



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b_1 - первый член прогрессии, q - шаг
Тогда

$$b_{10} = b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$b_{12} = b_1 q^{11} = 2-x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^3}} = b_1 q^{17}$$

ОДЗ: $(25x+34)(3x+2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup [-\frac{2}{3}; +\infty)$

При $x = -\frac{34}{25}$ $b_{10} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Rightarrow b_{12} = 2 + \frac{34}{25} = \frac{84}{25} \neq 0$ - неверно
 $\Rightarrow x \neq -\frac{34}{25}$

Аналогично, $x \neq -\frac{2}{3}$
 \Rightarrow ОДЗ = $(-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$

$$\frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^4 (25x+34)}} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$\Rightarrow 2-x = \sqrt{(25x+34) \frac{3x+2}{3x+2}} \geq 0 \Rightarrow x < 2$$

① $2 > x > -\frac{2}{3}$ $2-x = \sqrt{25x+34}$
 $x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$
 $x^2 - 29x - 30 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-30) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin \text{ОДЗ} \\ x = 30 \notin \text{ОДЗ} \end{cases}$

② $x < -\frac{2}{3} < 2 \Rightarrow x < -\frac{34}{25}$
 $2-x = \sqrt{-(25x+34)}$
 $x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$
 $x^2 + 21x + 38 = 0 \Rightarrow (x+19)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$

Ответ: $\{-19; -2\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ y-3x-x^2+z \geq 0 \\ |z| \leq 20 \Rightarrow 0 \leq z^2 \leq 400 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{400-z^2} \leq 20 \end{cases}$$

① $y \leq -2$

$$\begin{aligned} -(y+2) - 2(y-18) &= \sqrt{400-z^2} \\ -3y+34 &= \sqrt{400-z^2} \Rightarrow 0 \leq 34-3y \leq 20 \\ \Rightarrow 14 \leq 3y \leq 34 &\Rightarrow y^2-2 \leq 4\frac{2}{3} \leq y \leq 11\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$y \leq -2 < 4\frac{2}{3} \leq y \Rightarrow (x, y, z) \in \emptyset$

② $-2 < y < 18$

$$\begin{aligned} (y+2) - 2(y-18) &= \sqrt{400-z^2} \\ -y+38 &= \sqrt{400-z^2} \Rightarrow 0 \leq 38-y \leq 20 \\ \Rightarrow 18 \leq y \leq 38 \end{aligned}$$

$y < 18 \leq y \Rightarrow (x, y, z) \in \emptyset$

③ $y \geq 18$

$$\begin{aligned} 3y-34 &= \sqrt{400-z^2} \\ y \geq 18 \Rightarrow 3y &\geq 54 \Rightarrow 3y-34 \geq 20 \geq \sqrt{400-z^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y-34 = \sqrt{400-z^2} \leq 20 \Rightarrow y=18, z=0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

ОДЗ: $-6 \leq x \leq 3$

$$(x+6) + (3-x) - 2\sqrt{18-3x-x^2} = 4(x+6)(3-x) + 4(18-3x-x^2) + 49 - 28\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$t = \sqrt{18-3x-x^2} \geq 0$$

$$9 - 2t = 4t^2 + 49 - 28t \Rightarrow 4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 160 = 9 \Rightarrow t = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{18-3x-x^2} = 4 & \begin{cases} x^2+3x-2=0 & x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ 4x^2+12x-49=0 & x = \frac{-6 \pm \sqrt{224}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2} \end{cases} \\ t = \sqrt{18-3x-x^2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right), \left(\frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}; 18; 0 \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$t = \cos x$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$a = \sqrt[3]{p-1}$$

$$a^3 t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(at + t + 1)(a^2 t^2 - at(t+1) + (t+1)^2) = 0$$

$$\begin{cases} at + t + 1 = 0 \\ a^2 t^2 - at^2 - at + t^2 + 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{a+1} = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \quad (1) \\ t^2(a^2 - a + 1) + (2-a)t + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad (2) \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$$

$$\text{При } p \leq -7 \quad \sqrt[3]{p-1}+1 \leq -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 1$$

$$\text{При } p \geq 1 \quad \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 0$$

$$(2) \quad (a^2 - a + 1)t^2 + (2-a)t + 1 = 0$$

$$D = a^2 - 4a + 4 - 4a^2 + 4a - 4 = -3a^2 \leq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow p = 1$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = t = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \Rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n$$

