



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть q — знаменатель прогрессии

Тогда $q^8 \sqrt{uv} = \frac{\sqrt{|u|}}{\sqrt[4]{3}}$, где $u = 25x + 34$
 $v = 3x + 2$

Если $u \neq 0$, иначе 10-ый член = 0 и
всё прогрессирует с 0, в частности
 $2 - x = 0 \Leftrightarrow 2 = x \Rightarrow$ 10-ый член $\neq 0$

Значит $q^8 = \frac{\sqrt{|u|}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{|u|}}$

$q^2 \sqrt{uv} = 2 - x$

$\sqrt{\frac{|u|}{|v|}}$

два случая:
(всегда $v > 0$: из ОДЗ)

1) $v = 3x + 2 > 0$

$x > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{34}{35}$

$25x + 34 = u > 0$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < -\frac{2}{3}$, п.о.

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > \sqrt{849}$

$\frac{27 + \frac{4}{3}}{2} < 29 = \sqrt{849} < \sqrt{849}$

Следовательно рассматривать только значения $x < -\frac{2}{3}$

2) $v = 3x + 2 < 0$, но $\frac{uv}{|v|} > 0$

Значит $u < 0$ (такое невозможно потому $u \neq 0$)
 $x < -\frac{34}{25}$

$\sqrt{-u} = 2 - x$

$-u = 4 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 23x + 38 = 0$
 $-25x - 34$
 $x = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 38}}{2}$

$= \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2}$

$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$
 $23 - \frac{68}{25} > 20 = \sqrt{400} > \sqrt{377}$

рассмотрим

$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$

рассмотрим

$\frac{\sqrt{uv}}{|v|} = \frac{\sqrt{|u|}}{\sqrt[4]{3}} = 2 - x$

$u = (2 - x)^2 = 4 - 2x + x^2$
 $25x + 34 = 4 - 2x + x^2$

$x^2 - 27x - 30 = 0$

$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot (-30)}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2}$

$\frac{27 \pm \sqrt{849}}{2}$

ответ: $\frac{27 + \sqrt{849}}{2}$
 $\frac{-23 + \sqrt{377}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3] Используя формулы косинуса 3-го и 2-го углов, переписать данное равенство в следующем виде:

$$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + (12 \cos^2 x - 6) + (3p \cos x + \cos x) + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

Сокращая на 4 и делая замену $t = \cos x$, получим:

~~$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$~~

$$(p-1)t^3 + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$(p-1)t^3 = -(t+1)^3$$

$$\sqrt[3]{p-1}t = -t-1$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1$$

~~$$t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} = \cos x \in [-1; 1]$$~~

Если $1 + \sqrt[3]{p-1} = 0$, то $t \cdot 0 = -1$: противоречие

Значит $t = \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$, но $t = \cos x \in [-1; 1]$
 $t \neq 0$ (целая часть $t \neq 0$)

$$-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

при всех p из этого множества:

$$\cos x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$

~~$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow p \in [-8; 0]$$~~
~~$$p \neq -1$$~~
~~$$1 + \sqrt[3]{p-1} \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$~~
~~$$(p. r. 1 + \sqrt[3]{p-1} > 0)$$~~

$$\sqrt[3]{p-1} \in [-2; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p-1 \in [-8; 0] \setminus \{-1\}$$

$$p \in [-7; 1] \setminus \{0\}$$

ответ: $p \in [-7; 0) \cup (0; 1]$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

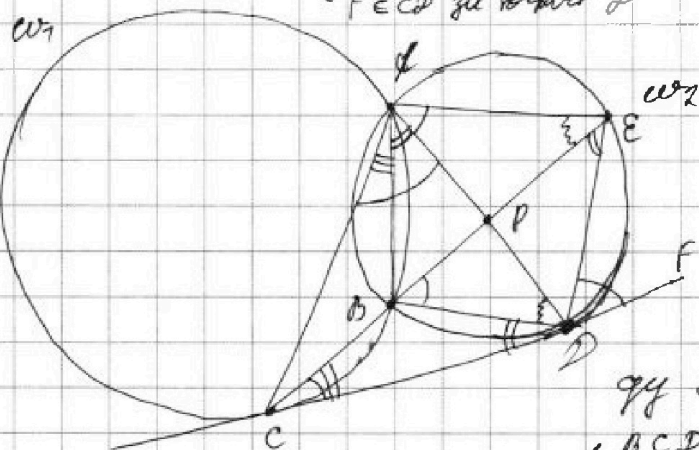
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



