



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть последовательность $\{a_n\}$

$$a_3 = 3x + 3, \quad a_5 = (x^2 + 2x)^2, \quad a_9 = 3x^2$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3x + 3 \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \\ a_1 + 8d = 3x^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 3x^2 - 8d \\ 3x^2 - 6d = 3x + 3 \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 2d = x + 1 \\ a_1 = 3x^2 - 8d \\ a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2d = x^2 - x - 1 \\ a_1 = 3x^2 - 4x^4 - 4x^2 + 4 \\ 3x^2 - 4x^4 - 4x^2 + 4 + 2x^2 - 2x - 2 = (x^2 + 2x)^2 \end{cases};$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 > 0$$

$$x = -1$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \ 3 \ -2 \ -2 \\ -1 \ 1 \ 3 \ 0 \ -2 \ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} &x^3 + 2x^2 + x^2 - 2 = 0 \\ &x^2(x+1) + 2(x^2 - 1) = 0 \\ &(x+1)(x^2 + 2(x-1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$x = -1$ - подходит

$$a_3 = 0$$

$$a_1 + 2d = -1 - 4 + 4 = -1$$

$$d = \frac{1 + 1 - 1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 0$$

Ответ: -1

$x = -1 \pm \sqrt{3}$ - не подходит

$$a_3 = -3 - 3\sqrt{3}$$

$$a_1 = (-1 - \sqrt{3})^2 + 4(-1 - \sqrt{3}) + 4 =$$

$$= -4 - 2\sqrt{3}/4 - 4\sqrt{3}/4 - 4 = -6\sqrt{3}$$

$$d = 4 + 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 4\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 4 + 6\sqrt{3} +$$

$$+ 6 + 6\sqrt{3} = 12$$

$$12 \neq -3 - 3\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

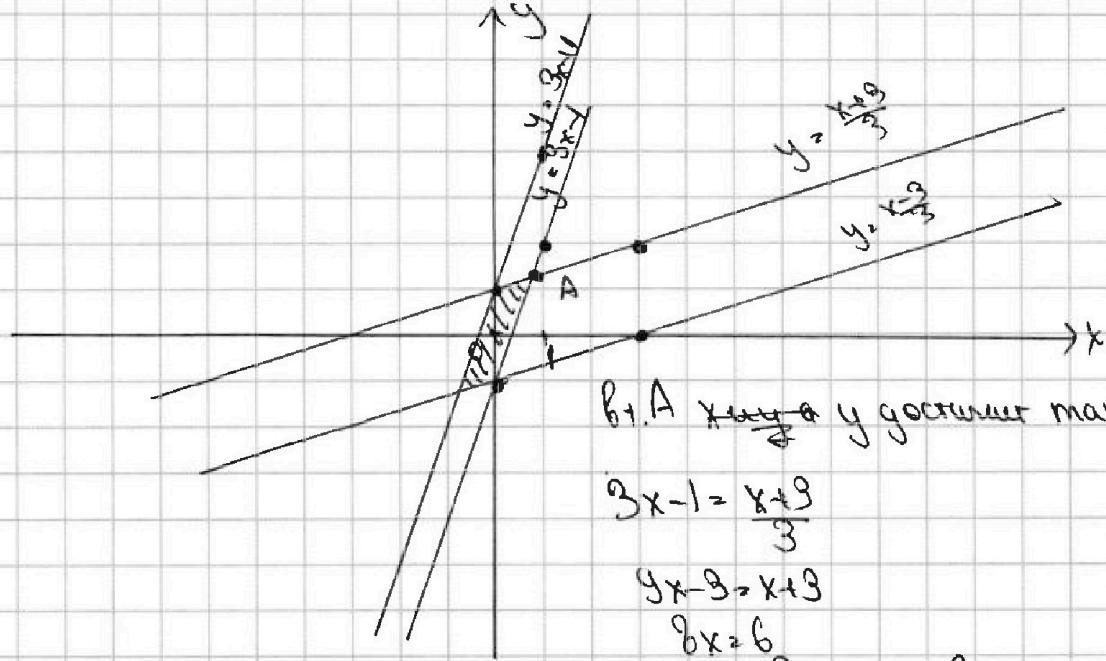
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} . \quad \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x-3y \geq -3 \\ x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y \leq \frac{x+3}{3} \\ y \geq \frac{x-3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{cases}$$