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$500 \cdot 120 = 60000$$

Для каждого из трёх данных видов симметрии при закрашивании одной клетки всегда необходимо закрасить симметричную

Всего способов закрасить 2 клетки - 30000

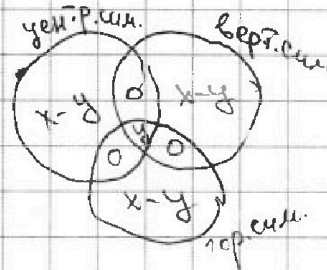
Способов закрасить 8 клеток: $\frac{30000!}{4! \cdot 29996!} = x$

При использовании двух видов симметрии одновременно при закрашивании одной клетки необходимо закрасить ещё три. Таким образом, каждая данная раскраска будет соответствовать сразу трём видам симметрии

Всего способов закрасить 4 клетки таким образом: 15000

Способов закрасить 6 клеток: $\frac{15000!}{2! \cdot 14998!} = y$

~~Всего возможных способов~~



Всего возможных способов $3(x-y) + y$

$$3 \cdot \frac{30000!}{4! \cdot 29996!} - 2 \cdot \frac{15000!}{2! \cdot 14998!} = \frac{30000!}{8 \cdot 29996!} - \frac{15000!}{14998!}$$

Ответ: $\frac{30000!}{8 \cdot 29996!} - \frac{15000!}{14998!}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a \leq b \\ (b-a) \div 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 1000 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{При } |a| = 32 \quad b = -24$$

$$\text{При } |a| = 31 \quad b = 39$$

$$\Rightarrow -31 \leq a \leq 31$$

$$39 \leq b \leq 1000$$

Рассмотрим второе условие $(b-a) \div 3$

$$1) \quad a = 3x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$b = 1000 - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a = 1000 - 9x^2 - 3x \div 3$$

$$2) \quad a = 3x+1, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$b = 999 - 6x - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a = 998 - 9x - 9x^2 \div 3$$

$$3) \quad a = 3x+2, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$b = 996 - 12x - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a = 994 - 15x - 9x^2 \div 3$$

$$\Rightarrow (b-a) \div 3 \text{ всегда}$$

Рассмотрим третье условие $(a-c)(b-c) = p^2$

$$1) \quad a-c = b-c = \pm p$$

$$\Rightarrow a = b - \text{неверно}$$

$$2) \quad \begin{cases} b-c=1 & \Rightarrow c=b-1 \\ a-c=p^2 & \Rightarrow p^2=a-b+1 \end{cases}$$

$$a < b \Rightarrow a-b+1 < 1 \Rightarrow p^2 < 1 - \text{неверно}$$

$$3) \quad \begin{cases} a-c=-1 & \Rightarrow c=a+1 \\ b-c=-p^2 & \Rightarrow p^2=a-b+1 - \text{неверно} \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} b-c=p^2 \\ a-c=1 & \Rightarrow c=a-1 \Rightarrow p^2=b-a+1=1001-a-a^2 \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} b-c=-1 & \Rightarrow c=b+1 \Rightarrow p^2=b-a+1=1001-a-a^2 \\ a-c=-p^2 \end{cases}$$

