



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

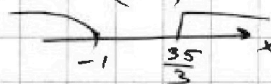
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n \in \mathbb{R} \quad \sqrt[3]{13x-35} \quad b_7 = \sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad b_{13} = 5-x \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Т.к. подкоренное выражение больше или равно 0, то $\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0$



Пусть q -знаменатель прогрессии

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 \rightarrow 5-x = \sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6$$

$$b_{15} = b_{13} \cdot q^2$$

Если $\sqrt[3]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0$, то $5-x \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{35}{13} \text{ не корень} \Rightarrow q^6 = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} \cdot (5-x)$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot q^2$$

Если $5-x=0$, $x=5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(13x-35)(x+1)} \neq 0 \Rightarrow x=5 \text{ не корень}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$q^6 = (q^2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} = (5-x) = \frac{\sqrt{(13x-35)^3 \cdot (x+1)^3}}{(5-x)^3}$$

① При $x=5$ прогрессия $\rightarrow b_7 \neq 0$
 $b_{13} = 0$ что невозможно, т.к.
 $b_{15} \neq 0$ $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

② При $x=-1$ дроби b_7 не существуют.

③ При $x = \frac{35}{13}$ $b_7 = 0$, что невозможно, т.к.
 $b_{13} \neq 0$ $b_{13} = b_7 \cdot q^6$

Тогда

$$(5-x)^4 = \sqrt{(13x-35)^4}$$

$$(x^2 - 10x + 25)^2 = (13x - 35)^2$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35 \\ x^2 - 10x + 25 = -13x + 35 \end{cases}$$

↑
прог.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$ (орог.)

$x^2 - 23x + 40 = 0$ $\Rightarrow D = 529 - 4 \cdot 40 = 369 = 9 \cdot 41 \Rightarrow x = \frac{23 \pm 3\sqrt{41}}{2}$

$x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow \text{реш. нет}$
 $D = 9 - 4 \cdot 10 < 0$

$x = \frac{23 + 3\sqrt{41}}{2} > 5$, т.к. $\frac{23}{2} > 10 > 5$. Знаменат. $q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$
 $5-x < 0$

не имеет реш., т.к. $\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} < 0$, а $q^2 > 0$

$x = \frac{23 - 3\sqrt{41}}{2}$

$\frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} \neq 5$ $\frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} \neq \frac{35}{13}$
 $23 - 3\sqrt{41} \neq 10$ $13 \neq 3\sqrt{41}$
 $169 \neq 369$ $299 - 39\sqrt{41} \neq 70$
 $229 \neq 39\sqrt{41}$ $229^2 \neq 39^2 \cdot 41$
 $5241 \neq 62361$

При этом $x = \frac{23 - 3\sqrt{41}}{2} > 0 \Rightarrow$ Не подходит

Ответ: Таких x нет

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35 \\ x^2 - 10x + 25 = -13x + 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

$D = 529 - 4 \cdot 60 = 289$
 $x = \frac{23 \pm 17}{2} = 3; 20$
 $D = 9 + 4 \cdot 10 = 49$
 $x = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5; 2$

Вспомним про область определения

При $x = 20$ $q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$ не имеет реш., т.к. $\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} < 0$, а $q^2 > 0$

При $x = 3$ Все хорошо, т.к. $3 > \frac{35}{13}$

При $x = 2$ Все плохо, т.к. $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ не существует

При $x = -5$ Все вновь хорошо, т.к. $x < -1$

Ответ: -5; 3

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} = 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2) $y \geq 12$

$$4y - 35 = \sqrt{169 - z^2} \leq 13 \rightarrow 169 - z^2 \leq 169$$

$$4y - 35 \leq 13$$

$$y \leq 12$$

$$\Rightarrow y = 12 \text{ (из opp.)}$$

$$\sqrt{169 - z^2} \leq 13$$

$y \in [-1; 12]$

$$y+1 - 3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y+37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12 \Rightarrow y = 12$$

$y \leq -1$

$$-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-4y+35 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$4y \geq 22$$

$$y \geq \frac{11}{2}$$

\rightarrow таких y нет

Значит, подходит только $y = 12$. Подставим в (2)

$$13 = \sqrt{169 - z^2} \Rightarrow 169 - z^2 = 169 \Rightarrow z = 0$$

Подставим в (1) $y = 12$ и $z = 0$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$\begin{cases} x+3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 4-x = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25 \\ \sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x} \\ 2\sqrt{12+x-x^2} \geq 5 \end{cases}$$

Пусть $t = \sqrt{12+x-x^2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$ (пог.)