$$3x-1 = \frac{x+3}{3}$$

$$9x-3 = x+3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$y = \frac{9}{4} - 1$$

$$4y + 8x = 4 \cdot 1,25 + 8 \cdot 0,75 = 5 + 6 = 11$$

$$y = 1,25$$

Объем: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \text{ Труба } A = 45q^2, B = 13p^2$$

$$\text{тогда } m^2 - 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9) = 45q^2$$

$$m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) = 13p^2$$

Множители:

$$\begin{array}{ll} mn & m+n-3 \\ 1 & 13q^2 \\ 13 & p^2 \\ p & 13p \\ 13p & p \\ p^2 & 1 \\ 13p^2 & \end{array}$$

вертикальные деления
 $13p^2 : (1+1)(2+1) = 6$ делителей,
 т.е. 6 вертикальных строк, то
 т.к. симметричное уравнение
 $mn(m+n-3) \rightarrow$ от 1 до 6.

Значит можно рассмотреть ~~1, 2, 3, 4, 5, 6~~

$$\begin{cases} mn=1 \\ m+n-3=p^2 \cdot 13, m, n \in \mathbb{N}, p \text{-простое} \end{cases}$$

$$\downarrow \\ m=n=1$$

$$\begin{aligned} m+n-3 &= 1+1-3=-1 \\ p^2 \cdot 13 &= -1 \text{ - неверно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad mn &= p, p \text{-простое} \\ mn-3 &= 13p \\ m &= p \\ n &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad mn=13$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } m &= 1, n = 13 \\ m+n-3 &= 11 \\ 11 &= p^2 \cdot 13 - \text{неверно} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad m \cdot n = 13p$$

$$mn-3 = p$$

$$m=13, n=p$$

$$13+p-3=p$$

$$13+p-3=p \text{ - неверно}$$

неверно

$$\textcircled{5} \quad mn=p^2$$

$$\begin{aligned} m &= n=p \text{ либо } m=p^2 \\ 2p-3 &= 13 \\ p &= 8, p \text{-простое} \Rightarrow \text{неверно} \end{aligned}$$

$$p^2+1-3=p$$

$$p^2+1-3=p$$

$$p^2+15=p$$

неверно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \quad \begin{cases} mn = 13p^2 \\ m+n-3=1 \end{cases}$$

$$m+n=4$$

$$\begin{array}{l} 1. \quad m=13 \\ n=p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad m=13 \\ n=1 \end{array}$$

$$3. \quad m=13p$$

$$n=p$$

(Уравнение симметрично относительно m и n)
Можно рассмотреть 3 случая

$$1. 13+p^2=4$$

$p^2=-9$ - неверно

$$2. 13p+p^2=4$$

- неверно

$$3. 13p^2+1=4$$

- неверно \rightarrow 6 сп. тоже не подходит

Значит $B \neq 13q^2$

$$\text{Пусть } A = 13q^2, B = 25q^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 \quad mn(m+n-3) = 25q^2$$

Будем рассматривать случаи:

$$\begin{array}{l} \cancel{mn} \\ \cancel{m+n-3} = 13p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ \textcircled{1} \quad 13p^2 \\ \textcircled{2} \quad 13p \\ \textcircled{3} \quad 13 \\ \textcircled{4} \quad 13p \\ \textcircled{5} \quad 13p^2 \\ \textcircled{6} \quad 13 \end{array}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} m+n=1 \\ 1-9=13p^2 \end{cases} \text{ - неверно}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} mn=13p \\ m+n-9=p \end{cases}$$

$+13p-9=p$ - неверно

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} mn=p \\ p-9=13p^2 \end{cases} \text{ - неверно}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} mn=13 \\ 13-p^2=9 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} mn=p^2 \\ p^2-9=13 \end{cases} \text{ - неверно}$$

$$\textcircled{6} \quad \begin{cases} mn=13 \\ 13-p^2=9 \end{cases} \quad p^2=4 \quad p=2 \checkmark$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2-простое $\Rightarrow p=2$ -неделит, значит $m+n=13$

