $A_3 - ?$

для этого разделим прямоугольник

на две половинки по соот. средней

линии. и разместим там 4 флета

то $\sum_{i=1}^4 C_n^4$ для всех трех

случаев получим их отн. центра

или соотв. средней. получим

следующие 4 варианта итого

$$A_1 = C_n^4$$

$$A_2 = C_n^4$$

$$A_3 = C_n^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) рассмотрим # размещем на доске
которые образуют симметрии
отн. в двух осей (и возможно
отн. центра)
для этого возьмем четверть

кратчайшими

точ на рисунке

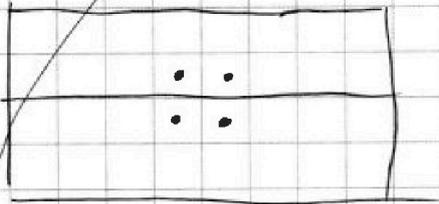
и выберем там две точки

это $C_{\frac{n}{2}}^2$ способов оставшиеся

$$A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$$

однозначно определяются по ним

3) # # размещем образуют
одной из осей симметрии и
центральной A_5 (и возможно отн
центральной оси)



приведем соответс



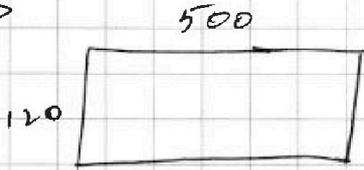
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

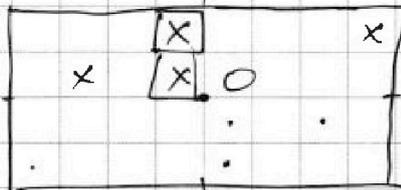
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



отн. центра
отн. середины
- поперек
] - по с/б

1



$$n = 500 - 120 \cdot \frac{1}{2}$$

получим # способов

разместим фалеек т.ч. 2-го и 3-го бина симметрично отн. к с/б. $120; 2; 500; 2 \Rightarrow$ диаметр в пересечении

1-го и 2-го. первую линию n способов
вторую (n-2) т.ч. небыл в точке и
в симметричную. третью (n-4) аналог.
четвертую (n-6) а оставшиеся 4-х сделаем
и еще учтем углы в пересечениях f!
(однозначно) $A_1 = n(n-2)(n-4)(n-6) \cdot \frac{1}{f!}$

2) получаем # способов размещения f

$$500 - 60 =$$

$$\approx 30000$$

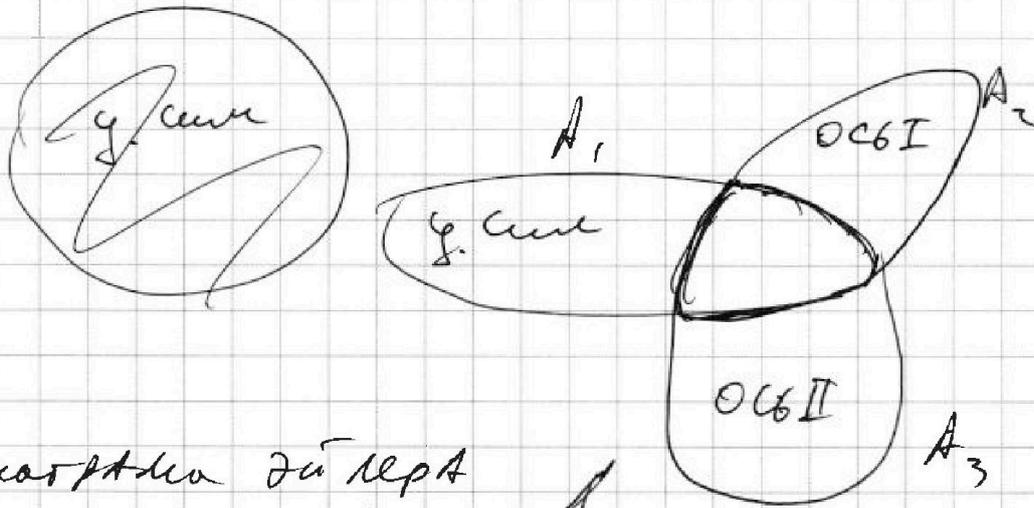


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



квадратная таблица
+ А-канал

3) кол-во способов размещения
элементов по обе стороны от
симметричной
возьмем ребер $C_{\frac{n}{2}}^2$ - # способов
выбрать там 2 клетки
остальные беспорядочно
оразнообразно (УТВ (см)) $A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$

