



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_3 = 3x + 3 \\ a_5 = (x^2 + 2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

d - разность этой прогрессии

$$a_9 - a_3 = 6d = (9-3)d = 3x^2 - 3x + 3$$

$$6d = 3x^2 - 3x + 3$$

$$d = \frac{1}{2}(x^2 - x - 1)$$

$$a_5 = a_3 + 2d = (x^2 + 2x)^2$$

$$3x + 3 + x^2 - x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x^4 + 4x^3) + (3x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x^2(x+1) + 2x(x+1) - 2(x+1)) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4.3$$

\Leftrightarrow

$$x = -1$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$



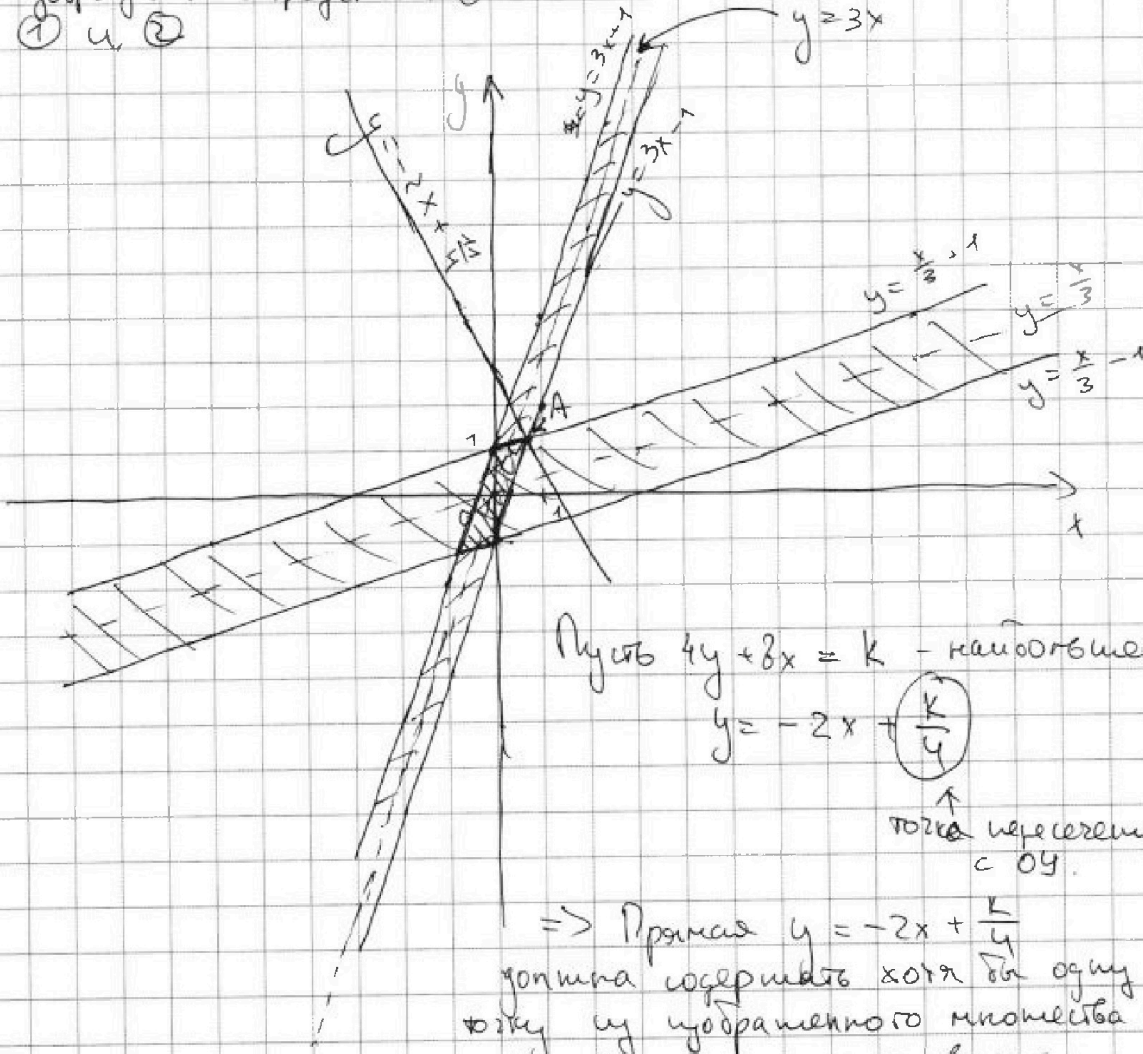
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недопустима!

Уобразим определенные нами множества точек
① и ②



Пусть $4y + 8x = k$ - наибольшее.

$$y = -2x + \frac{k}{4}$$

↑
точка пересечения с ОУ.