Тогда,

$$\begin{cases} 7-2t = 4t^2 - 20t + 25 \\ x+3 \geq 4-x \\ x \leq 4 \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 18t + 18 = 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 4 \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2 - 9t + 9 = 0 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$D = 81 - 8 \cdot 9 = 9$$

$$\begin{cases} t = \frac{3}{2}; 3 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \\ t \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Получается, $t = \frac{3}{2}$
не пог.

$$\begin{cases} \sqrt{12+x-x^2} = 3 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 = 9 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x \in [\frac{1}{2}; 4] \end{cases} \quad D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0 \rightarrow \text{не пог.}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2}, \text{ т.к. } \sqrt{13} > 0$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \neq 4$$

$$1 + \sqrt{13} \neq 8$$

$$\sqrt{13} \neq 7$$

Пог. пог.

Ответ: $(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

Пусть $\cos x = t \in [-1; 1]$

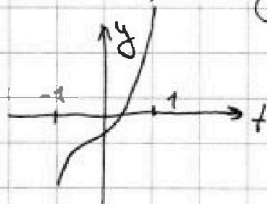
$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

Пусть $F(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 =$

$$F'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

Значит, $F(t)$ не убывает на всем промежутке $[-1; 1]$

Значит:



Значит, если мы будем проводить прямые $y=p$, то пересек. с $F(t)$ и есть решения.

$$F(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$F(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

Тогда при $p < -4$ не будет рещ.

при $p \in [-4; 10]$ будет одно рещ.

при $p > 10$ не будет рещ.

$$y = F(t) = p$$

Заметим, что

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = 4t^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3t^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3t + 4 \cdot \frac{1}{8} = 4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}$$

Тогда уравнение имеет вид

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = p$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7+2p}{8}$$

$$t + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{7+2p}}{2}$$

П.т.к. $g(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^3$ \nearrow на $[-1; 1]$, то

• Вернемся к x : $\cos x = \frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2}$

• При $p < -4$ рещ нет

• При $p = -4$ $\cos x = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Body



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

При $p \in [-4; 10]$ $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

При $p = 10$ ~~$\cos x = \frac{2}{2} = 1$~~ $\Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

При $p > 10$ Реш. нет

Ответ: $p \in [-4; 10]$.
 $p = -4$ $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $p \in (-4; 10)$ $x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{7+2p} - 1}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $p = 10$ $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

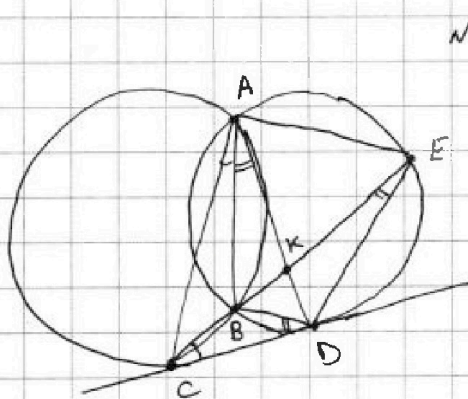
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle CAB = \angle BCD$ как углы между касат. и хордой

2) $\angle BAD = \angle BDC$ как углы между касат. и хордой

3) $\angle KBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAD$
внешний для $\triangle BCD$

4) $\angle EAK = \angle KBD$ \Rightarrow AK - бис-са угла CAE
впис. ков. на одну дугу

5) Знаем, $CA:AE = 3:10$ по св-ву бис-сы

6) По теореме о квадрате касательной $CD^2 = CB \cdot CE$

$$CD^2 = (KC - BK)(KC + KE) =$$

7) Пусть $KC = 3x$, $KE = 10x$

$$CD^2 = 9x^2 - BK \cdot KC - ~~80x^2~~ + 80x^2 =$$

$$= 39x^2 - BK \cdot CE = 39x^2 - BK \cdot 13x$$

$$BK \cdot KE = KC^2 - BK \cdot KC - BK \cdot KE + KC \cdot KE$$

8) ~~$\triangle BCD \sim \triangle DCE$~~ $\triangle BCD \sim \triangle DCE \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{CE}{BD} = \frac{13x}{BD}$