итого по квадратике \Rightarrow общее число
равно $A_1 + A_2 + A_3 - 2 C_{\frac{n}{2}}^2 = 3 C_n^4 - 2 C_{\frac{n}{2}}^2$

$$= -2 C_{15000}^2 + 3 C_{30000}^4 \leftarrow \text{УТВ!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~26) (a, b, c)~~

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = p^2$ - простое

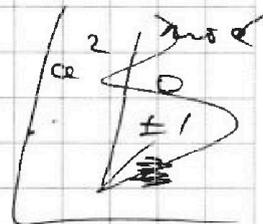
3) $a^2 + b^2 = 1000$

a	a^2 (mod 4)
0	0
1	1
2	0
3	1

a	a^2
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	

a	a^2
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	

3) $a^2 + b^2 = 0$
4



1) $a \equiv b \pmod{4} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{4}$

$a^2 + b^2 + c^2 + c(a+b) = p^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26 (a, b, c)

1) $a < b$

2) $b - a \neq 3$

3) $(a - c)(b - c) = a^2 + c^2 - c(a + b) = p^2$

4) $a^2 + b = 1000$

a	$\pmod{4} a$
$\equiv 1$	1
$\equiv 2$	0
0	0

1) ~~$a^2 + b = 1000$~~

1) $a \equiv 4 \quad b \equiv 4$

2) $a \equiv 1 \quad b \equiv 3$

$a = 4k$
 $b = 4d$

$16k^2 + 4d = 1000$

$4k^2 + d = 250$

$d \equiv 2 \Rightarrow d = 2l$

$4k^2 + 2l = 250$

$2k^2 + l = 125$

$l \equiv 1 \Rightarrow l = 2m + 1 = 16m + 8$

$2k^2 + 2m + 1 = 125$

$k^2 + m = 62$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 1000 - a^2$$

~~$$1) a \in 1000 - a^2$$~~

~~$$2) 1000 - a^2 - a \div 3 \Leftrightarrow 1000 - a(a+1) \div 3$$~~

~~$$(a+c)(b+c) = p^2$$~~

~~$$(a-c)(1000 - a^2 - c) = p^2$$~~

~~$$1000a - 1000c - a^3 + a^2c - ac + c^2 = p^2$$~~

~~$$(a+c) + c(b+c) = p$$~~

$$\text{уб)} \quad (a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} (a-c) \neq \pm 1 \\ (b-c) \neq \pm 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a-c = p = b-c$$

$$\Downarrow a = b \quad \text{но } a < b \quad \neq$$

$$2) \begin{cases} (a-c) = +1 \\ (b-c) = +p^2 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b < p^2+1 \\ a < b^2+p \end{cases}$$~~

$$a = c+1$$

$$b = p^2 + c$$

~~$$c+1 < c-p^2$$~~

~~$$1+p^2 < 0 \quad \neq$$~~

$$b = a \div 3$$

$$p^2 - 1 \div 3$$

$$p^2 \neq 1$$

$$\text{случ } p \neq 3 \quad \text{случ } p = 3$$

$$a \mid (a)^2 \pmod{3}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c_{1,2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \neq \quad c = \frac{-66}{2} = -33$$

$$c = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{array} \right. \quad \text{а)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 30 \end{array} \right.$$

проверки
"все да"

б) $c^2 = 17c - 920 =$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 40 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

$$- \frac{63 - 17}{2} = - \frac{46}{2} = 23$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 40 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

проверки
"все да"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~$a^2 + b = c^2$~~

~~$a^2 + b = c^2 + 9 - 6c + c - 1 = 289$
 $= c^2 - 5c + 8 = 1000$~~

~~$20 \cdot 9 = 360 \quad c^2 - 5c - 992 = 0$~~

~~$+ 289$
 3969
 $9 = 29 + 4 \cdot 992 = 11 \cdot 3$~~

~~$992 \overline{) 2}$
 $496 \overline{) 2}$~~

~~$\Rightarrow c \notin \mathbb{Z}$~~

$c^2 + 81 - 18c + c - 1 = 1000$

$c^2 - 17c + 920 = 0$

$3969 \overline{) 3}$
 $1323 \overline{) 3}$
 $441 \overline{) 7}$
 $63 \overline{) 7}$
 9