\Rightarrow Прямая $y = -2x + \frac{k}{4}$
должна содержать хотя бы одну
точку из указанного множества и
находиться как можно выше.

Так будет, если прямая будет проходить через точку A

$$\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \frac{x}{3} + 1 = 3x - 1$$

$$2 = \frac{8}{3}x \quad \&$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

$$\text{Тогда } \frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4}$$

$$5 = -6 + k$$

$$k = 11$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\max (4y + 8x)$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & (1) \\ |3x - y| \leq 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x - 3y \geq 0$$

$$y \leq \frac{x}{3}$$

или

$$x - 3y \leq 0$$

$$y \geq \frac{x}{3}$$

$$x - 3y \leq 3$$

$$3y - x \leq 3$$

$$y \geq \frac{x}{3} - 1$$

$$y \leq 1 + \frac{x}{3}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq \frac{x}{3} - 1 \\ y > \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$(2) \quad 3x - y \geq 0$$

$$y \leq 3x$$

или

$$3x - y < 0$$

$$y > 3x$$

$$3x - y \leq 1$$

$$y - 3x \leq 1$$

$$y \geq 3x - 1$$

$$y \leq 3x + 1$$

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3x \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \\ y > 3x \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 5m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

① Пусть $A = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$
 $(m+n-9)(m+n) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3$

Пусть так

Если $(m+n) \div 3$, то $(m+n-9) \div 3$ (т.к. $9 \div 3$)
 Если $(m+n-9) \div 3$, то $(m+n) \div 3$

~~то~~ (т.к. т.к. $(m+n-9)(m+n) \div 3$, $\Rightarrow (m+n)(m+n-9) \div 9$

$\Rightarrow 9 \div 3$, $9 = 3$, тогда $(m+n-9)(m+n) \div 27$.

То есть хотя бы одна из скобок кратна 9.

Если $(m+n) \div 9$, то $(m+n-9) \div 9$ (т.к. $9 \div 9$)

Если $(m+n-9) \div 9$, то $(m+n) \div 9$

$\Rightarrow (m+n)(m+n-9) \div 81$, но $q^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 5^2 \div 81$

— противоречие.

② Пусть $A = 13p^2$.

9 — нечетное число \Rightarrow при добавлении его к $(m+n)$ четность меняется \Rightarrow либо $(m+n) \div 2$, либо $(m+n-9) \div 2$.

$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 \div 2 \Rightarrow p \div 2 \Rightarrow p = 2$.

~~$m+n-9 = m+n$~~

Переберем все делители $13 \cdot 2^4$, ~~тогда будет ясно, что $m+n$ или~~

1) $m+n-9 = 1 \Rightarrow m+n = 10$

~~$m+n = 10$~~ . $1 \cdot 10 \neq 13 \cdot 4$. — не подходит

2) $m+n-9 = 2 \Rightarrow m+n = 11$.

$2 \cdot 11 \neq 13 \cdot 4$. — не подходит

3) $m+n-9 = 4 \Rightarrow m+n = 13$

$4 \cdot 13 = 13 \cdot 4$ — подходит

4) $m+n-9 = 13 \cdot 2 = 26 \Rightarrow m+n = 35$

$35 \cdot 26 \neq 13 \cdot 4$. — не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \quad m+n-5 = 13 \cdot 4 \quad m+n = (13 \cdot 4 + 5)$$

$$13 \cdot 4 * (13 \cdot 4 + 9) \neq 13 \cdot 4 \quad - \text{не подходит}$$

То есть нам подходит только вариант $(m+n) = 13$

$$B = 75q^2 = mn(m+n-3) = mn(13-3) = 10mn : 2$$

$$\Rightarrow q \cdot 75q^2 : 2 \Rightarrow q : 2 \Rightarrow q = 2$$

$$75 \cdot 4 = 10mn$$

$$mn = 30$$

~~$m+n=13$
 $mn=30$
 $m=13-n$
 $(13-n)n=30$
 $13n-13n-30=0$~~

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n, \\ (13-n)n=30 \end{cases}$$

$$13n - n^2 - 30 = 0$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 30 = 169 - 120 = 49$$

$$n_1 = \frac{13-7}{2} = 3$$

$$m_1 = 10$$

$$n_2 = \frac{13+7}{2} = 10$$

$$m_2 = 3$$

Ответ: $(10; 3)$ $(3; 10)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle YZA = \angle ZYA$ а (к.т.к. $YM \parallel AX$ и AX -диссектор)
 $(\angle AZY = \angle ZAX = z$ - верт, $\angle ZYA = \angle XAC$ - соотв, $\angle BAX = \angle XAC$ - т.к. AX -диссектор)
 $\Rightarrow \triangle YAZ - p/d \Rightarrow YA = AZ = x = 6$

$$BZ = (k+1)AZ = (k+1)x$$

M (к.т.к.)