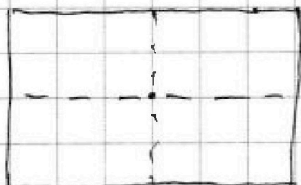
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Т.к. длины сторон четны, то, очевидно, "средние линии" пересекаются в центре прямоугольника

Рассмотрим, сколько вариантов расставить точки и симметрично относительно вертикали. По факту, нужно просто выбрать 4 клетки в левой части прямоугольника. Остальные "проявятся" автоматически

Тогда, всего клеток $250 \cdot 200 = 50000$. Слева от вертикали 25000. Выбрать любые 4 точки = C_{25000}^4

Аналогично с горизонтальной. Всего вариантов C_{25000}^4
(выбрать 4 сверху \rightarrow остальные автоматич.)

Аналогично в принципе, и с центром. Если ~~точка~~^{клетка} слева от вертикали, то она обязательно "перейдет" в клетку справа от вертикали. Таким образом, можно выбрать 4 точки справа от вертикали $\rightarrow C_{25000}^4$ вариантов

Надо не забыть рассмотреть случай, когда варианты пересекаются. Заметим, что если произошла симметрия и относительно вертикали, и относительно горизонтали, то произошла симметрия относительно центра.

↑
прод



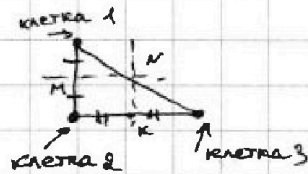
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем это



Клетка 1 симм. клетке 2 \Rightarrow
 $\Rightarrow MN$ - ор. линия
 Клетка 2 симм. клетке 3 \Rightarrow
 $\Rightarrow NK$ - ор. линия \times

Значит, \times ор. верт. и горизонт.

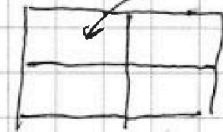
пересекаясь в одной точке $\Rightarrow N$ - середина между клеткой 1 и 3

Значит, произошла центральная симметрия

Аналогично симметрия относ. центра и горизонт. \Rightarrow ор. верт. ^{симм.}
 и симметрия относ. центра и вертикали \Rightarrow симм. _{отг. горизонт.}

Значит, если мы выберем клетку из верхней левой зоны,

то она отразится в еще 3 точки:



Значит, пересекаясь они могли в C_{12500}^2 случаях ^{случае x} (выбрать 2 _(слева сверху) ост. отраз.)

Значит, ~~мы уже~~ данные случаи были и в ситуации относ. вертикали, и относ. горизонтали, и относ. центра \Rightarrow
 \Rightarrow надо дважды вычитать данный случай

Значит, всего получается $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$(a; b; c) \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) - \text{квадрат прост. числа} \\ a+b^2 = 561 \end{cases}$$

~~561 = 3 \cdot 187~~ Т.к. $a > b$, то $a \neq b$

Пусть $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - прост. число. Т.к. $a \neq b$, то $a-c \neq b-c$. Т.к. $a > b$, то $a-c > b-c$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

Т.к. при $a-c > 0$ и $b-c > 0$ $a > b \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = c + 1 \end{cases}$ Т.к. $p > 1$, то $a > b$ (иначе было бы $a < b$)

Т.к. при $a-c < 0$ и $b-c < 0$ $a < b \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$ При $p > 1 \Rightarrow a > b$

Тогда подставим обе системы в второе

Тогда ① $c = b-1 \Rightarrow a = p^2 + 1 + b$

② $c = b + p^2 \Rightarrow a = p^2 + b - 1$

$\Rightarrow a$ и b там, и в том случае одинаково

Подставим в последнее уравнение

$$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$$

$$D = 1 - 4p^2 + 4 \cdot 561 \geq 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 \leq 2245$$

$$p^2 \leq \frac{2245}{4}$$

$$p^2 \leq 561.25$$

$$p \leq 23$$

~~Проверим все варианты~~

Заметим, что $a-b = p^2 - 1$

Квадрат при делении на 3 может давать остатки или 0, или 1. Т.к. $(a-b) \not\equiv 3$, то $p^2 - 1 \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0$

Т.к. p - простое, то ед. вариант - $p = 3$

→ проз



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
20 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{6}$ (нррр.)