~~121
 $121 \overline{) 337}$
 $+337$~~

$3969 \overline{) 11}$
 3

4000
 $\underline{- 32}$
 3968
 $+ 25$
 $3993 \overline{) 11}$
 $363 \overline{) 11}$
 $33 \overline{) 11}$
 3

6) 2.1) $p = 3$

~~$a - c = 1$
 $b - c = 9$~~ $\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases}$

$25 \cdot 2 \cdot 11$
 $(1000 - 10) \cdot 4 =$
 $= 4000 - 40$
 $= 3960$

$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000$

$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 3960}}{2}$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3}}{2}$

$c^2 + 3c + 10 = 1000$

$c^2 + 3c = 990$

~~$c = 3$~~ $\Rightarrow c(c + 3) = 990$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2) $(a-c) = 1$
 $(b-c) = p^2$~~
множители

x^0 - противоречие

3) $(a-c) = -1$
 $(b-c) = p^2$ \Rightarrow $a = c - 1$
 $b = c - p^2$

$a < b$
 $c - 1 < c - p^2$
 $p^2 < 1 \quad x^0$

4) $(a-c) = p^2$
 $(b-c) = 1$ \Rightarrow $a = p^2 + c$
 $b = 1 + c$

$p^2 < 1 \quad (a < b)$
 $\Rightarrow x^0$

5) $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$ \Rightarrow $a = c - p^2$
 $b = c - 1$

$a < b \quad \odot$

$b - a = -1 + p^2 \neq 3$

из п. 2 $\Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кривизна поверхности в точке A равна

Сфера $\triangle ABC$ на поверхности

Вектор \vec{AB} в данной сфере

$\vec{AB}_1 \perp \vec{AC}$ (по условию)

$\Rightarrow (\vec{AB}_1 = \vec{AA}_1 = \vec{CC}_1)$

$\Rightarrow \vec{AA}_1 \perp \vec{AC}, \vec{CC}_1 \perp \vec{AC}$

$\Rightarrow A, C, C_1$ — коллинеарны

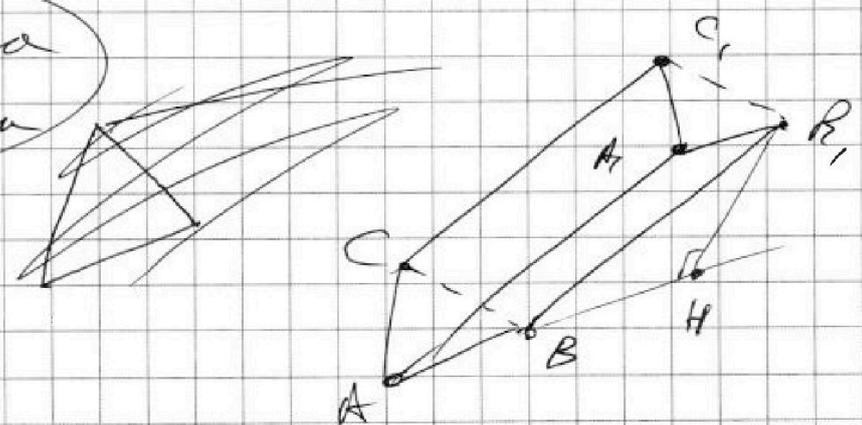
$\sum \vec{AC}, \vec{CA} = 5 = a \cdot \vec{AA}_1 \Rightarrow \vec{AA}_1 = \frac{5}{a}$

$\sum \vec{AA}_1, \vec{A_1A} = R_1 \cdot \vec{AB} = 6 \Rightarrow R_1 = \frac{6}{a}$

Т. к. $\triangle B, B_1 \Rightarrow KB^2 = \frac{25}{a^2} - \frac{36}{a^2} < 0$

\Rightarrow кривизна поверхности

Значит неверно





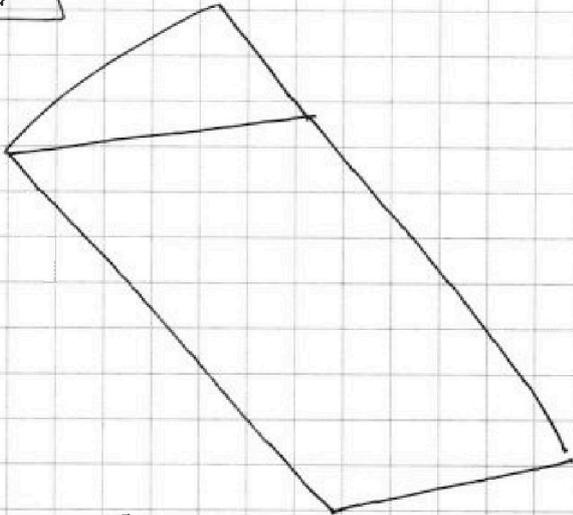
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27