$$\Rightarrow k = \frac{AC}{BY} = \frac{18}{6} = 3$$

T. меншая гна $\triangle CYM$, AB -сек.

$$k \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$k \cdot 3 \cdot \frac{6}{2M} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2M} = 1$$

$$2M = 12 \Rightarrow YM = ZM + AZ = 20$$

$$\frac{YM}{AX} = \frac{CY}{AC} \Rightarrow AX = \frac{18 \cdot 20}{18 + 6} = \frac{40 \cdot 3 \cdot 20}{4} = 15$$

$$\frac{AX}{ZM} = \frac{AB}{BM} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{ZM}{AX} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$BX = \frac{15}{20} \cdot k \cdot BM = \frac{3}{4} BM \quad \left| \quad AB = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \right.$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow XC = \frac{3}{4} BX \quad \left| \quad k \cdot AB = AB = 24 \right.$$

$$BX + XC = BC \Rightarrow \frac{7}{4} BX = BC \Rightarrow BC = \frac{7}{4} BX$$

$$\Rightarrow BX = \frac{4}{7} BC$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} YZ}{AZ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$BX = \sqrt{AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos \alpha} = \sqrt{25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{61 - 40} = 3 \cdot \sqrt{21}$$

$$BC = \frac{7}{4} \cdot BX = \frac{7 \cdot 3 \sqrt{21}}{4} = \frac{21 \sqrt{21}}{4} \quad \text{Ответ: } \frac{21 \sqrt{21}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BZ}{\left(\frac{1}{k+1} + 1\right)BZ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{AC}{AB}} \cdot BC} = \frac{1+d}{2} = \frac{2M}{AX}$$

$$\frac{EM}{\frac{1}{k+1} + 1} = \frac{1+d}{2}$$

$$d = \frac{2}{\frac{1}{k+1} + 1} - 1 = \frac{AC}{AB}$$

$$2M = \frac{(1+d)AX}{2}$$

$$AX = \frac{2 \cdot 2M}{1+d}$$

Т. Меленко $g_{AB} \triangle EYM$ и сев. AB .

$$\frac{AC}{AY} \cdot \frac{YZ}{2M} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$k = \frac{4YZ}{2M} \cdot \frac{\frac{1}{2}BC}{BC} = 1$$

$$k \cdot \frac{YZ}{2M} = 2$$

$$2M = k \cdot \frac{YZ}{2} = 4k$$

$$AX = \frac{8k}{1+d}$$

$$\frac{YM}{AX} = \frac{YC}{AC}$$

$$\frac{YZ + 4k}{8k} = \frac{1+k}{k}$$

$$8 + 4k = \frac{8k(1+k)}{(1+d)k} = \frac{8(1+k)}{1+d}$$

$$8 + 4k = \frac{8(1+k)}{1 + \frac{2}{\frac{1}{k+1} + 1} - 1} = \frac{4(1+k)}{\frac{1}{\frac{1}{k+1} + 1}} = 4(1+k) \left(\frac{1}{k+1} + 1 \right)$$

$$8 + 4k = 4(1 + 1 + k) \quad k = k$$

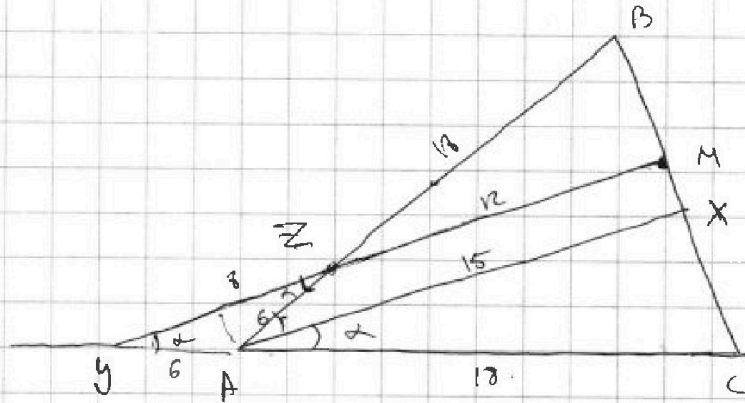


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC=18
AZ=6
YZ=8

Пусть $\frac{AC}{AY} = k$.