тогда $mn \cdot 10 = 45q^2$

$$2mn = 45q^2 \Rightarrow mn \equiv 0 \pmod{15}$$

$$q^2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{2}$$

9-простое, значит 9 принимает единич. значение $q=2$

$$2mn = 15 \cdot 4$$

$$\underline{mn = 30}$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ \frac{30}{n} + n = 13 \end{cases}$$

$$30 + n^2 = 13n$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$D = 49$$

$$n_1 = \frac{13+7}{2}$$

$$n_1 = 3 \Rightarrow m_1 = 10$$

$$n_2 = 10 \Rightarrow m_2 = 3$$

Для

дополнительные случаи, где можно применить

(оба)

решения < 0 , невозможны, тк $m+n \in \mathbb{N}$

$$m+n > 0$$

$m+n$ не может быть < 0

Ответ: $(10, 3); (3, 10)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

no r. sin B Δ ABC

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$$

$$\angle A = 2d \Rightarrow \frac{BC}{\sin 2d} = \frac{18}{\sin \angle B}$$

$$\frac{\sin 2d \cdot 18}{BC} = \frac{2 \sin d \cdot 12}{BC}$$

$$2 \sin d \cos d \cdot 9 = \sin 2d \cdot 12$$

$$2 \sin d \cos d \cdot 9 = 12$$

3 cos d = 2

$$\cos d = \frac{2}{3}, \quad \cos 2d = 2 \cos^2 d - 1 = \frac{2 \cdot 4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

no r. cos B Δ ABC:

МРКЗ,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle A \cdot AC \cdot AB$$

$$BC = \sqrt{16^2 + 30^2 + \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 30} = \sqrt{324 + 900 + 160} =$$

$$= \sqrt{900 + 444} = \sqrt{1344} = 2\sqrt{336} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$

no r. sin B Δ MZB;

$$\angle MZB = \angle AZY \text{ (вершины)}$$

$$\frac{MZ}{\sin \angle MZB} = \frac{ZY}{\sin \angle B}$$

$$\frac{12}{\sin 2d} = \frac{12}{\sin \angle B}$$

$$\frac{BC}{2 \sin d \cos d} = \frac{12}{\sin \angle B}$$

$$\sin d = 0 \Rightarrow d = \pi - \text{недопустимо}$$

$$\sin d \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sin 2d &= \sqrt{1 - \cos^2 2d} = \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \\ &= \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

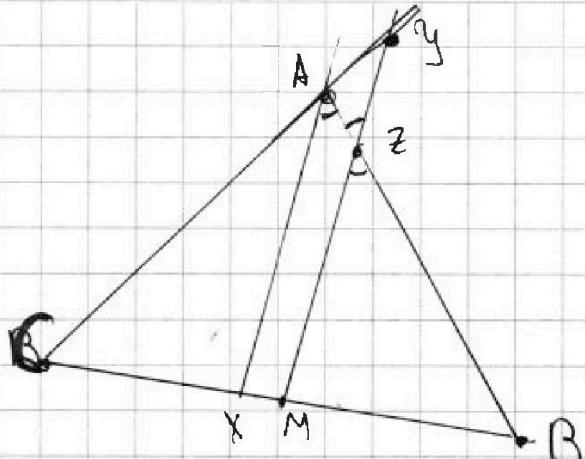


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



Дано:

М-ср ВС

AX-диагл

AC=16, AZ=6

YZ=8

Найти: ВС=?

Решение:

$$\angle B \cap M \cap Y = 62^\circ$$

$$\angle A \cap M \cap Y = 64^\circ$$

$$\text{Тогда } \angle XAB = 2, \quad 2 < \frac{\pi}{2}$$

$\angle X$ -диагл $\Rightarrow \angle CAY = \angle XAB = 2, \quad ZM \parallel AX \Rightarrow \angle XAZ = \angle AZY = 2$ - напрот. лемма, т.к.
 $\angle XAZ = \angle AZY = 2$

$$\angle CAB + \angle BAZ = 180^\circ \quad (\text{суммы углов})$$

$$\angle CAB + \angle CAY + \angle XAB = 22 \Rightarrow \angle BAZ = 180 - 22 \Rightarrow \angle CYM = 2$$

$$\angle CYM = \angle AZY = 2 \Rightarrow \triangle AZY - \text{равнобедр. т.к. } AZ = AY, 6$$