$$\angle AB = a$$

$$\Rightarrow S_{A, B, AB} = S_{C, B, BC} = b$$

$$\angle B, K \perp AB, K \in AD$$

$$B, L \perp AB, L \in CD$$

$$\Rightarrow B, K = B, L$$

$$B, B_0 \perp ABC$$

$$\Delta B_0 B, L = \Delta B_0 B, K$$

$$\text{по т. о з х } \perp \text{ к } AC$$

$$(B_0 L \perp C = L B_0 K B = 90^\circ)$$

$$B_0 B L = \Delta B_0 B K$$

$$\text{по кат и гип}$$

$$\Rightarrow B_0 B - \text{выс } \angle ABC$$

$$B_0 B \perp AC \quad (BC = AB)$$

$$B_0 B \perp AC = M$$

$$M - \text{серед } AC$$

$$\text{по т. о з х } \perp \text{ к } AC \quad B, M \perp AC$$

$$\text{по т. о проецировки высоты } B_0 B \text{ на } AC$$

$$(\angle B_0 B A = \angle B_0 B C) \Rightarrow$$

$$\angle A B A_1 = \angle C B B_1$$

$$AB \sin \angle A B A_1 = AC \sin \angle C B B_1$$

$$S_{A, B, BA} = S_{C, B, BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

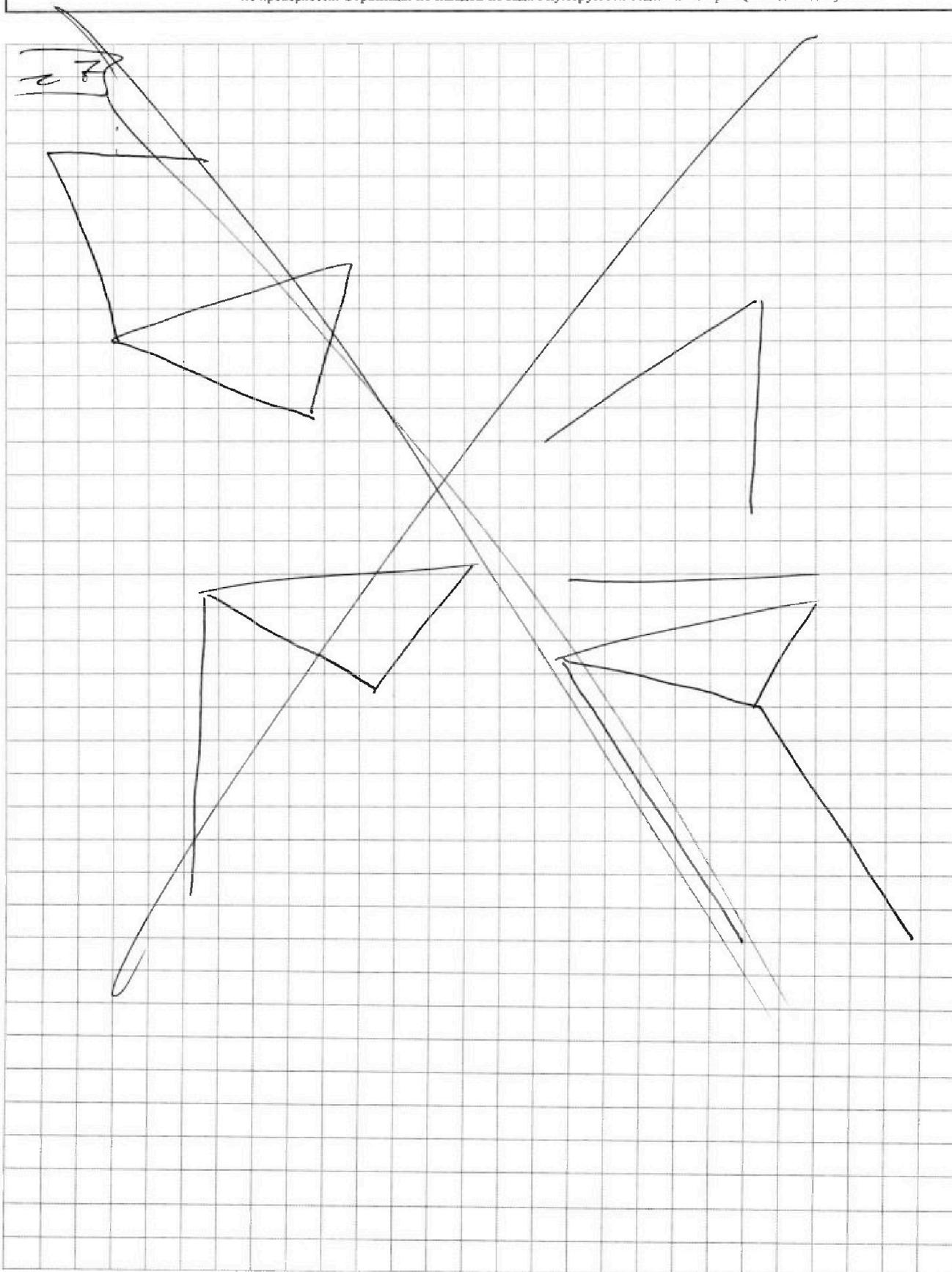
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





