



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

где (**): $D = 23^2 - 4 \cdot 22 = 21^2$

$$x_3 = \frac{-23 + 21}{2} = -1$$

$$x_4 = \frac{-23 - 21}{2} = -22$$

Итого: $x_1 = 5$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -22.$$

В задании есть ОДЗ: $(15x+6)(x-3)^3 > 0$, поэтому $x_2 = 2$ не подходит.

ответ: ~~$x_1 = 5, x_2 = 2, x_4 = -22$~~

т.к. в условии дана лев. прогр. и $b_1 > 0$ и $b_{12} > 0$,

то $b_{10} > 0$, поэтому $x_4 = -22$ не подходит ($-22 + 4 < 0$)

ответ: $x = 5, x = -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

из условия:
$$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} \\ b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{12-1} \end{cases} \begin{cases} b_4 = b_1 \cdot a^3 & (1) \\ b_{10} = b_1 \cdot a^9 & (2) \\ b_{12} = b_1 \cdot a^{11} & (3) \end{cases}$$

(3) : (2) и (2) : (1), тогда
$$\begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^{11-9} \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^{9-3} \end{cases} \begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^6 \end{cases} \text{ отсюда}$$

$$\left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^3 = \frac{b_{10}}{b_4}; \quad b_{12}^3 \cdot b_4 = b_{10}^4, \text{ т.е.: } (\sqrt{(15x+6)}(x-3))^3 \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3(15x+6)} = (x+4)^4$$

$$\sqrt{(15x+6)^4} = (x+4)^4$$

$$(15x+6)^2 = (x+4)^4$$

$$(x+4)^4 - (15x+6)^2 = 0$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + 15x+6) = 0$$

$$\begin{cases} (x+4)^2 - (15x+6) = 0 \\ (x+4)^2 + 15x+6 = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 + 8x + 16 - 15x - 6 = 0 \\ x^2 + 3x + 16 + 15x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 & (*) \\ x^2 + 23x + 22 = 0 & (*) \end{cases}$$

решая (*): $D = 49 - 4 \cdot 10 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$
 $x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $t_1: -x^2 - 2x + 35 = 4$

$$x^2 + 2x - 35 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$D_1 = 1 + 31 = 32$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{32}$$

Проверим корни:

$$x = -1 + 4\sqrt{2}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$x+7 > 5-x > 0$$

$$-1 + 4\sqrt{2} + 7 > 5 + 1 - 4\sqrt{2} \quad \ominus$$

$$x = \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}; \quad x+7 < 5-x < 0$$

$$-1 + 3\sqrt{5} + 14 < 10 + 1 - 3\sqrt{5} \quad \otimes \ominus$$

ответ: $\left(\frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2}; 35; 0\right), \left(-1 + 4\sqrt{2}; 35; 0\right)$

$$x = -1 + 3\sqrt{7}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot \frac{3}{2} - 6 = -3 < 0 \quad x = -1 - 3\sqrt{7}:$$

$$x+7 < 5-x < 0$$

$$7 - 1 + 3\sqrt{7} < 5 + 1 - 3\sqrt{7} < 0 \quad \oplus$$

ответ: $\left(-1 + 3\sqrt{7}; 35; 0\right), \left(-1 + 4\sqrt{2}; 35; 0\right)$

при $t_2: -x^2 - 2x + 35 = \frac{3}{2}$

$$x^2 + 2x - 35 + \frac{3}{2} = 0 \quad | \times 2$$

$$2x^2 + 2x - 70 + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 67 = 0; \quad D = 2 + 2 \cdot 67 = 138$$

$$D_1 = 1 + 2 \cdot 67 = 135 = 5 \cdot 3^3 = (3\sqrt{15})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{15}}{2}$$

$$D_2 = 4 + 2 \cdot 67 = 138 = (\sqrt{27} \cdot 3)^2 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6\sqrt{7}}{2}$$

$$x = -1 - 4\sqrt{2}: \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \cdot (-4) - 6 = -10$$

$$x+7 > 5-x > 0$$

$$-1 - 4\sqrt{2} + 7 > 5 + 1 + 4\sqrt{2} \quad \ominus$$

$$x = \frac{-1 - 3\sqrt{15}}{2}; \quad x+7 < 5-x < 0$$

$$-1 - 3\sqrt{15} + 14 < 10 + 1 + 3\sqrt{15} \quad \oplus$$

ответ: $\left(\frac{-1 - 3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right), \left(-1 - 3\sqrt{7}; 35; 0\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3x^2} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \quad (1)$$