Таким образом, такие числа существуют, если:

$$\begin{cases} -31 \leq a \leq 31 \\ b = 1000 - a^2 \\ p^2 = 1001 - a - a^2 \\ \begin{cases} c = a-1 \\ c = b+1 \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим $p^2 = 1001 - a - a^2$, p - простое

$$a^2 + a + (p^2 - 1001) = 0$$

$$D = 1 - 4(p^2 - 1001) = 4005 - 4p^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 1001 \frac{1}{4} \Rightarrow p \leq 31$$

$$p = 2 \Rightarrow D = 3989 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3989}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 3 \Rightarrow D = 4005 - 36 = 3969 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3969}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 5 \Rightarrow D = 4005 - 100 = 3905 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3905}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 7 \Rightarrow D = 4005 - 196 = 3809 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3809}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 11 \Rightarrow D = 4005 - 484 = 3521 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3521}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 13 \Rightarrow D = 4005 - 676 = 3329 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3329}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 17 \Rightarrow D = 4005 - 1156 = 2849 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{2849}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 19 \Rightarrow D = 4005 - 1444 = 2561 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{2561}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 23 \Rightarrow D = 4005 - 2116 = 1889 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1889}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 29 \Rightarrow D = 4005 - 3364 = 641 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{641}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$p = 31 \Rightarrow D = 4005 - 3844 = 161 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

\Rightarrow таких троек чисел нет

ответ: решений нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $(a, b, c) \in (\mathbb{Z})$:

$$\begin{cases} a < b \checkmark \\ (b-a) \div 3 \checkmark \\ (a-c)(b-c) = p^2 \text{ (p-нр.)} \\ a^2 + b = 1000 \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4005 \\ 3364 \\ \hline 671 \end{array} \quad \begin{array}{r} 961 \\ 4 \\ \hline 3844 \\ 67 \end{array}$$

$$s = \sqrt{\frac{30}{2} \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{4} = 104$$

$$\begin{array}{r} 4005 \\ 3844 \\ \hline 1612 \end{array} \quad \begin{array}{r} 261 \\ 29 \\ \hline 841 \\ 4 \\ \hline 3364 \end{array}$$

$$a = \frac{4}{3}$$

~~$a-c=1, b-c=p^2$~~
 $p \cdot p^2 \cdot a = a + 1 < b \Rightarrow p^2 > 1 \checkmark$

- 4 2-4
- 9 3-9 $1000 = 1+999 = 4+996 = 9+991 = 16+984 = 25+975 = 36+964 = 49+955 =$
- 16 5-25 $= 64+936 = 81+919 = 100+900 = 121+879 = 144+856 = 169+831 = 196+804 =$
- 25 7-49 $= 225+775 = 256+744 = 289+711 = 324+676 = 361+639 = 400+600 =$
- 36 11-121 $= 441+559 = 484+516 = 529+471 = 576+424 = 625+375 = 676+324 =$
- 49 13-169 $= 729+271 = 784+216 = 841+159 = 900+100 = 961+39 = 1024-24$
- 64 17-289 $a < 32$

81 19-361 $\rightarrow 31 \leq a \leq 31, b \geq 39$ $1849 \quad 39 \pm 31 \div 3$ $59^2 = 3606 - 120$

100 23-529 $b-a \geq 8$ $43 \quad 100 \pm 30 \div 3$ $57 \quad 53$

121 29-841 $43 \quad 159 \pm 29 \div 3$ $57 \quad 53$

144 31-961 $a = 3x + 1 \div 3$ $1729 \quad 216 \pm 28 \div 3$ $399 \quad 159$

169 $\Rightarrow b = 1000 - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a \div 3$ $285 \quad 265$

34 $a = 3x + 1 \div 3$

34 $\Rightarrow b = 999 - 6x - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a \div 3$ $51^2 = 2501 + 100$

136 $a = 3x + 2 \div 3$

102 $\Rightarrow b = 996 - 12x - 9x^2 \div 3 \Rightarrow b-a \div 3$

1156

1444 $\begin{cases} -31 \leq a \leq 31 \\ 39 \leq b \leq 1000 \end{cases}$ $c^2 - (a+b)c + ab - p^2 = 0$