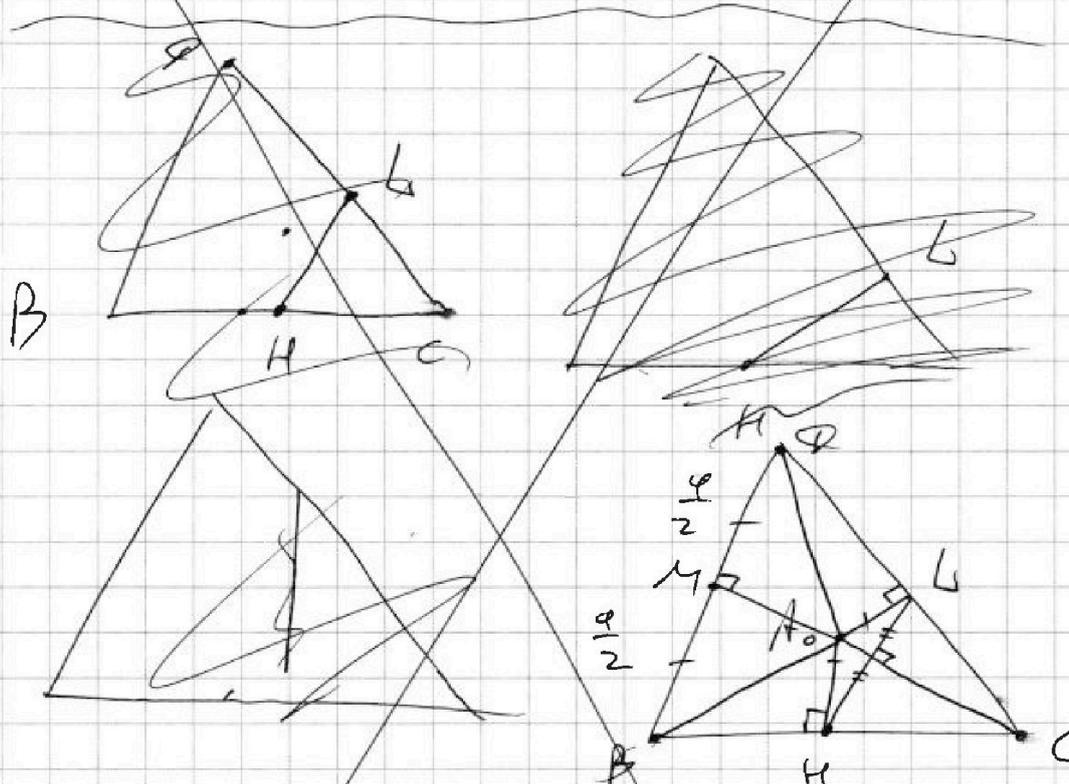
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ГОТОВИТЬ \perp РАД: $\angle P K A_0 = 90^\circ \angle A_0 L C$
 $\angle A_0 M Q \Rightarrow \dots$



$A_0 L = A_0 H$ (из 1, 2) $\Delta A_0 C L = \Delta A_0 C H$
 (кр. кат)