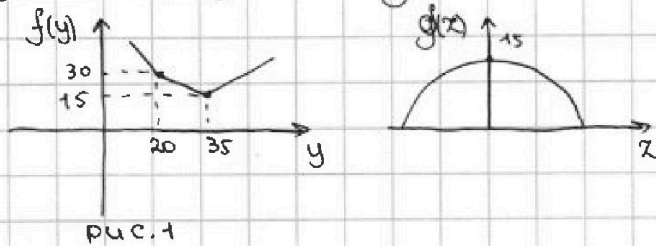
$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-x^2} \quad (2)$$

(2): пусть $|y-20| + 2|y-35| = f(x)$
 $\sqrt{225-x^2} = g(x)$

$f(y)$ - это график, состоящий из "кусочков" прямых, т.е. получается ломаная.

Точки перегиба этой ломаной при $y=20$ и $y=35$ при этом $f(20)=30$, $f(35)=15$ (см. рис. 1)

~~$g(x)$~~ $g(x)$ - у этого графика есть ОДЗ: $x \in [-15; 15]$
 $g(-15)=0$, $g(15)=0$, $g(0)=15$ (см. рис. 2)



тогда $f(y) \geq 15$
 $g(x) \leq 15$ - отсюда получим, что ур-е (2) имеет только одно реш. при $y=35$, $x=0$.

$y=35$, $x=0$ - подставим эти значения в (1):

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}; \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

- неравенство $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ переход, проверка корней

$$x+7 - 2\sqrt{35-2x-x^2} + 5-x = 4(\sqrt{35-2x-x^2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

пусть $\sqrt{35-2x-x^2} = t$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 5^2 \quad \text{тогда } t_1 = \frac{11+5}{2 \cdot 2} = 4, \quad t_2 = \frac{11-5}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1): \sqrt[3]{4(p-2)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}(p-2) \leq \frac{1}{8}$$

$$p-2 \leq \frac{1}{2}$$

$$p \leq \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$$

$$p \leq 4$$

$$(2): \sqrt[3]{4(p-2)} \geq -1 + \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)} \geq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4}(p-2) \geq -\frac{27}{8}$$

$$p-2 \geq -\frac{27}{2}$$

$$p \geq -10$$

Итого: $\begin{cases} p \leq 4 \\ p \geq -10 \end{cases} \Rightarrow p \in [-10; 4]$

$$\cos x = t \Rightarrow x = \pm \arccos(t) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ответ: $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(p-2)}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, p \in [-10; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4(\cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x) = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p - 3$$

$$\text{пусть } \cos x = t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 + \frac{1}{2} + 3 = p$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = p - \frac{7}{2}$$

$$\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$\sqrt[3]{4t} = \frac{2}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{4 \cdot 16}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{4^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$t = \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$\text{отсюда } \begin{cases} \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)} \leq 1 & (1) \\ \frac{2}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(p - \frac{7}{2}\right)} \geq -1 & (2) \end{cases}$$



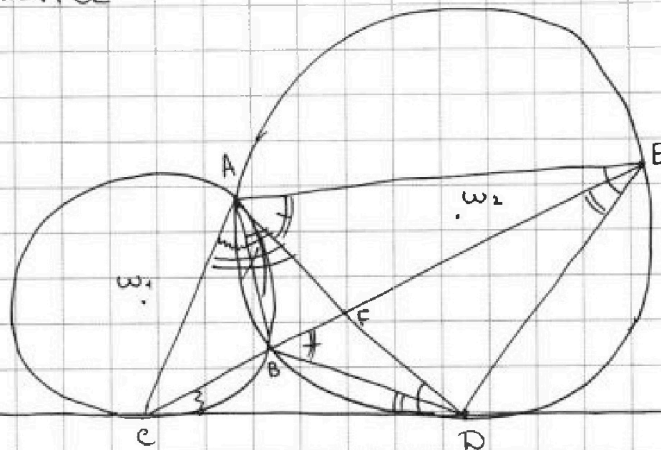
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$CF:FE=9:25$, $AD \cap CE = F$
 $ED:CD=?$