46 $D = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4p^2 = (b-a)^2 + 4p^2 > 0$

46 $c = \frac{a+b \pm \sqrt{D}}{2}$ $a^2 + a - 1000 = -p^2$

276 3521 $-1000 \div 4$

184 3329 1839

2116 2849

$\begin{cases} c = a - 1 \\ c = b + 1 \\ p^2 = b - a + 1 \end{cases}$ ~~$a = b + 1$~~ $a_n = a_{n-1} + 1$

$b-a = 1000, 998, 998, 994, 994, 988, 988$

$1000 = a_n^2 + b_n \quad b_n = 1000 - a_n^2 - 2b_{n-1} + 1 = b_{n-1} - 2a_{n-1} - 1$

$b_n + a_n = b_{n-1} - a_{n-1}$

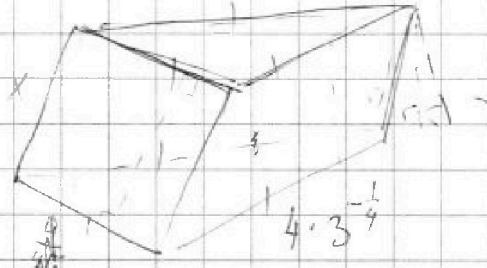
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S = xy/2$

$S = \frac{1}{2} a b$

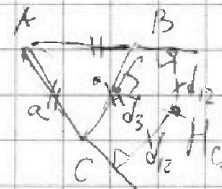
$$S = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = a b$$

$$S_1 = S_2 = 6$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{6 \sqrt{3}}{4} = 1,5 \sqrt{3}$$

$$d = \sqrt{\frac{9}{4} + 3} = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$



$$H = \sqrt{\frac{36}{a^2} - d_2^2} = \sqrt{\frac{25}{a^2} - d_3^2}$$

$$h_1 = \frac{6}{a} = h_2$$

$$h_3 = \frac{5}{a}$$

$$\frac{11}{a^2} = d_2^2 - d_3^2$$

W

$$\begin{cases} a < b \\ (b-a)/3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$

1) $b > a > c$

1.1) $a-c = b-c = p$

$a = b - \text{неверно}$

1.2) $a-c = p^2$

$b-c = p^2 + 1$

$-32 \leq c = b-1 \leq 30$

$p^2 = a - b + 1 < 0 - \text{неверно}$

$p^2 = b - a + 1$

1.3) $p^2 = b - a + 1$

$c = a - 1$

$a^2 + a + (p^2 - 1001) = 0$

$D = 1 - 4p^2 + 4004 =$

$= 4005 - 4p^2$

$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2}$

$-31 \leq a \leq 31$

$39 \leq b \leq 1000$

2) $c > b > a$

1.1) $a-c = b-c = p^2 - \text{неверно}$ $|p| \leq 1001$

1.2) $a-c = p^2$

$b-c = p^2 + 1$

$c - a = 1$

$c - b = p^2$

$p^2 = a + b + 1 < 0 - \text{неверно}$

1.3) $b-c = p^2$

$c - a = p^2$

$c - b = 1$

$c = b + 1 \Rightarrow p^2 = b - a + 1$

$D = 1 - 4p^2 + 4005 - 4p^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 1001 \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