Пусть $P = CD \cap CE$
 $F \in CD$ за точку P

$$\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Давайте посчитаем углы:

По теореме об угле между хордой и касательной:

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \angle CFB \\ \angle BDC &= \angle BFD \\ \angle EDF &= \angle EFD \end{aligned}$$

Также как вписанные, опирающиеся на одну хорду,

равны: $\angle EFD = \angle EBD$
 $\angle FEB = \angle FDB$ и $\angle BFD = \angle BED$

Итак, $\angle EFD = \angle EBD = \angle CDP + \angle BDC = \angle CFB + \angle BFD$
 \parallel
 $\angle CFP$

и ещё, $\angle CPB = \angle BFD = \angle BED$
 $\angle BFD = \angle BEC$ } $\Rightarrow \angle CPF = \angle FED$

$\Rightarrow \triangle CFP \sim \triangle DFE$ (по двум углам)

$$\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{S_{CFP}}{S_{DFE}}}$$

Пусть $S_{CFP} = 7x$, тогда
 $S_{DFE} = 20x$, т.к. $\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$

Аналогично $S_{CFP} = 7y \Rightarrow S_{DFE} = 20y$

значит $\frac{S_{DFE}}{S_{CFP}} = \frac{S_{DFE} + S_{DFE}}{S_{CFP} + S_{DFE}} = \frac{20x + 20y}{7x + 7y} = \frac{20}{7}$

Итак, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

ответ! $\frac{2\sqrt{35}}{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Пусть P_V, P_H, P_C — множества всех раскрасок, обладающие вертикальной, горизонтальной и центральной симметриями соответственно

По формуле включений — исключаем:

$$|P_V \cup P_H \cup P_C| = |P_V| + |P_H| + |P_C| - |P_V \cap P_H| - |P_H \cap P_C| - |P_V \cap P_C| + |P_V \cap P_H \cap P_C|$$

$|P_V| = C_{250 \cdot 120}^4$ (раскраска определяется 4 клетками в левой части одновременно)

аналогично $|P_H| = C_{500 \cdot 60}^4 = C_{250 \cdot 120}^4$
(и клетки сверху)

$|P_C| = C_{250 \cdot 120}^2$ (определяется одновременно 4 клетками слева)

$|P_V \cap P_H| = C_{250 \cdot 60}^2$ * (опр. 2 клетками в одной четверти)

$|P_H \cap P_C| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

$|P_V \cap P_C| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

$|P_V \cap P_H \cap P_C| = C_{250 \cdot 60}^2$ (аналогично)

Итого общее кол-во = $3 C_{250 \cdot 120}^4 - 3 C_{250 \cdot 60}^2$

ответ: $3 C_{30000}^4 - 3 C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $a < b$, $3 + b - a$, $(a-c)(b-c) = p^2$, $a^2 + b = 1000$
(p - простое)

$b > a \Leftrightarrow b - c > a - c$

Значит, ввиду того, что $a - c, b - c \in \mathbb{Z}$, возможны два случая:

1) $b - c = p^2$
 $a - c = 1$

2) $b - c = -1$
 $a - c = -p^2$

(остальные случаи противоречат кер-ву выше)

Разберём их отдельно:

1) $\left. \begin{matrix} b - c = p^2 \\ a - c = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b - a = (b - c) - (a - c) \stackrel{!}{=} 3$

то ~~то~~ это ~~то~~ выражение = $p^2 - 1$

Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ (квадраты ~~даны~~ $\pmod{3}$ или 1 mod 3) ~~удовлетворяет~~

Значит $p = 3$

Итак, подставляя все и только те тройки (a, b, c) , для которых удовлетворяют

$\begin{cases} a = c + 1, \\ b = c + 9, \\ a^2 + b = 1000, \end{cases}$ в зад.