1. проведем AB и BD
2. $\angle ADE = \angle CDB = \angle BED$ (углы между касат. и хорд.)
 $\angle BAD = \angle BED$ (опир. на $\cup BD$)
3. $\angle DCE = \angle CAB$ (углы между касат. и хорд.)
4. $\angle DCE + \angle CDB = \angle DBE$ (внеш. уг. $\triangle CBD$)
 $\angle DBE = \angle DAE$ (опир. на $\cup DE$)
5. Получим, что $\angle CAB + \angle BAD = \angle DBE = \angle DAE \Rightarrow AF = FC$.
 $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$ (по свойству бис.)

6. $\angle CAD = \angle DAE$, $\angle CDA = \angle DEA$ (углы между касат. и хорд.)
 $\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$ (по 2-ум уг.) $\Rightarrow \frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD = \sqrt{CA \cdot AE}$

пусть $AC = 9x$, $AE = 25x \Rightarrow AD = \sqrt{9 \cdot 25x} = 15x$

7. из подобия $\triangle CAD$ и $\triangle DAE$: $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{15x}{25x} = \frac{3}{5} = \frac{CD}{DE}$

т.е. $\frac{DE}{CD} = \frac{5}{3}$

ответ: $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но также нужно учесть, что есть точки, симметричные отн. Ox, Oy и $z. O$ - одновременно. Эти кол-во этих точек (способов такой раскраски) мы учли 3 раза.

такие точки $(x; y) \rightarrow \begin{matrix} (-x; y) \\ (x; -y) \\ (-x; -y) \end{matrix}$ - обладают следующей симметрией
каждый $x > 0, y > 0$, тогда кол-во способов выбрать такие точки $C_{150 \cdot 200}^2 = C_{7500}^2$

Итого: $3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$

ответ: $3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$



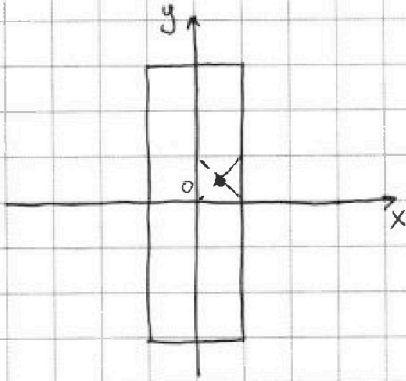
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем „исследуемый“ прямоугольник. Пусть его центр находится в начале координат. (см. рис.)
центр (0,0).



тогда симметричное отображение — это отражение отн. осей Ox , Oy и центра.

~~точки, отн. пусть центр~~

пусть точка пересечения диагоналей квадрата клетки — это координата этой клетки.

(между клеточкой и этой точкой можно установить взаимнооднозначное соответствие)

↗ Симметричное отображение: отн. Ox : $(x; y) \rightarrow (x; -y)$
отн. Oy : $(-x; y) \rightarrow (x; y)$
отн. $ц.О$: $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

тогда кол-во раскрасок будет „эквивалентно“ выбору точек отн. Ox , Oy , $ц.О$.

отн. Ox : пусть выберем 4 точки, где $x \in (-\infty; +\infty)$, $y > 0$

тогда кол-во раскрасок ~~C_{15000}^4~~ $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

аналогично отн. Oy : 4 выберем 4 точки, где

$x > 0$, $y \in (-\infty; +\infty)$ тогда кол-во раскрасок $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

аналогично отн. $ц.О$: 4 выберем точки, где

$x \in (-\infty; +\infty)$, $y > 0 \Rightarrow$ кол-во раскрасок $C_{15000}^4 = C_{15000}^4$

Итого: $3 C_{15000}^4$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть p - простое число
 $(a-c)(b-c) = p^2$; по опр. простого числа, p кратно самому себе и 1.

