



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть арифм. прогр. Будет вида $a_n = a + k(n-1)$, тогда

$$a_5 = a + 4k = 6x + 18; \quad a_7 = a + 6k = (x^2 - 4x)^2, \quad a_{11} = a + 10k = (3x^2)$$

2) Тогда

$$a + 6k - (a + 4k) = 2k = (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)$$

$$a + 10k - (a + 6k) = 4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$\Rightarrow 2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + (x^2 - 4x)^2 - 4 = 0$$

Пусть $(x^2 - 4x) = t$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow t + 4 = 0 \quad \text{или} \quad t - 3 = 0$$

$$t = -4 \quad \quad \quad t = 3$$

Согл. зам:

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

3) Так как каждое уравнение было либо линейным, либо квадратным, либо кубическим, а все с нулем корней (если их не считать, в комплексных числах), эти 3 значения - корни ответа.

Ответ: $2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | +3 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq -18 \leq 12x - 9y \leq 18 \\ -32 \leq -12x + 16y \leq 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -50 \leq (12x - 9y) + (-12x + 16y) \leq 32 + 18$$

$$-50 \leq 7y \leq 50$$

$$-\frac{50}{7} \leq y \leq \frac{50}{7}$$

(максимальное значение функции y)

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 4 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-3) \end{cases} \quad \begin{cases} -24 \leq 16x - 12y \leq 24 \\ -24 \leq -9x + 12y \leq 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24 + (24) \leq (16x - 12y) + (-9x + 12y) \leq 24 + 24$$

$$-48 \leq 7x \leq 48$$

$$-\frac{48}{7} \leq x \leq \frac{48}{7}$$

(все значения x)

1) Максимальное значение $4x + 7y$ будет при максимальных x и y , т.е. x и y равны $\frac{48}{7}$ и $\frac{50}{7}$ соответственно.

$$2) \text{ Максимальное } 4x + 7y = -\frac{48}{7} \cdot 4 + \left(-\frac{50}{7}\right) \cdot 7 = -48 \cdot 2 + (-50) = -146$$

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Трапеция $m - n = -13$ или $m - n = 13$

$m = n - 13$ $m = n + 13$

7) Тогда

(1) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = (n - 13) \cdot n \cdot (n - 13 - n + 3) = (n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

либо (2) $B = (n + 4) \cdot (n + 4 - n + 3) \cdot n = (n^2 + 4n) \cdot 7 = 39^2$

8) a) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n^2 + 4n) \in \mathbb{N}$, т.к. $39^2 = 7 \cdot (n^2 + 4n)$ и др. так все множители числа $39^2 = n^2 + 4n \Rightarrow \frac{39^2}{7} \in \mathbb{N}$, т.к. 9^2 кратно 7, т.к. 9 - простое число значит $9 = 7$

$\Rightarrow (n^2 + 4n) \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$

$n^2 + 4n = 21$

$n^2 + 4n - 21 = 0$

$(n + 7)(n - 3) = 0$

$\Rightarrow n + 7 = 0$ или $n - 3 = 0$

$n = -7$ $n = 3$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = n + 4 = 7$

9) (1) $(n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

$-12n^2 + 156n = 39^2$

$n^2 - 13n = -\frac{4}{3}$

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow 13n - n^2 \geq 0$, т.к. $n \in \mathbb{Z}$ $13n - n^2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2$ - такое целое, которое $\frac{4}{9}$ - простое и простое, а единственное простое число - 2 \Rightarrow

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$n^2 - 13n + 1 = 0$

$D = 13^2 - 4 = 12$

$n = \frac{13 \pm \sqrt{12}}{2}$

но $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ при $m = n - 13$ не имеет смысла.

10) Уменьшил параллелограмм угла, тогда $A = 39^2$ ~~или $A = 39^2$~~
 на какой-то момент углы равны, тогда $A = 39^2$, т.к. всегда было
 по всем углам 90° и параллелограмм



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11) (m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

Один из множителей $(m-n)$ или $(m-n+9)$ делится делителем на 3, т.к. $3q^2$ делится на 3, а множители - целые числа, но

если $m-n$ кратен 3, то $m-n+9$ также кратно 3, т.к. $9 \div 3 = 3$.