$YM \parallel AX \Rightarrow \frac{AC}{AY} = \frac{CX}{MX} = k$ — по т. Фалеса.

$$\begin{cases} CX + MX = CM = \frac{1}{2} BC \\ CX = k \cdot MX \end{cases} \Rightarrow (k+1)MX = \frac{1}{2} BC = BM$$

$$BC = 2(k+1)MX.$$

ВМН $\frac{BM}{MX} = \frac{BZ}{AZ}$ — по т. Фалеса

$$\frac{1}{2} BC (k+1)MX = \frac{BZ}{AZ}$$

$BZ = (k+1)AZ.$ $AB = BZ + AZ = (k+2)AZ =$
 $AC = kAY$ $AC = kAY.$ $= \left(\frac{1}{k+1} + 1\right) BZ.$

$YC = AC + AY = (1+k)AY = \frac{1+k}{k} AC.$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$ — по св-ву двух пересекающихся

~~$BX = \frac{AB}{AC} \cdot XC$~~ $XC = \frac{AC}{AB} \cdot BX = d \cdot BC.$

$ABX + XC = \left(1 + \frac{AC}{AB}\right) BX = BC. \Rightarrow BX = \frac{1}{1 + \frac{AC}{AB}} BC = \frac{AB}{AB+AC} BC$

$\triangle ZBM \sim \triangle BXZ$ ($ZM \parallel AX$) \Rightarrow
 $\Rightarrow \frac{ZM}{AX} = \frac{AB}{BZ} = \frac{ZB}{AB} = \frac{BM}{BX}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} - y^4 + \sqrt{x} + 5y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) (x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0.$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$1) \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5.$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{-x^2+5x+6} = 4(6+5x-x^2) - 20\sqrt{6+5x-x^2} + 25.$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ t \geq 0 \end{matrix}$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 9 = 81 - 36 = 45 = 9 \cdot 5$$

$$t_1 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{4}$$

$$t_2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4}$$

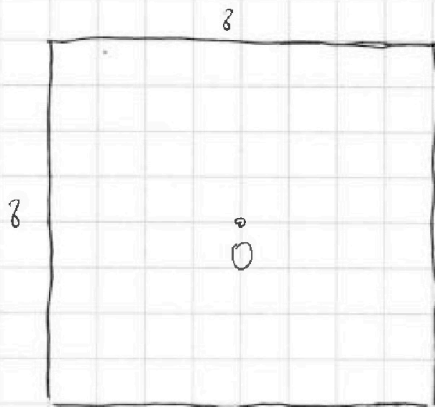


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов в каждом ряду - 9
в каждом столбце - 9
⇒ Всего $9 \cdot 9 = 81$ узлов.

Не считая раскраски, поугатонущей друг у друга поворотом одинаковыми поминим это всего раскрасок:
 $\frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \cdot 81$ раскрасок.

*³ Здесь каждая раскраска симметрична относительно центра поугатонущая 2 раза (т.к. при повороте на 180° она переходит сама в себя), а несимметричная - 4 раза (т.к. при повороте квадрата должен перейти в себя, то его можно повернуть на $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ$)

Для каждого узла, кроме центрального (точка 0) можно построить раскраску симметричную относительно центра и при этом только одну (точка 0 переходит при симметрии в себя)

Всего точек поугатонущая $\frac{80(81-1)}{2} = 40$ симметричных раскрасок (делим на 2, т.к. каждую раскраску считаем дважды: относительно точки и симметричной ей).

Пусть у нас а несимметричных раскрасок.
⇒ $4a + 2 \cdot 40 = 40 \cdot 81$ - по утверждению *
↑ кол-во симметричных раскрасок ↑ все раскраски (не учитывая поворот)

$$4a + 80 = 3240$$

$$4a = 3160$$

$$\text{Всего раскрасок: } a + 40 = 790 + 40 = 830$$

Ответ: 830.