по т. Менгера $\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZN} \cdot \frac{MB}{BC} = 1$, М-ср ВС
 $\frac{16}{6} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{1}{2} = 1$
 $ZN = 12$

по т. Менгера $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$

$$\frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{6+18} = 1 \quad BZ = 24 \Rightarrow AB = BZ + AZ = 6 + 24 = 30$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

Отделим:

$$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-y} + 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x+1 + 5^2 + 2\sqrt{(x+1)(6-y)} = 6-y + 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^2 + 10 + 2\sqrt{(x+1)(6-y)} = y^2 - 2y + 6 + 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^2 + 10 + 2\sqrt{(x+1)(6-y)} = y^2 - 2y + 6 + 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$(x^2 + 10 + 2\sqrt{(x+1)(6-y)})((x^2 + 10 + 2\sqrt{(x+1)(6-y)}) - (y^2 - 2y + 6 + 2\sqrt{6+5x-y^2})) = 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ (x^2 + y^2 + 5)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \end{cases}$$

решение

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x = y \end{cases} \quad \downarrow$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}, \quad x \geq 0, x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5 \quad x \in [0, 6]$$

$$9 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 4(6+5x-x^2) + 25 - 20\sqrt{6+5x-x^2}$$

Пусть $a = \sqrt{6+5x-x^2}$

$$2(6+5x-x^2) + 9 - 9\sqrt{6+5x-x^2} = 0$$

$$2a^2 + 9 - 9a = 0$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 1,5$$

$$6+5x-x^2 = 2,25$$

$$x^2 - 5x - 3,75 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 400 + 18 \cdot 4 = 440$$

$$a_1, a_2 = \frac{9 \pm 3}{4} \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 1,5$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 3$$

$$-x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow D = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > 0 - \text{неподходит}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

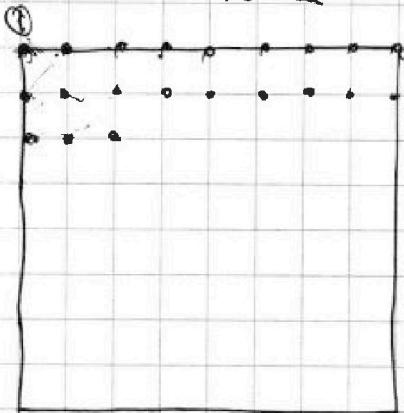
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Всего 6 квадрата

9 · 9 = 81 точек



$$\text{Решение: } C_{81}^2 - (C_4^1 \cdot C_{77}^1 + C_{28}^1 \cdot C_{55}^1 + C_{49}^1 \cdot C_{42}^1) = 404981 - 226 = 255684 \text{ способа}$$

$$\text{Решение квадрат } C_{81}^2 - (C_4^1 \cdot C_{77}^1 + C_{28}^1 \cdot C_{55}^1 + C_{49}^1 \cdot C_{42}^1)$$

☒ - 6 способов расставить 2 точки
изменяющие редом

Всего - C_{81}^2 способов выбрать
2 точки

Если мы возьмем точку ① и вторичем иной четверти-квадрат то у этой точки будет 49 точек
точек из 80 оставшихся, и так сделаем с четырьмя, то

беско первых будет: $C_{81}^1 \cdot C_{80}^1$

• • : C_4^1 -ко-бо выбрать точку из квадрата

• • : $C_{81}^1 - 4 = C_{77}^1$ -ко-бо из выбрать точку не из
точек из квадрата

C_{64}^1 -ко-бо способов выбрать квадрат

Такие точки на границе и внутри большого квадрата:

C_{64}^1 -ко-бо способов выбрать точку на границе
 C_{49} -ко-бо из выбрать т. внутри квадрата, не присоединяясь к нему