отсюда

$$\begin{cases} a-c=1 & (1) \\ b-c=p^2 & (1) \end{cases} \text{ по усл. } a > b, \text{ поэтому ситуа-} \\ \begin{cases} a-c=p^2 & (2) \\ b-c=1 & (2) \end{cases} \text{ ции (1) и (2) невозможны.} \\ \begin{cases} a-c=-1 & (3) \\ b-c=-p^2 & (3) \end{cases} \text{ поэтому получим:} \\ \begin{cases} a-c=-p^2 & (4) \\ b-c=-1 & (4) \end{cases} \begin{cases} a-c=p^2 & (*) \\ b-c=1 & (*) \end{cases} \\ \begin{cases} a-c=p^2 & (**) \\ b-c=-1 & (**) \end{cases}$$

где (*): $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow a-b = (p-1)(p+1)$ по усл. $a \not\equiv b \pmod{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (p-1)(p+1) \not\equiv 0 \pmod{3}$, но из 3-ех подряд идущих чисел одно $\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{3}$ (т.к. p - простое и $p \not\equiv 3 \pmod{3}$, то $p=3$)

тогда $a-b = 3^2 - 1 = 8$

по усл. $a+b^2 = 820 \Rightarrow \begin{cases} a-b=8 \Rightarrow a=b+8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$

$b^2 + b - 812 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 28 \Rightarrow a_1 = 36, c_1 = 287 \\ b_2 = -29 \Rightarrow a_2 = -21, c_2 = -28, -30 \end{cases}$

где (**): аналогично получаем, что $p \equiv 3$

тогда $\begin{cases} a-b=8 \Rightarrow a=b+8 \\ a+b^2=820 \Rightarrow b^2+b=812 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 28 \Rightarrow a_3 = 36, c_3 = 36+1=37 \\ b_4 = -29 \Rightarrow a_4 = -21, c_4 = -29+1=-28 \end{cases}$

ответ: ~~$(36; 28; 28)$~~
 ~~$(-21; -29; -28)$~~ ~~$(-21; -29; -30)$~~
 $(36; 28; 37)$
 $(-21; -29; -28)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

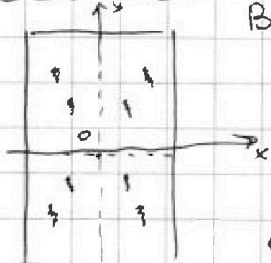


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем прямоугольник клетки (центр клетки)



Выбрать 4 квадратика с одной плоскости (Ox)

$$C_{150 \cdot 200}^4$$

аналогично с другой (Oy)

$$C_{150 \cdot 200}^4$$

отн. центральной сим. $C_{150 \cdot 200}^4$

симметрия

отн. x: $(x; y) \rightarrow (x; -y)$

отн. y: $(x; y) \rightarrow (-x; y)$

отн. O: $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

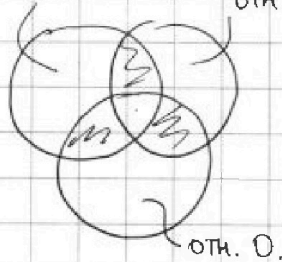
Итого: $C_{150 \cdot 200}^4$

$C_{150 \cdot 200}^4 \rightarrow \frac{1}{4}$ повтор.

Т. о сим. отн. x, y, O: $C_{150 \cdot 200}^2$

отн. Ox

отн. Oy



$(a-c)(b-c) = p^2$, p - прост. чис.

по опр. p: p кратно себе и 1

$p=1$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

(1): $a-b=$

$a-b=$

$b-a = (p^2-1) = (p-1)(p+1)$

$150 \cdot 50$

$\begin{cases} a-c=p-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow a=b+8$

$a+1=c$

$\frac{828}{4} = 207$

$\begin{matrix} 150 & \cdot & 50 \\ \hline 7500 & & \end{matrix}$

$a-b=p^2-1$ $b-8+b^2=820$

$b-1=c$

$b^2+b-820=0$

-29

$b=57^2$

$b^2+b-828=0$

аналогично

$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$ - отриц. чис.