Если же $m-n+9$ кратно 3, то $m-n$ также делится на 3.

12) Значит $3q^2$ делится на 9, т.к. 2 множителя кратны 3

Т.к. q - простое и делится на 3, то единственно возможный вариант $q=3$

$$\Rightarrow 3q^2 = 27$$

13) Если $m-n$ - простое, то $m-n+9$ - простое, и наоборот, если $m-n+9$ - простое, то $m-n$ - простое (т.к. 9 простое, а $простое + простое = простое$)

Значит их произведение - простое, но 27 - не простое,

$$\text{Значит } A \neq 3q^2$$

14) \Rightarrow у нас только 1 вариант $m=7, n=3$

Ответ: 7; 3

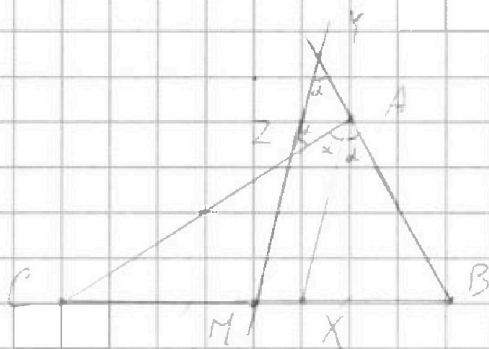
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AX - бис. M - середина BC

$MY \parallel AX$

$AC = 12$ $AZ = 3$ $YZ = 4$

Найти:

$BC = ?$

Решение:

1) Пусть $\angle CAH = \alpha \Rightarrow \angle HAB = \alpha$, а $\angle BAC = 2\alpha$

2) $AX \parallel MY$, а AZ - секущая $\Rightarrow \angle CAH = \alpha$ и $\angle YZA$ - накр. углы, а $\angle YZA = \angle CAH = \alpha$

3) $\angle YAC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$

4) $\angle YAZ + \angle AYZ + \angle AZY = 180^\circ \Rightarrow \angle AYZ = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$

5) Получается, что треугольник AYZ - равнобедр. и $AY = AZ = 3$

6) По теореме косинусов $AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AZ \cdot AY = YZ^2$

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 3 \cdot 3 = 4^2$$

$$-2 \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 9 = 16 - 18 \quad | : -2$$

$$9 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 1$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

7) По теореме (если Z на стороне AC) $\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{AB} = 1$

$\frac{BM}{MC} = 1$, т.к. M - середина BC ; $CZ = AC - AZ = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{9}{3} = 3$

$\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{AB} = 1 \quad 3AY = AB \quad AB = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle C \cdot AC \cdot AB$

$$BC^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 9 \cdot 12$$

($\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$, см пункт 6)

$$BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 12}{9}$$

$$BC^2 = 81 + 144 + 24 = 249$$

$$BC = \sqrt{249}$$

Ответ: $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ОДЗ } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -6 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Пусть функция

~~$f(x) = 4x^4 + x - 5\sqrt{y}$~~ $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$

получается $f(x) = f(y)$

Функция ~~монотонно~~ ~~возрастает~~ принимает ~~лишь~~ ~~два~~ значения

значения, а $x \geq 0$ и $y \geq 0$

Функция монотонно возрастает $\Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad |^2 \text{ (на обе части возведем в квадрат, это равносильное преобр.)}$$

$$\frac{\sqrt{(x+6)(5-x)}}{\sqrt{(x+6)(5-x)}} \cdot 4(x+6)(5-x) = 25 + 10(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) + x+6 - 2(\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x)$$

$$4(x+6)(5-x) = 25 + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-x} + 11 - \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} - 5$$

$$4(x+6)(5-x) = 31 + 9\sqrt{x+6} - 9\sqrt{5-x}$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 31 + 9(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})$$

$$(30-x-x^2) \cdot 4 = 31 + 9(2\sqrt{30-x-x^2} - 5)$$

Пусть $\sqrt{30-x-x^2} = t$

$$4t^2 = 31 + 9 \cdot (2t - 5)$$

$$4t^2 = 31 + 18t - 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 = 18t - 14$$

$$t^2 - \frac{18}{4}t + \frac{14}{4}t$$

$$t^2 - 4,5t + 3,5t$$

$$(t-1)(t-3,5) = 0$$

$$t=1 \text{ или } t=3,5$$

Согл. зад.