Решим систему: $b = c + 9 = (a - 1) + 9 = a + 8$
 $a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000$

$a^2 + a = 992$

$a(a+1)$

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 992}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{4000 - 3}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{3997}}{2}$

Если $\sqrt{3997} \in \mathbb{N}$, тогда это число $a = \frac{-1 \pm \sqrt{3997}}{2}$

$a \in \mathbb{Z}$

Итак, $a \neq 0$
Итак, решим кер

$a = \frac{-1 \pm \sqrt{3997}}{2} = 31$ или -32
 $b = 39$ или -24
 $c = 30$ или -33

не ~~важно~~ ~~важно~~

2) Рассматривается аналогично: ($p=3$) (Против)

$\begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 = (a + 9) - 1 \end{cases}$

$a^2 + a + 8 = 1000$

$a = 31$ или -32

$b = 39$ или -24

$c = 40$ или -23

Ответ! $(31, 39, 40), (31, 39, 30),$
 $(-32, -24, -33), (-32, -24, -23)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

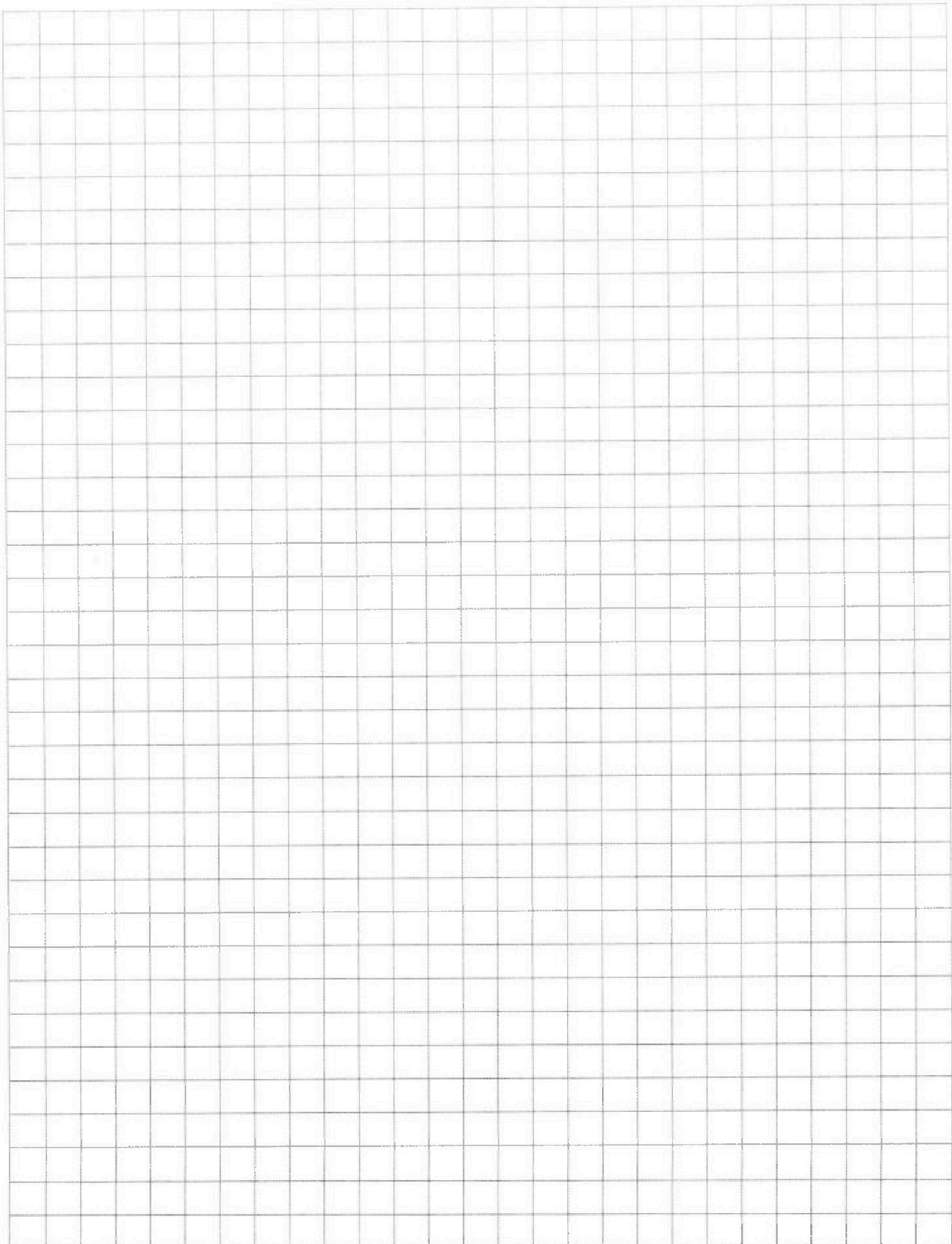
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