Тогда $b^2 + b - 552 = 0$
 $b = -24; 23$

~~$a = b + 1$~~

Ⓐ $a = b - 1$

$c = -25$

$c = 22$

$a = p^2 + c = 9 - 25 = -16$
 $b = -24$

$a = p^2 + c = 9 + 22 = 31$
 $b = 23$

Ⓑ $a = p^2 + b$

$c = 9 - 24 = -15$

$c = 9 + 23 = 32$

$a = c - 1 = -16$
 $b = -24$

$a = c - 1 = 31$
 $b = 23$

Ответ: $(-16; -24; -25)$ $(31; 23; 22)$ $(-16; -24; -15)$ $(31; 23; 32)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$
 $(y+1) + 3(y-12) = \sqrt{169-z^2}$
 $x+3+4-x-z+2\sqrt{y+x-x^2+z} = \sqrt{169-z^2}$
 $(x+3)(4-x-z) = 4x-x^2-xz+12-3x-3z$

$529 - 369 = 160$
 $-z \geq x-4 \geq -7$
 $z \leq x-4$
 $z \geq x^2-x-4$

$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \cdot (1-\cos^2 x)$
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
 $4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 3\cos x = p$
 $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$

$y^2 - 12$
 $4y - 35 = \sqrt{169-z^2}$
 $y \in [-1; 12]$
 $y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-2y+37 \leq 13$
 $-2y \leq -24$
 $y \geq 12$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$
 $f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$
 $t = -1 \quad -4+6-3-3 = -4$
 $t = 1 \quad 4+6+3-3 = 10$
 $p \in [-4; 10]$
 $t \in [-1; 1]$
 $t = \frac{p-3}{7}$

$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $4 \cdot (-\frac{1}{5}) + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} - 3 = -3\frac{1}{2}$
 $4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

$x+z \leq 4$
 $x \geq -3$
 $x^2 + y + x + z \geq 0$
 $4 \geq x+z \geq x^2$
 $y \geq x^2 + 4$
 $y \geq (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 4 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$
 $x^2 + y \leq x+z \leq 4$

$5-x = \sqrt{13x-15}$
 $25-10x+x^2 = 13x-15$
 $x^2 - 23x + 40 = 0$
 $D = 529 - 160 = 369$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

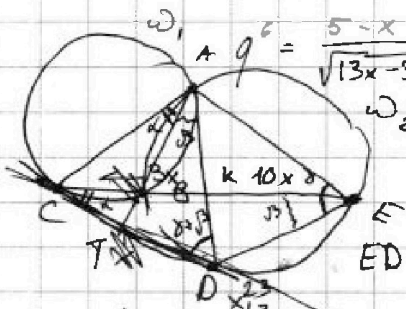
$b_n \in \mathbb{R}$

$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$b_{13} = 5-x$

$q^8 = \frac{1}{(x+1)^2}$ $q^4 = \frac{1}{|x+1|}$ $q^2 = \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}$

$q^2 = \frac{\sqrt{13x-35} \cdot \sqrt{|x+1|}}{5-x}$



$\frac{5-x}{\sqrt{13x-35}} \cdot \sqrt{|x+1|} = \frac{\sqrt{(13x-35)^3} \cdot \sqrt{|x+1|^3}}{(5-x)^3}$

ED: CD? $(5-x)^4 = (13x-15)^2$

$(x^2-10x+25)^2 = (13x-15)^2$

$x^2-23x+40=0$
 $D=529-160=369$
 $x = \frac{23 \pm 3\sqrt{41}}{2}$

$x^2+3x+10=0$

$x^2-23x+40=0$

$D=529-4 \cdot 40 = 369 = 9 \cdot 41$

$x = \frac{23 \pm 3\sqrt{41}}{2}$

$x^2-10x+25 = -13x+15$

$x^2+3x+10=0$

$x^2+3x+10=0$

$\frac{23-3\sqrt{41}}{2} - 1$

$23-3\sqrt{41} - 2$
 $25-3\sqrt{41}$
 $625-369$

89	x 1521
x 39	41

351	1521
117	6084

1521	62361

$-x^2+x+12=4$
 $x^2-x-8=0$
 $-x^2+x+12 = \frac{9}{2}$
 $x^2-x-12 = \frac{9}{2}$

$x=12$

229	x 229
x 229	229

2061	
458	

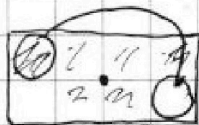
458	

52441	

39	x 39
x 39	14391

1599	4797

62361	



23	x 13
x 13	69

23	289

529	

$\frac{23-3\sqrt{41}}{2} \cdot \sqrt{\frac{35}{13}}$
 $299 - 39\sqrt{41} \sqrt{70}$
 $229 \sqrt{39\sqrt{41}}$
 $229^2 \sqrt{39^2 \cdot 41}$