$$\sqrt{30-x-x^2} = 1 \text{ или } \sqrt{30-x-x^2} = 3,5$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2 = 1 \\ 30-x-x^2 = 9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2 = 9,5 \\ 30-x-x^2 = 12 \end{cases}$$

$$29-x-x^2 = 0$$

$$26,5-x-x^2 = 0$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 53 = 0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 117$$

$$D = 4 + 8 \cdot 53 = 107,4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{107,4}}{4}$$

Положим ради удобства рассуждений $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{-1 - \sqrt{117}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-1 - \sqrt{117}}{2}; \quad \frac{-2 - \sqrt{107,4}}{4} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2 - \sqrt{107,4}}{4}$$

$$\sqrt{100} < \sqrt{107,4} < \sqrt{117} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{107,4} < \sqrt{117} < 11 \Rightarrow 4x$$

$$9 < -1 + \sqrt{107,4} < -1 + \sqrt{117} < 10$$

$$4,5 < \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} < 5 \quad \text{По ОДЗ } -6 < x \leq 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2} \text{ или } x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответы: } \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2}, \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7


СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Для начала задачи, считаем все рисунки (без учета 0 поворотов), найдем их количество по формуле числа сочетаний

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$$

(2 - потому что 2 узла, 100 - потому что всего 100 узлов)

2) Теперь можно было бы просто разделить это число на 4, но заметим, что есть такие узлы (каждый их симметричных), которые при повороте на 180° образуют тот же рисунок, например  и симметричные узлы.

3) Если перевернуть все узлы так, чтобы левая сторона была выше, а правая ниже, то получится  то есть 180° поворота, а таких пар всего $5 \cdot 99 = 495$.

4) Значит среди 4950 рисунков 4900 имеют 3 "симметричных" при повороте на 90° , 180° и 270° , и 50 рисунков являются симметричными и имеют лишь 1 копию при повороте

на 90° . Значит уникальных рисунков всего $\frac{4900}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot \frac{100}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$

Ответ: 1250 рисунков



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$12 = 3$ $21 = 2Z$
 $12 = 89$ $BC = a = ?$

$MC = t$ $MX = \frac{t}{3}$ $XC = \frac{4}{3}t$

$\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}$
 $\frac{AB}{2t - \frac{t}{3}} = \frac{12}{\frac{4}{3}t}$

$\frac{AB}{BX} = \frac{AY}{MX}$ $\frac{AB}{BX} < \frac{AC}{CX}$

$\frac{AC}{CX} = \frac{AZ}{MC}$ $\frac{AY}{YB} = \frac{MX}{MB}$

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$
 $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$
 $-2 = -2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$
 $\frac{1}{3} = \cos 120^\circ$

$\frac{AY}{MX} = \frac{AZ}{MC}$
 $\frac{AY}{AC} = \frac{MX}{CX}$

$20(=$
 $= 99 + 99 + 3 =$
 $= (33 + 31 + 1) / 3 =$
 $= 67 \cdot 3$

$4(a^3 - b^3) + 5(a-b)(a-b)^4$

$\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{ZA} = \frac{AY}{YB} = 1$
 $\frac{BM}{MC} = \frac{1 \cdot 9}{\frac{1}{3}} = \frac{MX}{MB} = 1$
 $\frac{MX}{MB} = \frac{31}{3}$

$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 6$
 $f'(x) = 12x^2 - 10x + 3$
 $4x^2 - 5\sqrt{4} = 5y - 5\sqrt{2} + y$
 $4x^2 + 2 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}x^2 + 2 + 5$
 $4x^2 + 2 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}x^2 + 2 + 5$
 $4x^2 + 2 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}x^2 + 2 + 5$
 $4x^2 + 2 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}x^2 + 2 + 5$