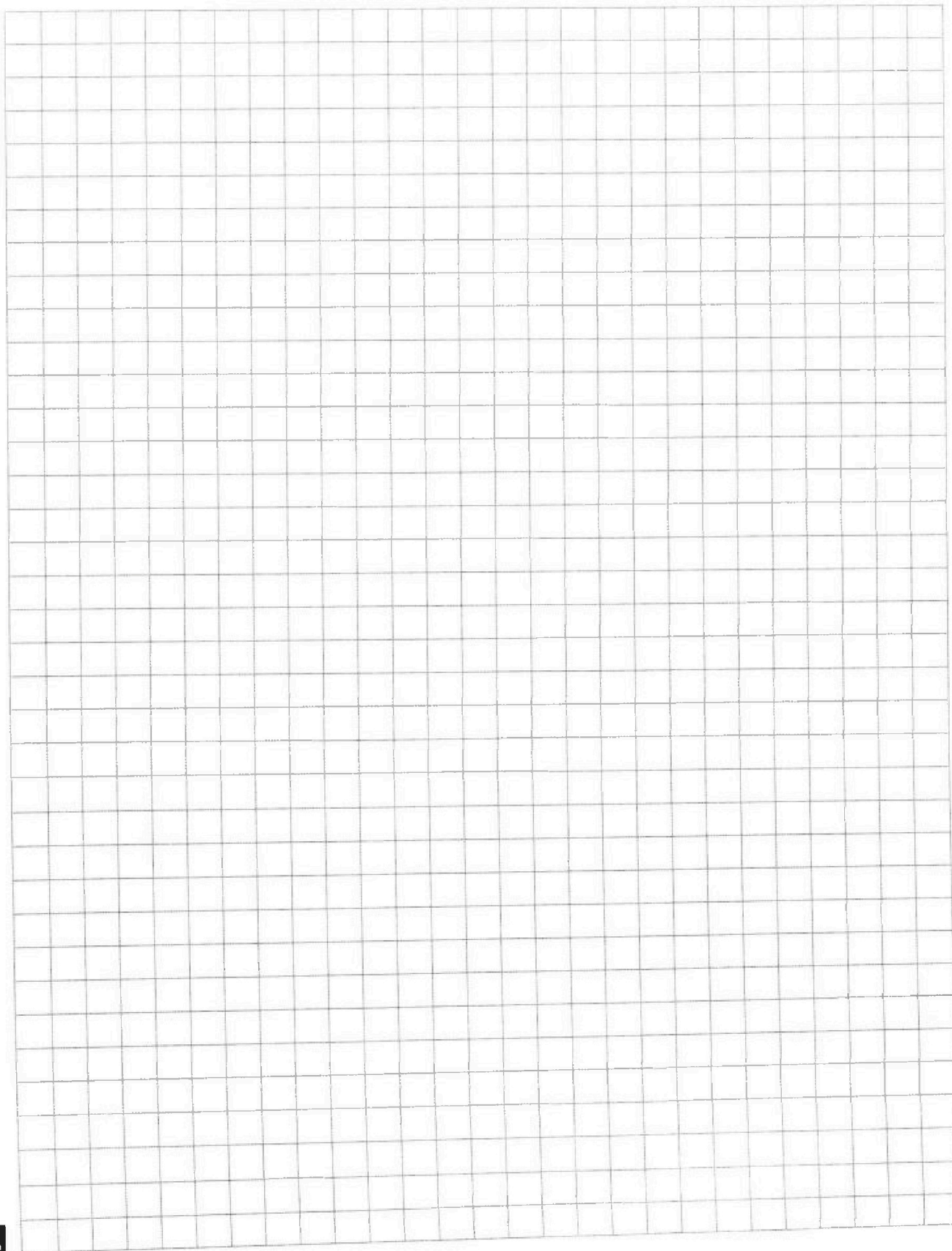


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





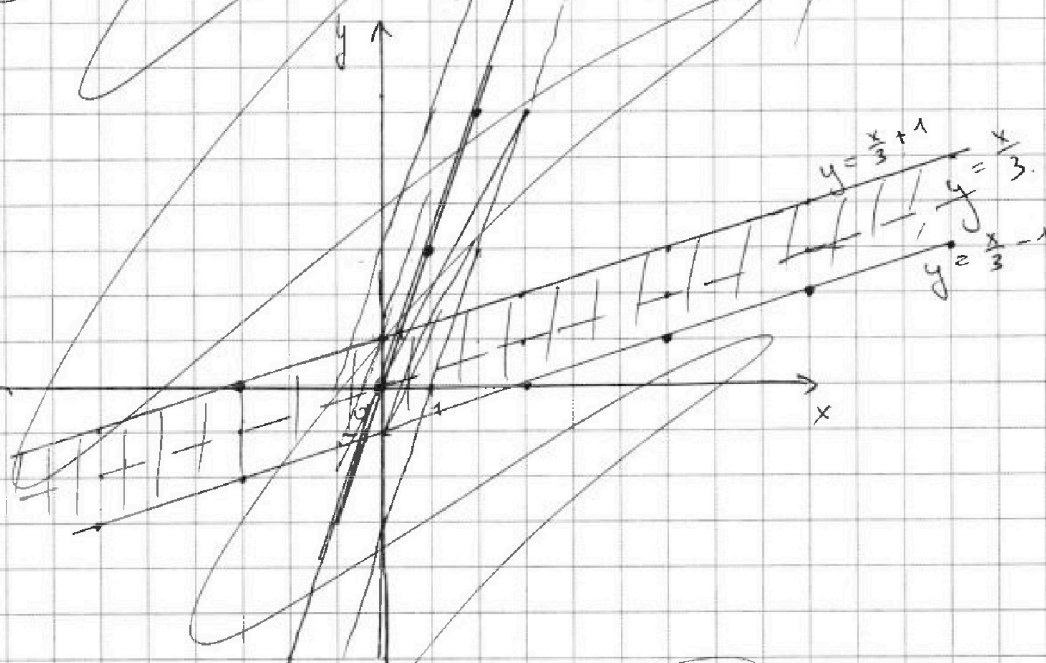
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нарисовать изображения определенных пар из множества точек
① и ② и нарисовать их пересечения.