$D=1+4 \cdot 828=$

$820-8=812$

$a_1=b+8=28+8=$

$D=57^2$

$b_1 = \frac{-1+57}{2} = 28$

$\begin{matrix} 24 & \cdot & 57 \\ \hline 1368 & & \end{matrix}$

$\begin{matrix} 34 & \cdot & 57 \\ \hline 1938 & & \end{matrix}$

$a = -29+8 = -21$

$b_2 = \frac{-1-57}{2} = -29$

$\begin{matrix} 399 & \cdot & 57 \\ \hline 22743 & & \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2850 & \cdot & 57 \\ \hline 162450 & & \end{matrix}$

$b+1=c$

$b+1=c$

$28+1$

$-29+1$

$\begin{matrix} 28 & \cdot & 57 \\ \hline 1596 & & \end{matrix}$

$\begin{matrix} 29 & \cdot & 57 \\ \hline 1653 & & \end{matrix}$

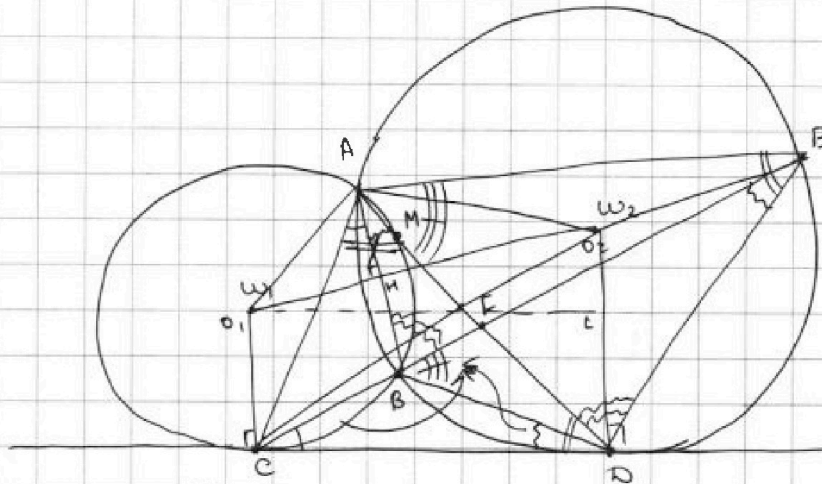
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$ ED:CD - найти

AB \perp O₁O₂
 $CD^2 = DM \cdot DA$
 $DC^2 = CB \cdot CE$ } касат. и хорда
 и секущ.

~~AF = FD~~
~~CF = FE~~

$\triangle CO_2D$ и $\triangle O_1CD$ -
 прямоугольн.

O₁C \perp CD
 O₂D \perp CD - касат.

$\triangle O_1AH$ и $\triangle AHQ_2$ -
 прямоугольн.

$CD^2 = DM \cdot DA$ $\begin{cases} CD^2 = CB \cdot CE \\ CF:FE = 9:25 \\ CE = CF + FE \end{cases}$

проведем BD (ABD - описанн. угол CDA)

$\angle CDA = \angle BED = \angle BAD$ (касат. и хорда, опис. на одн. дуге)

$\angle EAD = \angle EBD$ ($\angle EBD = \angle FCD + \angle BDC$)

AF - секущ. $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$

Итого: $\begin{cases} \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25} \\ CD^2 = CB \cdot CE \\ CE = CF + FE \end{cases}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{9}{25}$

$CD^2 = CB \cdot CE$
 $CE = CF + FE$

$\frac{ED}{AB} = \frac{FD}{BF}$

$FD \cdot AF = BF \cdot FE$

$\triangle BFD \sim \triangle FAE$ $\begin{cases} \triangle BFD \sim \triangle AFE \\ \triangle BFA \sim \triangle DFE \end{cases}$

$\angle CAD = \angle DAE$ и $\angle CDA = \angle AED \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$

$\angle DBE = \angle BCD + \angle CDB$ (внешн. уг.) $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD = \sqrt{AE \cdot AC}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{\sqrt{AE \cdot AC}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{139}{12} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{138}{12} \cdot \frac{1}{68}$$

$$69 = 21 \cdot 3 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\times \frac{67}{2} \quad \frac{134}{134} + 4 = 138$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(\sqrt[3]{4t})^3 - 3 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{4t})^2 + 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{4t} + x^3 - x + 3 = p$$

$$b = 3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{16}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 3 = 3$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \sqrt[3]{4^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{16}} = x$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 3 =$$