144
 $- 26$
 118
 168
 81
 249
 $49 =$
 $= 83 \cdot 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$10 < \sqrt{107} < 11$
 $10 < 11 < 11$
 $AB = 26$
 $AC = ?$
 $BC = ?$
 $A = 20^\circ$

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $(5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y)^2 = 4(30x - y^2 + 40y)$
 $25 + 10\sqrt{107} - 10\sqrt{5}y + 5y^2 = 120x - 4y^2 + 160y$
 $49y^2 - 10\sqrt{5}y - 120x + 10\sqrt{107} - 160y + 25 = 0$

$48 - 2 = 46$
 $941 = -96 - 50 = -146$
 $5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $(5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y)^2 = 4(30x - y^2 + 40y)$

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$

$10 < \sqrt{107} < 11$
 $AB = 26$
 $AC = ?$
 $BC = ?$
 $A = 20^\circ$

$-18 \leq 12x - 9y \leq 18$
 $-32 \leq 12x - 6y \leq 32$
 $-32 \leq 18y - 12x \leq +32$

5
 6
 7

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $(5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y)^2 = 4(30x - y^2 + 40y)$

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$

$46^2 = 486 - 14$
 $4 + 2 \cdot 53 - 4 = 107$

$5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y = 2\sqrt{30x - y^2 + 40y}$
 $(5 + \sqrt{107} - \sqrt{5}y)^2 = 4(30x - y^2 + 40y)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$5000 - 430 = 4570$

$10 \times 10 = 100$

$100 + 39 = 139$

$100^2 = 10000$

$\frac{10000}{38.8} = 257.73$

$257.73 \times 50 = 12886.5$

$\frac{12886.5}{4} = 3221.625$

$\frac{4900}{5} = 980$

$\frac{50}{2} = 25$

$50 \times 25 = 1250$

Other calculations and diagrams include a sphere with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z and a tetrahedron with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

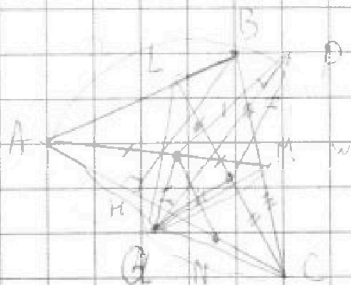


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
~~10~~ ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

CB-диал. MA-медiana PQ||BH

AM-диалитер S

CL-диалитер W S ∩ W = P; Q

BK-высота AB = 20

AM = 20

Найти:

AC = ? BC = ?

Решение:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + 4k = 6x + 18$$

$$a + 6k = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 10k = (-3x^2)$$

$$2k = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

$$4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$(2\sqrt{7})(2\sqrt{7}) = 4 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 7 = 11 + 4\sqrt{7}$$

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 4k = 30$$

$$a + 6k = 14 - 2j = 16$$

$$a + 10k = -12$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$

$$a + 4k = 30 - 6\sqrt{7}$$

$$(a - 4k) = (11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7}) = 3$$

$$\rightarrow x^2 = -3 - 12\sqrt{7}$$

$$2k = 2 + 6\sqrt{7}$$

$$4k = 4 + 12\sqrt{7}$$

$$9 - 42 - 12\sqrt{7}$$

$$2 - \sqrt{7}$$

$$30 - 6\sqrt{7}$$

$$11 - 4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7} = 3$$

$$-33 + 12\sqrt{7}$$

$$x - 12x - 36 = (x - 6)^2$$

$$(x - 6)^2 + (x^2 - 4x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 6 = 0 \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x = 6 \quad (x - 4)x = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 9 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 9 = 0$$

$$D = 10 + 36 = 46$$

$$t = -1 \pm \sqrt{46} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{46}$$

$$(x^2 - 4x) = 1 + \sqrt{46}$$

$$x^2 - 4x = (1 + \sqrt{46}) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2h - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$2) m \in \mathbb{N} \text{ и } n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z} \text{ и } (m-n+9) \in \mathbb{Z}$$

3) Заметим все возможные разложения $13p^2$ и $3q^2$ на простые числа и множители, учитывая, что $p, 13, q$ и 3 - простые числа.
(используем разложение $A = 13p^2$)

$$A = 1 \cdot 13p^2 = (-1) \cdot (-13p^2) = 13 \cdot p^2 = (-13) \cdot (-p^2) = p \cdot 13p = (-p) \cdot (-13p)$$