$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\frac{d}{a-d} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{b-k}{b} = \frac{1}{2} \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(c+y)z}{c(z+x)}$$

$$\frac{b-k}{k} = \frac{y}{c+y} = 1$$

$$\frac{1}{2} \frac{a}{d} = \frac{b-k}{k} = \frac{c}{c+y} \cdot \frac{x}{z} = \frac{c}{c+y} = 2$$

c - узл.
k - узл.
x - узл.

$$\frac{e}{z+x} = \frac{c}{c+y}$$

$$e = \frac{c(z+x)}{c+y}$$

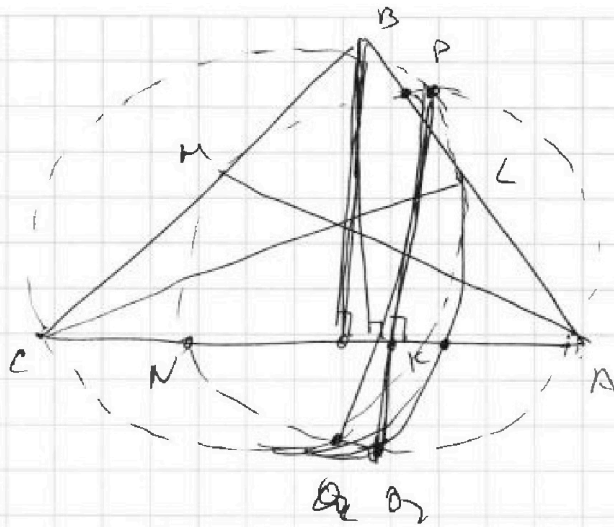


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

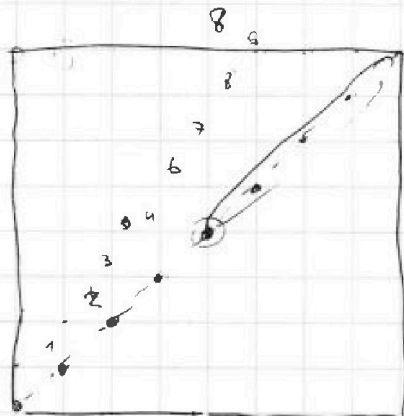
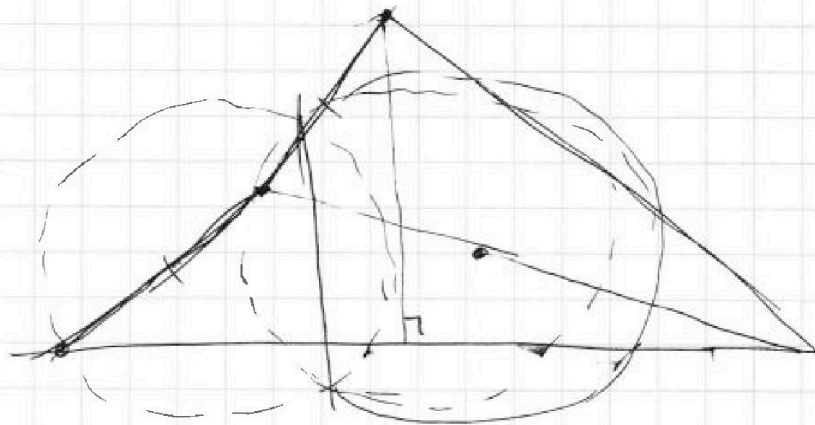
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AM = 8$
 $AB = 10$
 ~~$AK = \dots$~~



81 yjwob

$$\frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \cdot 81$$

~~1080~~

8

4ч $5 + 8 + 7$.

$$\frac{(1+9) \cdot 10 + 9}{2} - 5 = \textcircled{40}$$

$$810 \quad \frac{40 \cdot 81 + 40 \cdot 2}{4} = 810 + 20 = \textcircled{830}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-y} = +5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 - 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases} \quad 5x+5+6y-y^2$$

$$x^2(x^2-5) \quad x^4 - y^4 - 5x^2 + 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2) - 5(x^2-y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2-5) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-1-y^2+6}{x^2-1+y^2-6} \quad x \geq -1 \quad \begin{cases} 6-y \geq 0 \\ y \leq 6 \\ 0 \leq x^2+y^2 \leq \infty \end{cases} \\ & -xy + 6x - y + 6 \end{aligned}$$

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2) - 5(x^2-y^2)(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