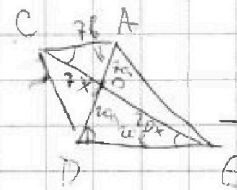
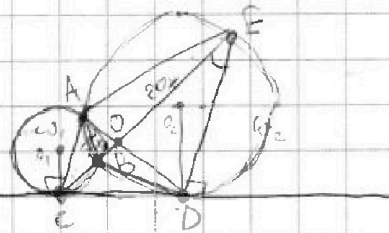
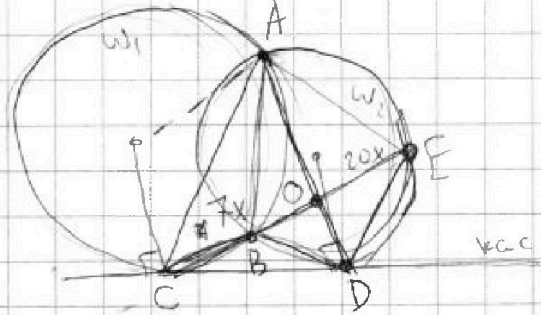
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $\frac{ED}{CO} = ?$

$\omega_1 < \omega_2$

~~$\frac{CO}{OE} = \frac{7}{20}$~~



$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2r_1$ $\frac{AE}{\sin \alpha} = 2r_2$

$\frac{AC}{r_1} = \frac{AE}{r_2}$ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{AE}$

Плюс AB ACDE - трапеция

~~ABDO~~

~~$\angle BED = \angle ADC - \angle AEC$
 $\angle ACE = \angle ACD - \angle ECD$
 $\angle ADC + \angle ECD = \angle AEC + \angle ACD$
 $180^\circ - \angle D = \angle D$~~

Тогда $\frac{CO}{OE} = \frac{AO}{OD} = \frac{AC}{DE} = \frac{7}{20}$

$\frac{AB}{\sin \beta} = 2r_1$

$\frac{BD}{\sin \gamma} = 2r_2$

$\frac{AB \cdot AE}{\sin \beta} = \frac{AC \cdot BD}{\sin \gamma}$

$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{r_1}$

$\frac{AB}{\sin \gamma} = 2r_2$

$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AC}{\sin \gamma} = \frac{AE}{\sin \beta} \sqrt{\text{окр.}}$

$CO^2 = 49x^2 + 400a^2 - 280ax \cos \alpha$

$400b^2 = 400a^2 + 400x^2 + 400ax \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + x^2 + ax \cos \alpha$

$280ax \cos \alpha = 400b^2 - 400a^2 - 400x^2$

$CO^2 = -280b^2 + 600a^2 + 329x^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) 500×120

① укр. сим.

| | |
|---|----|
| 1 | 7 |
| 2 | 8 |
| 3 | 9 |
| 4 | 10 |
| 5 | 11 |
| 6 | 12 |

$$\frac{500 \cdot 120}{2} = 30000$$

$$\frac{30000 \cdot 29999 \cdot 29998 \cdot 29997}{24}$$

$$\frac{ab}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 495$$

$$500 \times 120 = \left(\frac{500 \cdot 120}{2}\right) \left(\frac{500}{100}\right)$$

$$\frac{30000!}{4! \cdot 29996!} = X$$

②

| | | | |
|---|----|---|---|
| 1 | 7 | 0 | 0 |
| 2 | 8 | | |
| 3 | 9 | 0 | |
| 4 | 10 | | |
| 5 | 11 | 0 | 0 |
| 6 | 12 | | |

$$\frac{30000!}{4! \cdot 29996!}$$

③ Тот же

3x -

| | |
|---|----|
| 1 | 7 |
| 2 | 8 |
| 3 | 9 |
| 4 | 10 |
| 5 | 11 |
| 6 | 12 |

$$\frac{15000 \cdot 14999}{2} = y$$

$$\frac{15000!}{2! \cdot 14998!} = y$$

④

$$\frac{15000 \cdot 14999 \cdot 29999 \cdot 29998 \cdot 29997}{2}$$

$$\frac{29999 \cdot 29998}{2} - 1$$

$$15000 \cdot 14999 \cdot$$

$$\left(\frac{29999 \cdot 29998}{2} - 1 \right)$$

$$3(x - y) + y = 3x - 2y = \frac{3 \cdot 30000!}{4! \cdot 29996!} - \frac{15000!}{14998!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x \in \mathbb{R}$