$x^2-10x+25 = 13x-15$

$x^2-23x+40=0$

$x = \frac{23 \pm 3\sqrt{41}}{2}$

$D = 529 - 4 \cdot 40 = 369$

23	x 23
x 23	69

46	529

529	

529	x 160
x 160	369

369	

$50000 \cdot 49998 \cdot 49996 \cdot 49994$
 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$13 = \sqrt{169 - 2z^2} \Rightarrow z=0$
 $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$
 $x^2+4x-2\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{12+x-x^2}$
 $4x+4x-4\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{12+x-x^2}$
 $-20\sqrt{12+x-x^2} + 25 = 0$

$4x^2 - 18x + 18 = 0$
 $2x^2 - 9x + 9 = 0$
 $D = 81 - 8 \cdot 9 = 9$
 $x = \frac{9 \pm 3}{4} = 3, 2$

$7 - 2z = 4z^2 - 20z + 125$

229	x 229
x 229	12061

458	

458	

52441	

$\frac{9 \pm 3}{4} = \frac{3}{2}, 3$

369	x 11
x 11	369

2499	

$25000 \cdot 24998 \cdot 24996 \cdot 24994$
 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$a-b+5=2a-b$

$a(2b-1)=5-b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \in [-4; 10]$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{p-3}{7}}$$

$$\frac{4p-12}{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{(p-3)^2}{49}} + 3 \sqrt[3]{\frac{p-3}{49}} - 3 = 0$$

$(a; b; c)$
 $a > b$

$$q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

$$a-c=289 \quad b=16$$

$$b-c=1 \quad c=15$$

$$a=304$$

$$(a-b)\sqrt{3}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 = pp$$

$$a+b^2=560 \stackrel{3}{=} 2$$

\downarrow \downarrow
0, 1, 2 0 или 1

$$q^6 = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$a-b=p^2-1$$

$$1 \cdot p^2$$

$$p \cdot p \rightarrow \otimes$$

$$b-c=1$$

$$b=c+1$$

$$a-c=p^2$$

$$a=c+p^2$$

$$a=2$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad a = b - 1 + p^2$$

$$b^2 + b - 1 + p^2 = 560$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 21} \\ 21 \\ \hline 109 \end{array}$$

$$p \neq 3$$

$$\textcircled{c=30}$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 13} \\ 13 \\ \hline 2209 \\ \hline 17 \\ \hline 17 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$b^2 + b - 561 + p^2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 561$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 23} \\ 23 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$-4p^2 \geq 0$$