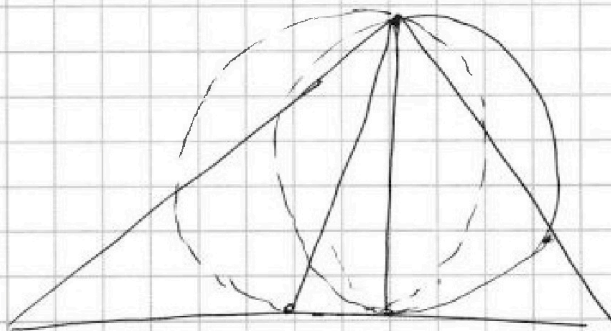
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) - 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2-5) = -1$$

$$\begin{aligned} & \text{then } 6+5x-y^2 \geq 0 \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 5x \geq 0 \\ & 5x \geq y^2 - 6 \geq -6 \end{aligned}$$

$$5x+1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3$$

$$d = \frac{a_5 - a_3}{6} = \frac{3x^2 - 3x + 3}{6} = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$a \cdot (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4d$$

$$3x^2 - 4d = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 - 3x - (3d + 2d) = 0$$

$$D = 9x^2 + 12(3 + 2d) = 9x^2 + 24d + 36$$

$$a_5 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$1 \quad -4 \quad +3 \quad -2 \quad -2$$

$$x = -1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & (x+1) \\ x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x$$

$$2x^2 + 2x$$

$$-2x - 2$$

$$-2x - 2$$

$$0$$

$$D = 4 + 8 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x+1 \\ x^4 + x^3 & x^3 + 3x^2 - 2 \end{array}$$

$$3x^3 + 3x^2$$

$$3x^3 + 3x^2$$

$$-2x - 2$$

$$-2x - 2$$

$$0$$

2 · 5 · 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\max (4y + 8x) - ?$$

$$4y + 8x = m$$

$$y = -\frac{8x}{4} + \frac{m}{4} = -2x + \frac{m}{4}$$

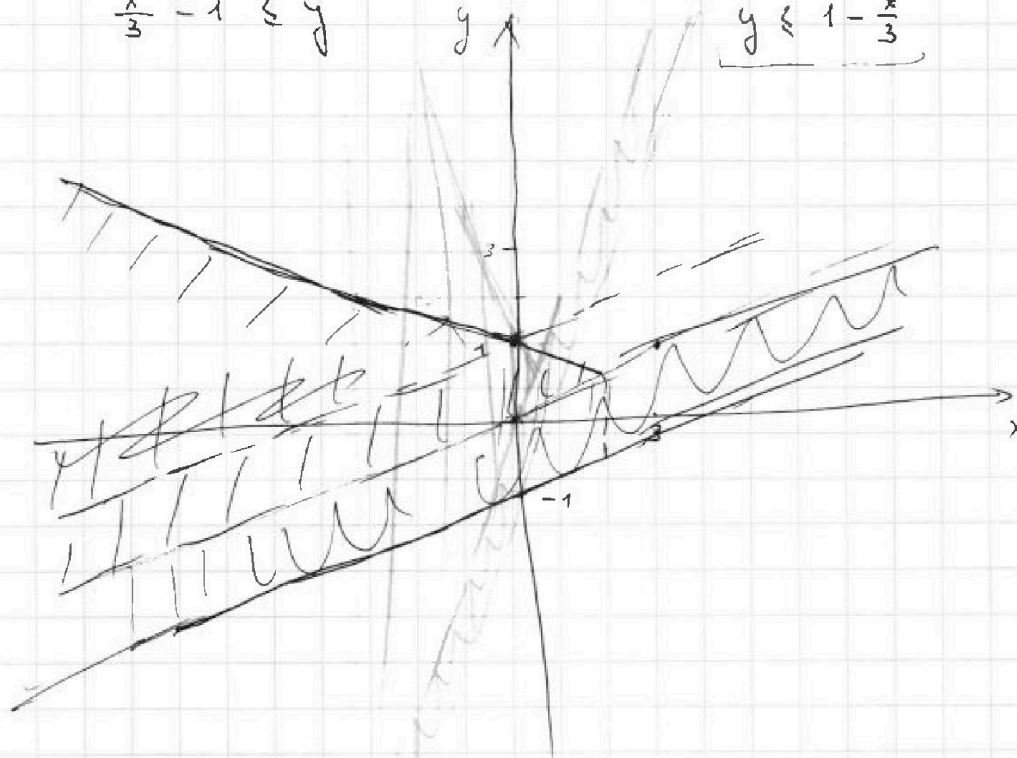
$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 & \textcircled{1} \\ |3x - y| \leq 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x \geq 3y \Rightarrow y \leq \frac{x}{3}$$

$$x \leq 3y \quad y \geq \frac{x}{3}$$

$$\frac{x}{3} - 1 \leq y$$

$$y \leq 1 - \frac{x}{3}$$



$$\textcircled{2} \quad 3x \geq y \\ y \geq 3x - 1$$

$$3x \leq y \\ y \leq 1 - 3x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$p, q \in \mathbb{N}, \text{ простое}$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$6n \quad 45$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = \underbrace{(m+n-9)}_{p} \underbrace{(m+n)}_{q} = 13p^2$$