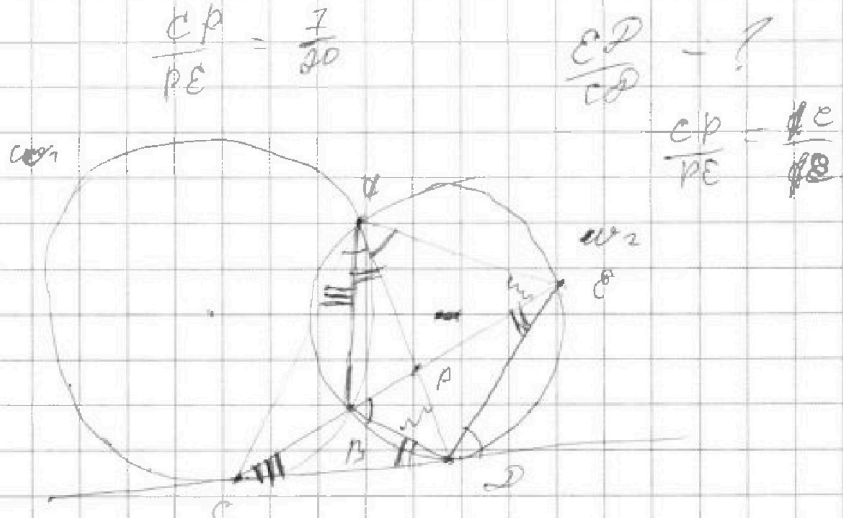
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

R
P₁
P₂

250 · 60
" 25 · 6 · 100
" 150 · 100
" 15000



$$\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{EP}{CP} = ?$$

$$\frac{CP}{PE} = \frac{7e}{18}$$

cos 3α
||
cos(2α+α) = cos 2α cos α - sin 2α sin α

$$\frac{CP}{EP} = \sqrt{\frac{S_{CPD}}{S_{APE}}}$$

(2 cos 2α - 1) cos α

$$= \sqrt{\frac{7}{20}}$$

|| 2 cos α (1 - cos 2α)
2 cos 3α - cos α - 2 cos α + 1 cos 2α
|| 4 cos 3α - 3 cos α

$$4p \cos^3 \alpha - 3p \cos \alpha + 12 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 3p \cos \alpha + 12 \cos \alpha + 4 = 0$$

cos α = t

$$4p t^3 + 12 t^2 + 12 t + 4 = 0$$

$\sqrt[3]{p-1} = -1 - \frac{1}{t}$

$p t^3 + 3 t^2 + 3 t + 1 = 0$

$p-1 \in [-8, 0]$

$(p-1)t^3 + (t+1)^2 = 0$

$\sqrt[3]{p-1} t = -t - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$$

$$q^2(2-x) = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)^3} = \sqrt{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{x}{24}} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$q^4 = \frac{1}{\sqrt{108}} \quad q^2 = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$$

$$\sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2)}{27}} = 2-x$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x)\sqrt{27}$$

$$\Rightarrow \text{sgn } \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 1$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$$

$$25x + 34 = 2 - x \Rightarrow 26x = -32 \Rightarrow x = -\frac{32}{26} = -\frac{16}{13}$$

$$x > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{16}{13}$$

$$x > -\frac{34}{25} > -\frac{34}{25}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 27 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 28 \\ \hline 216 \\ + 56 \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 261 \\ + 58 \\ \hline 319 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 261 \\ + 46 \\ \hline 307 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ + 93 \\ \hline 951 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 32 \\ + 64 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ \hline 189 \\ + 328 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$3969 : 9 = 441$$