$$4p^2 \leq 22405$$

$$p^2 \leq \frac{22405}{4} = 5601$$

$$c = b - 1$$

$$a = p^2 + b - 1$$

$$b = \frac{-1 \pm 33}{2} = -17; 16$$

$$p = 17$$

$$c = -18; 15$$

$$a = 2245 + 289 = 2534$$

$$p=3$$

$$2245 - 4 \cdot 9 = 2209$$

$$p=5$$

$$2245 - 100 = 2145 = 5 \cdot 429 \quad \otimes$$

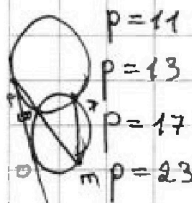
$$p=7$$

$$2245 - 4 \cdot 49 = 2196$$

$$b = -17$$

$$c = -289 - 17 = -306$$

$$a = -289$$



$$p=11$$

$$\textcircled{p=17} \quad a-c=1$$

$$b-c=289$$

$$p=13$$

$$p=17$$

$$9 \cdot 121 = 33^2$$

$$p=23$$

$$b^2 + b - 272$$

$$D = 33^2$$

$$b = \frac{-1 \pm 33}{2} = -17; 16$$

$$2245 = 4p^2 + k^2 : 3$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 1444} \\ 1444 \\ \hline 801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 49} \\ 49 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 196} \\ 196 \\ \hline 2049 \end{array}$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 289 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \\ -1156 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \\ -106 \\ \hline 2049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1089 \overline{) 3} \\ 3 \\ \hline 18 \\ \hline 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1569 \overline{) 3} \\ 3 \\ \hline 1569 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2049 \overline{) 3} \\ 3 \\ \hline 24 \\ \hline 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 529 \\ \times 9 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 484} \\ 484 \\ \hline 1761 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1761 \overline{) 3} \\ 3 \\ \hline 1761 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 161 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1761 \overline{) 13} \\ 13 \\ \hline 1761 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 676} \\ 676 \\ \hline 1569 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2245 \overline{) 2116} \\ 2116 \\ \hline 129 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b-c = -p^2$$

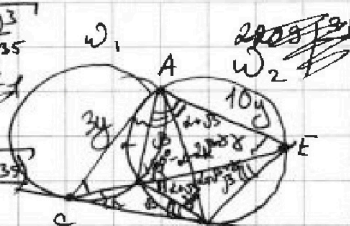
$$a-c = -1$$

$$q^6 = 5-x \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^3}{13x-35}}$$

$$c = a+1$$

$$b = a+1-p^2$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(x+1)(13x-35)}}{5-x}$$



$$\begin{array}{r} 4^2 \\ 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4^2 \\ 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$c = b + p^2$$

$$a = b + p^2 - 1$$

$$b^2 + b + p^2 = 561$$

$$D = 1 - 4p^2 + 2244 = 2245 - 4p^2 = 53^2$$

$$ED:DC = 9:0$$

$$CK:KE = 3:10$$

$$47^2 \quad x+B+x$$

$$b = \frac{-1 \pm 47}{2} = -24; 23$$

$$p = 17$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

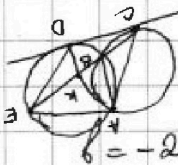
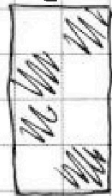
$$b = \frac{-1 \pm 33}{2} = -17$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 23 \\ \hline 72 \\ 48 \\ \hline 552 \end{array}$$

$$37 \cdot 80 = 2960$$

$$b-c = -289$$

$$a-c = -1$$



$$c = 289 - 17 = 272$$

$$a = -1 + 272 = 271$$

$$CD^2 = CE^2 - BE^2$$

$$b = 23$$

$$AK = \sqrt{AE \cdot AC - CE \cdot EK} = \sqrt{136 \cdot \sqrt{x-y}}$$

$$b-c = -9$$

$$c = -15$$

$$b-c = 1$$

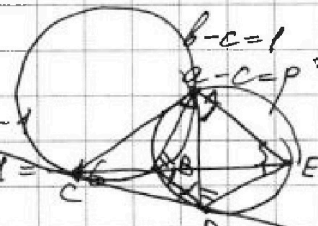
$$a-c = p^2$$

$$c = b - 1 = 22$$

$$a = 9 + 22 = 31$$

$$a-c = -1$$

$$a = c - 1 = 22 - 1 = 21$$



$$\frac{150 \cdot 200}{4} (5-x) \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} = \frac{150 \cdot 200}{4} \sqrt{\frac{(x+1)^3 (13x-35)}{(5-x)^3}}$$

$$a-c = p^2$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cdot \cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p \quad (5-x)^3 = (13x-35)$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

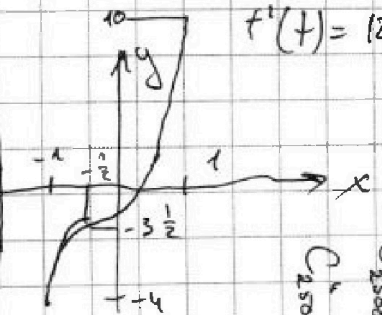
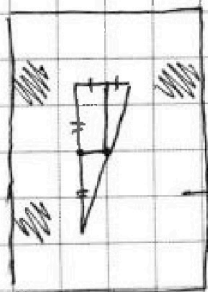
$$-4+6-3-3 = -4$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = 4t^3 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} t^2 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} t + 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{l} 25000 \\ \times x \\ \hline 25000 \\ \hline 25000 \end{array}$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + \frac{1}{2}$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{7}{2} = p$$



$$\begin{array}{r} 250 \cdot 200 \\ \hline 50000 \\ \hline 25000 \\ \hline 25000 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