$\Rightarrow A_0 C$ - бисс $\angle A C B$ $A_0 C \perp B D = M$
 (т.к. $A_0 M \perp B D$) $A_0 C \perp H L$ (из симметрии A_0)

$S_{B D A} = \frac{A M \cdot a}{2} = 5 \Rightarrow A M = \frac{10}{a} \Rightarrow A A_0 = p$

по т. Пифагора в $\Delta A_0 M \Rightarrow A M^2 - A A_0^2 = M A_0^2$

$M A_0^2 = \frac{100}{a^2} - p^2$

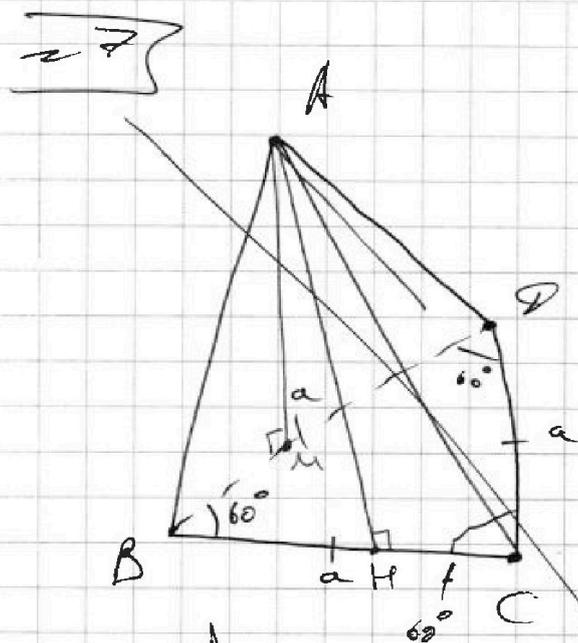


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle B\varphi = \alpha$

$B\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2a$

2) $S_{BC\varphi} = \frac{B\varphi \cdot \sqrt{3}}{4} = 4$

$\angle AH \perp BC, H \in BC$

$AD \perp BC, D \in BC$

$AL \perp PC, L \in PC$

без отрезков

$S_{ABC} = S_{AC\varphi} \Rightarrow$

$\frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{AD \cdot AL}{2} = 6$

$\Rightarrow AH = AL = \frac{12}{a}$

$\angle AQL \perp HL, Q \in HL$

$\angle AHL - \text{прямой}$

$QL = QH$

3) Q - середина HL
 $\angle AA_0 \perp BC, A_0 \in (BC\varphi)$

$\text{прямые } AA_0H \text{ и } AA_0L$

равны по катетам $\Rightarrow A_0L = A_0H \Rightarrow A_0 \in \ell$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~27~~ $\triangle ABC \sim \triangle AA_0L \Rightarrow A_0L^2 = AL^2 - AA_0^2$

$$A_0L^2 = \frac{144}{a^2} - p^2 = A_0H^2$$

$$S_{\triangle AA_0B} = S_{\triangle A_0CB} - 2S_{\triangle A_0OC} =$$

$$= 4 - A_0H \cdot a = \frac{1 \cdot AA_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - A_0H \cdot a = \frac{1 \cdot AA_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - \sqrt{\left(\frac{144}{a^2} - p^2\right) a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{a^2} - p^2\right) a^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p^2 a^2 = t \\ 4 - \sqrt{144 - p^2 a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2 a^2} \end{array} \right\}$$

$$16 + 144 - t - \sqrt{144 - t} = \frac{1}{4} (100 - t)$$

$$160 - t - \sqrt{144 - t} = 25 - \frac{t}{4}$$

$$135 - \sqrt{144 - t} = \frac{3t}{4}$$

~~135 \cdot 4 = 540 + 10t~~
~~540 + 10t = 540~~
~~10t = 0~~
~~t = 0~~

$$135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}$$

$$540 - 3t = 32 \sqrt{144 - t}$$

$$540^2 + 9t^2 - 6 \cdot 540t = 32^2 (144 - t)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) 3 слага $p=0$

~~$f(-1) = 4$~~

~~$f(1) = 2p$~~

~~$f'(x) = 2x + 1$~~

~~точка мин / макс
поиск макс / мин
поиск p $f=$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$p > 0$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p - 1 < 0$~~

~~не выполняется
неравенства~~

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$\frac{1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > -1$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1 - p < 0$~~

~~$1 - p < 1 + 2p + p^2$~~

~~$0 < p^2 - p$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