4) Заметим получаем, что $(m-n)$ равен 1 из этих множителей, а $(m-n+9)$ - 13p, подставим значения, и проверим, какие сойдутся

(Часто можно опустить $(m-n) = 13p^2; -1, 13p$ и $-13p$, т.е. $m-n \neq m-n+9$ и $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 1$)

$$\begin{cases} m-n = 1 \\ m-n+9 = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13p^2 = 10 \\ p^2 = \frac{10}{13} \\ p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (1; 13p) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p^2 \\ m-n+9 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p^2 = -10 \\ p^2 = \frac{10}{13} \\ p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (-13p; -1) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13+9 = p^2 \\ p^2 = 22 \\ p = \pm \sqrt{22} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13+9 = p^2 \\ p^2 = -4 \\ p = \pm 2 \text{ (2 - простое число)} \Rightarrow (-13; p^2) \end{cases}$$

подходит

$$\begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+9 = 13 \\ p^2 = 4 \\ p = \pm 2 \Rightarrow (p^2; 13) \end{cases}$$

подходит

$$\begin{cases} m-n = 13p \\ m-n+9 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p+9 = p \\ 12p = 9 \\ p = \frac{3}{4}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = p \\ m-n+9 = 13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+9 = 13p \\ 12p = 9 \\ p = 0.75 \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

5) В итоге получаем, что $m-n = -13$, $m-n+9 = p^2$; либо $m-n = p^2$, $m-n+9 = 13$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^3n - mn^3 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p/p ; p^2 \leq 13 ; 3q/q ; q \leq 3p ; 13p/p$$

$$m-n > m-n-9 \Rightarrow m-n = 13p$$

$$m-n-9 = p$$

$$13p-9 = p$$

$$m-n = p^2$$

$$m-n-9 = 13$$

$$m-n = 13$$

$$m-n-9 = p^2$$

$$p^2 - 9 = 13$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$p+9 = 13p$$

$$12p = 9$$

$$p = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$3q+2=4^2$$

$$3q-1=3$$

$$4q-9=0$$

$$m-n = 3q$$

$$m-n-9 = 9$$

$$3q-9 = 9$$

$$3q = 18$$

$$q = 6$$

$$m-n = 3$$

$$m-n-9 = 4^2$$

$$4^2 - 9 = 3$$

$$m-n = 4^2$$

$$m-n-9 = 3$$

$$4^2 - 12 = 3$$

$$m-n = 9$$

$$3q = 9$$

$$q = 3$$

$$m-n-9 = 3$$

$$4 = 2q^2$$

$$1-1=3=3q$$

$$1+2=3q$$

$$2=1$$

$$13p^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = 10$$

$$m-n = 10$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$m \cdot n \cdot (m-n+3) = 4 \cdot 9 \cdot 3 ; 4 \cdot 3 \cdot 9 ; 3 \cdot 9 \cdot 9 ;$$

$$m \cdot n = 1 \cdot 3 ; 3 \cdot 1 ; 3q \cdot q^2 ; 1 \cdot 3 \cdot 3 ; q^2 \cdot 3 ; 1 \cdot q^2 \cdot 3 ; q^2 \cdot 1 \cdot 3 ;$$

$$m \cdot n \cdot 3 = 3q^2 \cdot q^2 ; 3q \cdot q \cdot 3 ; q^2 \cdot 3 \cdot 1 ; 3q \cdot q \cdot 1 ; 3 \cdot q \cdot 1 \cdot q ;$$

$$q = q \cdot 1 \cdot 1 ; 1 \cdot 3 \cdot q ; q \cdot 3q \cdot 1 ; q \cdot 1 \cdot 3q ; 3 \cdot 1 \cdot q^2$$

$$3 \cdot q^2 \cdot 1 ; 1 \cdot q \cdot 3q ; 1 \cdot 3q \cdot q$$

$$3q^2 \cdot 1 \cdot 1 ; 1 \cdot 3q^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 1 \cdot 3q^2$$