C_4^1 -ко-бо из выбрать т. на вершине, у нее 2 соседние точки

C_{14}^1 -ко-бо из выбрать т. на границе с ней

$C_{14}^1 \cdot C_{28}^1$ -ко-бо из выбрать т. на границе, без вершин

C_{28}^1 -ко-бо из выбрать т. в ней

C_{49}^1 -ко-бо из выбрать т. внутри

C_{72}^1 -ко-бо из выбрать т. на ее

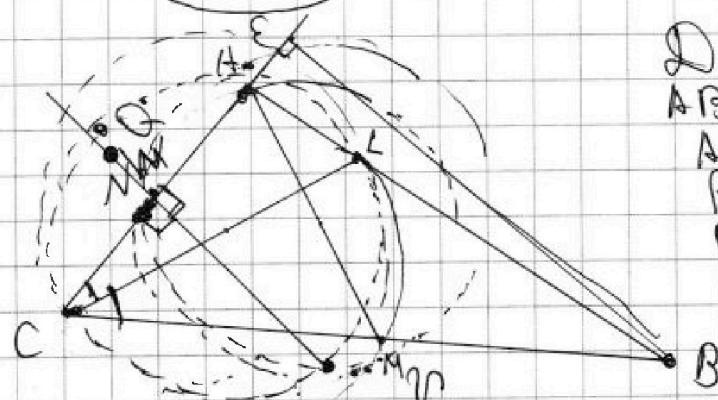
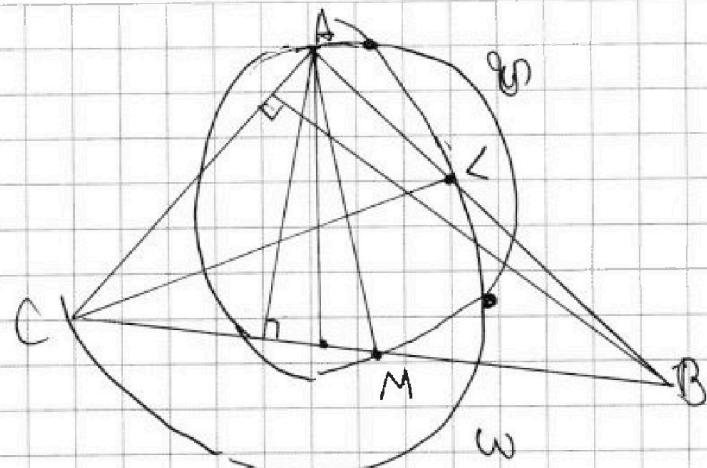


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
 $AB = 10$
 $AN = 8$
 $PQ \parallel BE$
 BE - высота $\triangle B$
 Найти:
 AC и BC

Данные:

$$CL = D_1$$

$$AM = D_2$$

$$PQ \perp AC$$

$CM = MB$, AN - медиана

$$CL \text{ бис.} \Rightarrow \angle HCL = \angle LCB \Rightarrow \frac{AL}{AC} = \frac{LB}{CB}$$

$$AL = LB = AC$$

$$PQ \perp AC; \text{ Тогда } PQ \cap AL = \sqrt{M^2}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. a_3 = 3x+3, a_5 = (x^2+2x)^2 \quad a_9 = 3x^2 \quad \begin{matrix} a_{12} = x^2(4x+4) \\ -1-A+4=1 \end{matrix}$$

$$a_3 = a_1 + d(n-1) = a_1 + d \cdot 2 = 3x+3 \quad -1-2d \quad d > 0,5$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \quad \begin{matrix} 1-2d=0 \\ 2d=1 \end{matrix}$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2 \quad \begin{matrix} -1 \cdot 3+3=0 \\ -1+2 \cdot 0,5=0 \end{matrix}$$

$$a_1 = 3x^2 - 8d \quad 3x+3 = 3x^2 - 8d + 2d \quad x = -1$$

$$-1-\sqrt{3}=x \quad 3x+3-3x^2=-6d \quad x^3+3x^2-2=0$$

$$\begin{matrix} a_{12} = -(1+3+2\sqrt{3})-4-4\sqrt{3}+4 \\ \geq -4-2\sqrt{3}-4+\sqrt{3} \\ = -4-6\sqrt{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} -3x-3+3x^2=6d \\ d=4+2\sqrt{3}+\sqrt{3}(-1-4+3\sqrt{3}) \\ = 4+3\sqrt{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2(x+1)+2(x^2-1)>0 \\ (x+1)(x^2+2(x-1))>0 \\ x^2-1 \end{matrix}$$

$$3x^2-8d+4d=(x^2+2x)^2 \quad -4-6\sqrt{3}+8+3\sqrt{3}=4-3\sqrt{3} \quad x^2+2x+2=0$$