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$b_{12} = x + 2 \cdot 2 - x$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b_{10} = b_{10}^9$$

$$b_{12} = b_{12}^9$$

$$b_{18} = b_{18}^9$$

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad \wedge \quad q^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

ОДЗ: $\frac{11}{25} > 0$ $\frac{11}{3} > 0$
 $x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

$$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} = \frac{18}{10}$$

② $2-x = \sqrt{25x+34} \Rightarrow -2\frac{25}{3}x < 2$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$95 \cdot 5$$

$$475 + 34 =$$

$$= 509$$

$$-57 = 25 - 55$$

① $2-x = \sqrt{-(25x+34)}$

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+19)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x = -19$$

отв. $\{-19; -2\}$

2)
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -6 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ y-3x-x^2+z \geq 0 \\ -20 \leq z \leq 20 \end{cases}$

? $y \geq 18 : 3y - 34 = \sqrt{400 - z^2}$

$$3y - 34 \geq 20$$

$$\sqrt{400 - z^2} \leq 20 \Rightarrow 3y - 34 = \sqrt{400 - z^2} = 20$$

$$\Rightarrow y = 18, z = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x^2+3x-18=0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$(x+6)(x-3)=0$$

$$\text{отз. } -6 \leq x \leq 3$$

$$\begin{aligned} -84 &\leq 4 \\ -84 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$x+6+3-x-2\sqrt{(\quad)(\quad)} = 4(\quad)(\quad) + 49 - 28\sqrt{(\quad)(\quad)}$$

$$\sqrt{(\quad)(\quad)} = t \geq 0$$

$$188$$

$$p \leq -7$$

$$9 - 2t = 4t^2 + 49 - 28t$$

$$D = 36 + 4 \cdot 47 = 224$$

$$5 \leq -2$$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$84 \leq -1$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$0 \geq \frac{t}{2} \geq -1$$

$$D = 169 - 160 \Rightarrow t = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{p-1} + 1 = 1 \Rightarrow p = 1$$

$$\sqrt{16y+1} = -2$$

$$\begin{cases} 18-3x-x^2=16 \Rightarrow x^2+3x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ 18-3x-x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow 4x^2+12x-47=0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{224}}{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} -2 \leq y \leq 18$$

$$y+2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$38-y < 40$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq 20 \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} a \cdot b + 7 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} y \leq -2$$

$$-y-2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$40 \leq 34-3y \Rightarrow \emptyset$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 28ab + 49$$

$$\textcircled{3} p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \text{хотелось бы 1 перм}$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 3(p+3)t + 4 = 0 \quad 4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

$$\textcircled{1} p = 0$$

$$12t^2 + 9t + 4 = 0$$

$$D = 81 - 192 < 0 \Rightarrow t \in \emptyset$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\textcircled{2} p = 0$$

$$3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$D < 0 \Rightarrow t \in \emptyset$$

$$\textcircled{3} p \neq 0$$

$$\textcircled{2} p \neq 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(t+1 + (p-1)^{\frac{1}{3}}t) \left((t+1)^2 - (t+1)t(p-1)^{\frac{1}{3}} + t^2(p-1)^{\frac{2}{3}} \right) = 0$$

$$t = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \quad \text{или} \quad t^2 + 2t + 1 - t^2 \sqrt[3]{p-1} - t^2 \sqrt[3]{p-1} + t^2 \sqrt[3]{p-1} = 0$$

$$t^2(1 - \sqrt[3]{p-1} + \sqrt[3]{p-1}) + t(2 - \sqrt[3]{p-1}) + 1 = 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} = a \quad t^2(a^2 - a + 1) + t(2-a) + 1 = 0$$

$$D = a^2 - 4a + 4 - 4a^2 + 4a - 4 = -3a^2 \leq 0 \Rightarrow a = 0 (p=1) \Rightarrow t = -1$$