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = 4t - 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{16}} t^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{16}^2}$$

$$\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt[3]{4(p - \frac{7}{2})} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{27}{2} = \frac{7-27}{2} = \frac{20}{2} = -10$$

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{16}}$$

$$\sqrt[3]{4t} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}}$$

$$\sqrt[3]{4t} = \sqrt[3]{p - \frac{7}{2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{16}}$$

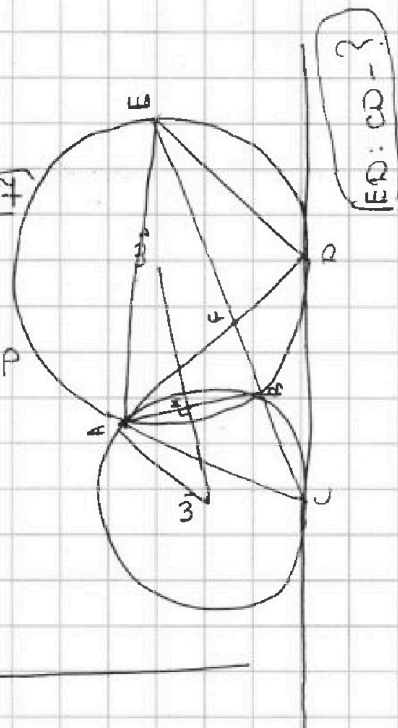
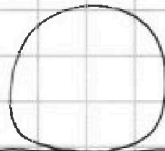
$$\sqrt[3]{\frac{4}{4}(p - \frac{7}{2})} + \frac{2}{\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{16}^2}} =$$

$$\frac{1}{4}p - \frac{7}{8} \sqrt{\frac{12p-7}{2}}$$

$$4t^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{16}} t^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{16}^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = p$$

$$4t^3 - 6t^2 +$$

$$c =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дано: реш. прог. $B_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, $B_{10} =$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}; \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 5 + x + 6 = 3$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 5 + x = 4\sqrt{(35-2x-x^2)^2} - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

пусть $\sqrt{(x+7)(5-x)} = t$

$$2x + 2 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$2t^2 - 11t + (17-x) = 0$$

$$4t^2 - 22t + 34 - 2x = 0 \quad | :2$$

$$D = 121 - 8(17-x) =$$

$$= 121 - 136 + 8x$$

$$8 \begin{array}{r} 48 \\ \times 2 \\ \hline 936 \end{array} \quad \begin{array}{r} 121 \\ - 86 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ + 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

$$\sqrt{x+7} - 2\sqrt{35-2x-x^2} + 5 - x = 4 \cdot (\sqrt{35-2x-x^2})^2 - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36$$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36; \quad 4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$$

$$t_1 = \frac{11+5}{4} = 4$$

$$t_2 = \frac{11-5}{4} = \frac{3}{2}$$

$$t_1 = 4: -x^2 - 2x + 35 = 4$$

$$x^2 + 2x - 35 = -4$$

$$x^2 + 2x - 35 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 31 = 0$$

$$D_4 = 1 + 31 = 32$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 56 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$t_2 = \frac{3}{2}: -x^2 - 2x + 35 = 4 \quad \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 2x - 35 + 2 = 0 \quad | \times 2$$

$$2x^2 + 4x - 70 + 3 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 67 = 0$$

$$D_4 =$$

$$\frac{70}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1) \quad x, y, z - ?$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x-3z \geq 0 \\ y-2x-x^2+z \geq 0 \\ 225-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2): |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{(15-z)(15+z)}$$

$$\updownarrow$$

$$z \neq y \neq 0$$

$$(|y-20| + 2|y-35|)^2 = (\sqrt{(15-z)(15+z)})^2$$

$$(y-20)^2 + 4|y-20| \cdot |y-35| + 4(y-35)^2 = (15-z)(15+z)$$

пусть $225-z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm 15$

$$|y-20| + 2|y-35| = 0$$

$$\begin{cases} y-20 \geq 0 \\ y-35 \geq 0 \end{cases}$$

$$y-20+2y-70=0$$

$$\begin{cases} 3y-90=0 \\ y=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-20 \geq 0 \\ y-35 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-20) - 2y + 70 = 0 \\ -y + 50 = 0 \end{cases}$$