$$3x^2-4d=(x^2+2x)^2 \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 5 & -4 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -6 \end{matrix} \quad x_1,2 = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$3x^2-4(x^2-x-1)=(x^2+2x)^2 \quad \begin{matrix} -1 & 1 & 4 & 5 & -4 & -4 \\ & & 3 & 2 & -6 \end{matrix}$$

$$3x^2-4x^2+4x+4=(x^2+2x)^2 \quad 3x^2-2x^2+2x+2=(x^2+2x)^2$$

$$-x^2+4x+4=(x^2+2x)^2 \quad x^2+2x+2=x^4+4x^3+4x^2$$

$$-x^2+4x+4=x^4+4x^3+4x^2 \quad x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$$

$$x^4+4x^3+5x^2+4x-4=0 \quad x=-2$$

$$x=1 \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ \hline 6 & 7 & 4 \end{matrix}$$

$$1 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 8 & 6 \end{matrix}$$

67

67



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

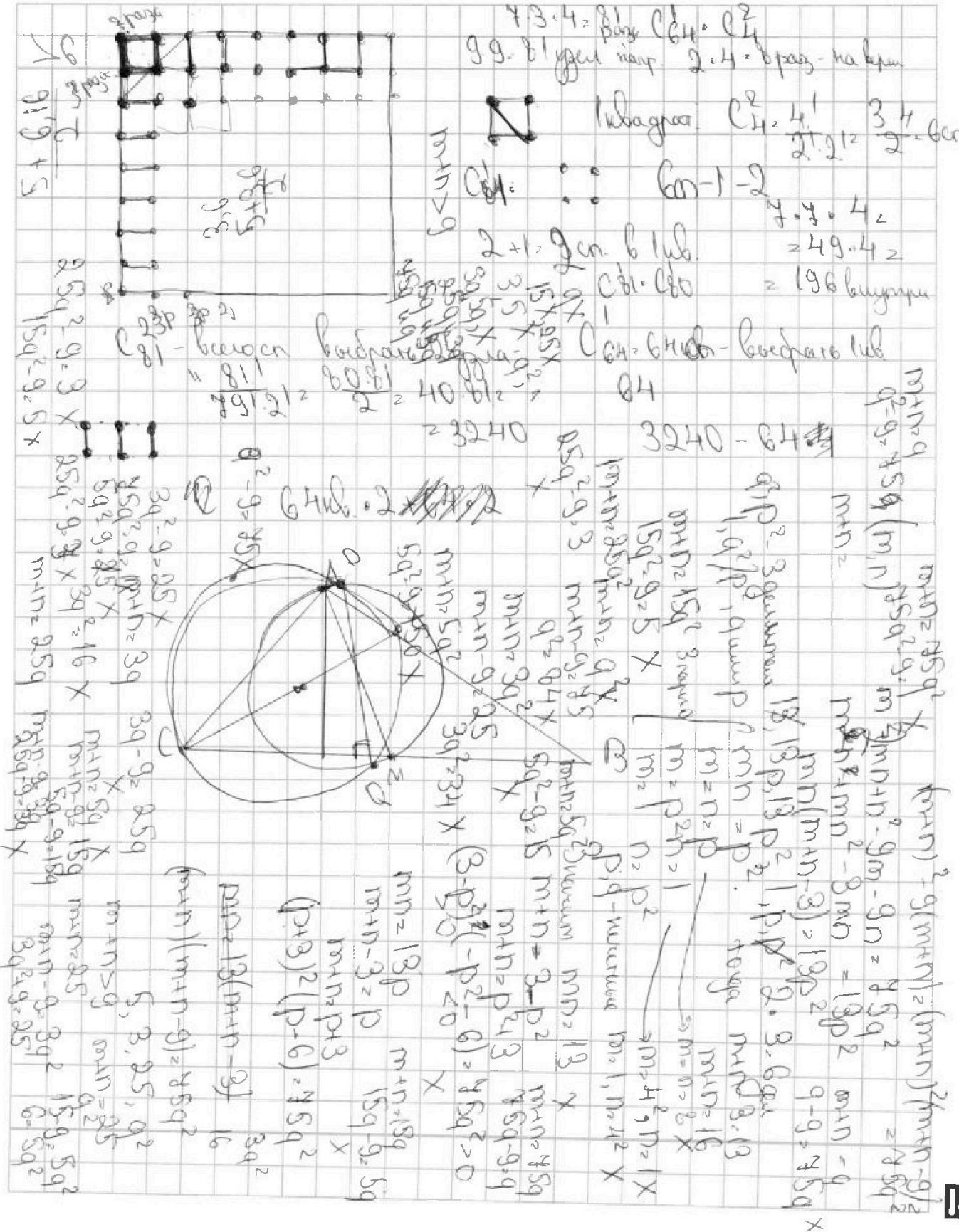
$$\begin{aligned}
 & \text{5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{array} \right. \\
 & \quad \begin{array}{l} x \geq 5+2-10 \\ x \geq 1-16-x \Rightarrow 5+2-16+5x-y^2 \\ x \geq 1+6-x \Rightarrow x \leq 6 \\ x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + \sqrt{y} + 5y^2 \\ x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(-\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 1) = 0 \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x, y \geq 0 \Rightarrow x = y \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x} \\ \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} + 5 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} + 5 = 0 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - 2\sqrt{6+5x-y^2} - 5 = 0 \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{l} x \geq 5+2-10 \\ x \geq 1-16-x \Rightarrow x \leq 6 \\ x^2 + 5x - 6 \leq 0 \Rightarrow 5+2-10 \\ (6-x)(x+1) \geq 6x - x^2 - 6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 345 = 0 \\ 4x^2 - 20x - 15 = 0 \\ D = 400 + 60 \Rightarrow 640 \\ x_1, 2 = 20 \pm 8\sqrt{10} \\ x_1, 2 = 5+2-10 \\ (6-x)(x+1) \geq 6x - x^2 - 6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ x_1, 2 = 20 \pm 8\sqrt{10} \\ x_1, 2 = 5+2-10 \\ x_1, 2 = 6x - x^2 - 6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ D = 31 - 9 \cdot 9 = 4 = 9 \\ x_1, 2 = \frac{9 \pm 3}{4} \\ x_1, 2 = 3 \\ x_2 = 1,5 \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{l} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \\ 6x - x^2 + 6 - x = 9 \\ -x^2 + 5x + 6 = 9 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \\ D = 25 - 12 \cdot 13 \\ x_1, 2 = \frac{-12 \pm 2\sqrt{13}}{2} \\ x_1, 2 = -6 \pm \sqrt{13} \\ 4(x+1)(6-x) + 18 - 18\sqrt{(x+1)(6-x)} = 0 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = a \quad 4x^2 + 2(x+1)(6-x) + 9 - 9 \Rightarrow (x+1)(6-x) = 0 \\ 2x^2 + 9a + 9 = 0 \end{array}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