$$3969 = 9 \cdot 441$$

$$9 \cdot 21^2$$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 9 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$

$$a, b, c: \quad a < b$$

$$3 + b - a$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b = 100$$

$$(b-c) - (a-c) : 3$$

$$i) \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$$b > a$$

$$b - c > a - c$$

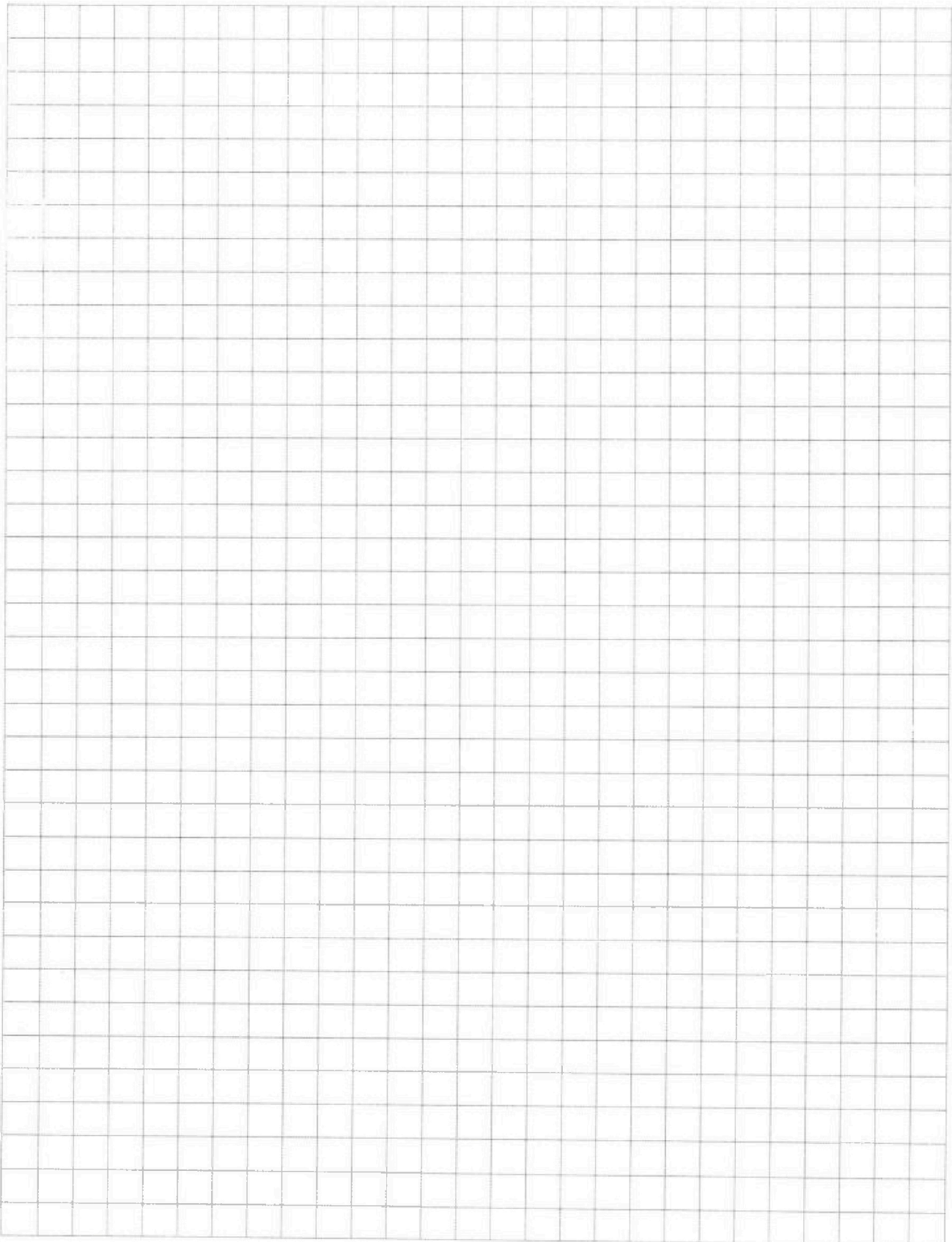


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