$$y=20$$

$$\begin{cases} y-20 < 0 \\ y-35 \geq 0 \end{cases}$$

$$20-y+2y-70=0$$

$$y=50$$

$$\begin{cases} y-20 < 0 \\ y-35 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20-y-2y+70=0 \\ -3y+90=0 \\ y=30 \end{cases}$$

$$(x; 30+15), (x; 50 \pm 15)$$

$$(5-x)(x+7) = 5x+35-x^2-7x$$

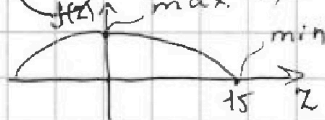
$$\begin{aligned} x^2-7x+5x+35 \\ x^2-2x+35 \end{aligned}$$

неограниченно

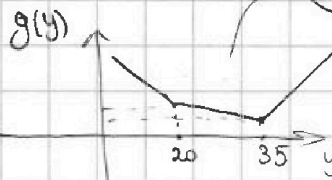
при $y=20: 0+2 \cdot 15=30$

$y=35: |35-20| + 2 \cdot 0 = 15$, $0 \leq z \leq 15$

$$f(z) = \sqrt{225-z^2}$$



$$g(y) = |y-20| + 2|y-35|$$



найти x.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(1): \underbrace{\sqrt{x+7}}_a - \underbrace{\sqrt{5-x}}_b + 6 = 2 \underbrace{\sqrt{35-2x-x^2}}_{a \cdot b}$$

$$(a+b) - b(2a+1) = 0$$

$$a-b+6 = 2ab; (a-2ab-b) = -6$$

$$a-b+6 = 2ab; a-2ab-b+6 = 0 \quad a(1-2b) + (6-b) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}^3}$, $b_{10} = x+4$, $b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$ OP3: $(15x+6)(x-3) > 0$
 $x+4 > 0$

по опр.: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
 тогда $\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} \\ b_{10} = b_1 \cdot q^{10-1} \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{12-1} \end{cases}$

$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 \\ b_{10} = b_1 \cdot q^9 \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \end{cases}$

$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 \\ b_{10} = b_1 \cdot q^9 \\ b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \end{cases}$

если /
проп.

$b_{12} \cdot b_4 = b_{10}^2$

$\frac{b_{12}^3}{b_{10}^3} = \frac{b_{10}^3}{b_4^3}$

$\begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^6 \end{cases}$

возведем в ст. 3

$\begin{cases} \frac{b_{12}}{b_{10}} = q^{11-9} = 2 \\ \frac{b_{10}}{b_4} = q^{9-3} = 6 \end{cases}$

$\left(\frac{b_{12}}{b_{10}}\right)^3 = \frac{b_{10}}{b_4} \Rightarrow b_{12}^3 \cdot b_4 = b_{10}^4$
 $\sqrt[3]{\frac{(15x+6)(15x+6)^3(x-3)^3}{(x-3)^3}} = (x+4)^4$

$\sqrt[2]{(15x+6)^4} = (x+4)^4 \rightarrow (15x+6)^2 = (x+4)^4$

~~$(15x+6)^4 = (x+4)^8$~~

~~$(x+4)^8 - (15x+6)^4 = 0$~~

~~$((x+4)^4 - (15x+6)^2)((x+4)^4 + (15x+6)^2) = 0$~~

① $x^2 + 8x + 16 - 15x - 6 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$D = 49 - 40 = 9$

$x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$

$x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$

② $x^2 + 19x + 22 = 0$

$x^2 + 19x + 22 = 0$

$D = 19^2 - 4 \cdot 22 = 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$

$x^2 + 8x + 16 + 15x + 6 = 0$

$x^2 + 23x + 22 = 0$

$D = 23^2 - 4 \cdot 22 = 529 - 88 = 21^2$

$x_1 = \frac{-23+21}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-23-21}{2} = -22$

Итого: $x = 5$ $x_2 = \frac{13}{2}$
 $x = 2$ $x = \frac{-29}{2}$

007
если
проп.

8
19
19
+17+
+19.0.
-36+
-88
27 3 13
22 91
3
9 12
15