① $9: p, q \quad p=3 \quad m+n=10$

~~$m+n=9=3$~~ $m+n-9=3$
 $m+n=12$

② $(m+n)q = 13$
 $(m+n) - 9 = 4$
 $m+n = 13$ $p=2$

$$B = mn(m+n-3) =$$

$$A = (m+n-9)(m+n) = 75q^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2 = 5^2 \cdot 3^3 \cdot X$$

$q=3$

$$B = mn(13-3) = 10mn = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$mn \cdot 10 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$mn = 5 \cdot 3 \cdot 2$$

1	30
2	15
3	10
5	6
15	2
10	3
6	5
30	1

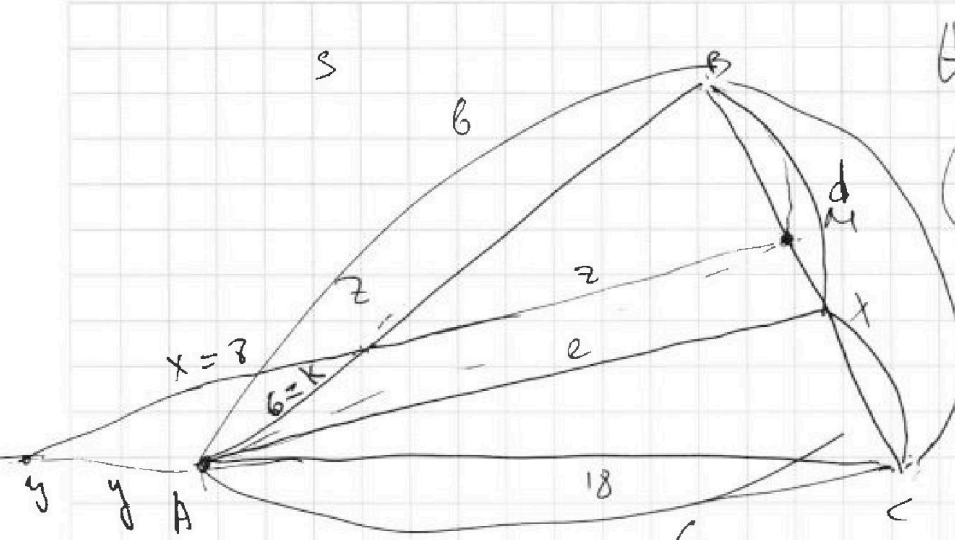


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{18}{a} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMC}}$$

$$\frac{AB}{18} = \frac{S_{ABM}}{S_{AMC} + S_{AMB} - S_{AMB}} = \frac{S_{ABM}}{2S_{AMB} - S_{AMB}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} = \frac{BX}{18 - BX}$$

$$\frac{AB}{18} = \frac{BX}{a - BX}$$

$$\frac{AB}{18} = \frac{BX}{a - BX}$$

$$\frac{BM}{MC} = 1$$

$$BM = \frac{1}{2}a$$

$$AB \cdot a - BX \cdot AB = BX \cdot 18$$

$$AB \cdot a = BX \cdot (AB + 18)$$

$$\frac{AB \cdot a}{AB + 18} = BX$$

$$\frac{MX}{\frac{1}{2}a} = \frac{BZ}{6}$$

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{AB}$$

$$\frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM} = \frac{AB \cdot (AB + 18)}{AB \cdot a} = \frac{AB \cdot AB - 6}{\frac{1}{2}a}$$

$$\frac{1}{2}a(AB + 18) = AB - 6$$

$$\frac{1}{2}a \cdot AB + 9a = AB - 6$$

$$AB = \frac{9a + 6}{1 - \frac{1}{2}a}$$

$$\frac{AC}{CY} = \frac{CX}{CM}$$

$$\frac{BM}{MZ} = \frac{AX}{AM}$$

$$\frac{AX}{BM} = \frac{BX}{BM}$$

$$\frac{MC \cdot BZ}{CY \cdot BM} = \frac{BC}{BM}$$

$$BZ \cdot \frac{MC}{BM} = \frac{BZ}{6} \cdot \frac{AY}{18 + AY} = 1$$

$$\frac{18}{AY} \cdot \frac{8}{2M} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$1 \cdot \frac{BAC}{CY} \cdot \frac{ZM}{AX} = \frac{12}{AB}$$