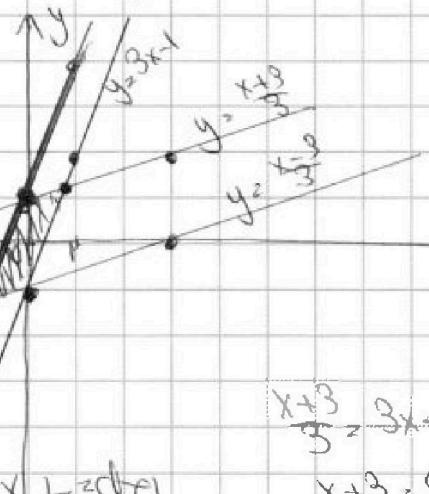
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \max(4y+8x) - ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3y \geq -3 \\ x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3y \leq x+3 \\ 3y \geq x-3 \\ y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y \leq \frac{x+3}{3} \\ y \geq \frac{x-3}{3} \\ y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{array} \right.$$



$$3x+1 = x - 3$$

$$3x+3 = x+3$$

$$8x = -6$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{x+3}{3} = 3x-1$$

$$x+3 = 9x-3$$

$$8x = 6$$

$$x = 0,75$$

$$y = 3 \cdot 0,75 - 1 = 2,25 - 1 = 1,25$$

$$x = -3$$

$$y = 3(-3) + 1 = -9 + 1 = -8$$

$$y = 1$$

$$18 \cdot 0,75 = 13,5$$

$$4 \cdot 4 = 16$$