МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=10$, $AN=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение: Обозначим 1-ый член прогрессии за a_0, а разность за d, тогда из условия: (a, d - любые $\in \mathbb{R}$)

3-ий член:
5-ый член:
9-ый член:

$$\begin{cases} a_0 + 2d = 3x+3 & \Big| \cdot 4 \\ a_0 + 4d = (x^2+2x)^2 & \Big| \cdot 2 \\ a_0 + 8d = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8d = 12x + 12 - 4a_0 \\ 8d = 2(x^2+2x)^2 - 2a_0 \\ 8d = 3x^2 - a_0 \end{cases} \cancel{\Leftarrow}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - a_0 = 12x + 12 - 4a_0 \\ 3x^2 - a_0 = 2x^2(x+2)^2 - 2a_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a_0 = \cancel{8}\, 4x + 4 \\ 3x^2 + a_0 = 2x^2(x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \ominus$$

$\overset{1}{\cancel{2}}x^2 = \overset{1}{\cancel{2}}x^2(x+2)^2 \underset{-}{\cancel{+}} \overset{2}{\cancel{4}}x + \overset{2}{\cancel{4}}$ (причём заметим, что по найденному x мы всегда сможем определить a и d)

$\cancel{x^4 + 2x^3}$ $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$, заметим, что $x = -1$ - корень

$(x+1)\underbrace{(x^3 + 3x^2 - 2)}^{(*)} = 0$, заметим, что у $(*)$ $x = -1$ - корень

$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: -1; $-1 \pm \sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение: Исходная система $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3 \le x-3y \le 3 \\ -1 \le 3x-y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le 3y-x \le 3 \\ -1 \le y-3x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-3 \le x \le 3y+3 \\ 3x-1 \le y \le 3x+1 \end{cases},$$

тогда $x \ge 3y-3 \ge 3\cdot(3x-1)-3 = \overset{9}{\cancel{6}}x-6 \Leftrightarrow 6 \ge 8x$ причём равенство достигается при $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, аналогично ~~$y \le 3x+1 \le 9y+9+1 = 9y+10 \Leftrightarrow$~~ тогда $\max(4y+8x)$ достигается при $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, а $\max = 6+5 = 11$.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение: Из условия:

$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$

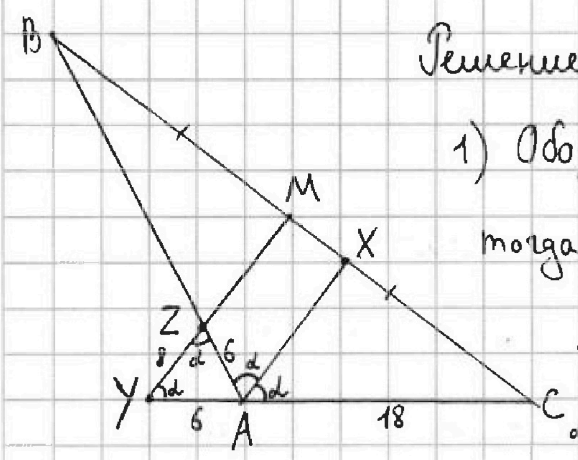
Заметим, что если $m+n$ - чётное, то и A чётное, а если $m+n$ - нечётное, то $m+n-9$ - чётное, а значит $A \vdots 2$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, ~~аналогично~~ $\cancel{B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)}$ тогда либо $13p^2 \vdots 2 \Leftrightarrow p \vdots 2 \Leftrightarrow p = 2$, т.к. p - прос. либо $75q^2 \vdots 2 \Leftrightarrow q \vdots 2 \Leftrightarrow q = 2$, т.к. q простое, тогда

$\left[\begin{array}{l}(m+n)(m+n-9) = 52 \\ (m+n)(m+n-9) = 300\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0 \ (1) \\ (m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0 \ (2)\end{array}\right.$, из первого:

$m+n = -4$ или $m+n = 13$, но $m, n \in \mathbb{N}$, значит $m+n = 13$, а из второго: $D = 81 + 1200 = 1281 = 3 \cdot 7 \cdot 61 \neq k^2, k \in \mathbb{Z}$, значит $m+n = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$ но $m+n \in \mathbb{N}$ - противоречие, значит число $A = 13p^2 = 52$, а $m+n = 13$, тогда $B = 75q^2 = mn^2 + m^2n - 3mn = mn(m+n-3) = 10mn \vdots 2$, а значит $75q^2 \vdots 2 \Leftrightarrow q \vdots 2 \Leftrightarrow q = 2$, т.к. q - простое, тогда

$\begin{cases} m+n = 13 \\ 10mn = 300 \\ m, n \in \mathbb{N}\end{cases}$; $\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \\ m, n \in \mathbb{N}\end{cases}$, а значит по т. Виета: m, n - корни ур-ния $t^2 - 13t + 30 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = 10$,

тогда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} n = 3 \in \mathbb{N} \\ m = 10 \in \mathbb{N}\end{cases} \\ \begin{cases} n = 10 \in \mathbb{N} \\ m = 3 \in \mathbb{N}\end{cases}\end{array}\right.$ Ответ: $(3; 10)$, $(10; 3)$.



Решение:

1) Обозначим $\angle BAX = \angle CAX = \frac{1}{2}\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle MYA = \angle XAC = \alpha$ – как соотв. при $MY \parallel AX$ и сек. AY и $\alpha = \angle YZA = \angle BAX$ – как накрест лежащ. при $MY \parallel AX$ и сек. AB, тогда $\triangle AZY$ – р/б, тогда $AZ = AY = 6$

2) По т. косинусов в $\triangle YZA$: $\cos\alpha = \frac{YZ^2 + ZA^2 - YA^2}{2YZ \cdot ZA} = \frac{64+36-36}{2\cdot 8\cdot 6} = \frac{64}{2\cdot 8\cdot 6} = \frac{2}{3}$, тогда $\cos\angle BAC = \cancel{\cos 2\alpha =} 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

3) По т. Менелая в $\triangle ABC$: $\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BZ}{AZ}\cdot\frac{AY}{YC} = 1 \iff \frac{1}{1}\cdot\frac{BZ}{6}\cdot\frac{6}{24} = 1$

М-серед. ВС

откуда $BZ = 24$, а $AB = BZ + AZ = 24 + 6 = 30$.

4) По т. косинусов в $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC =$
$= 900 + 324 + 2\cdot 30\cdot 18\cdot\frac{1}{9} = 12\cdot 75 + 12\cdot 27 + 12\cdot 10 = 12\cdot 112$
$= 24\cdot 56 = 8\cdot 3\cdot 8\cdot 7 = 21\cdot 8^2$, тогда $BC = 8\sqrt{21}$

Ответ: $8\sqrt{21}$.

Решение: Рассмотрим второе ур-ние системы:

$x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2$, где из О.Д.З. $x,y\geq 0$.

$x^4-y^4+5(x^2-y^2)+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$; $(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+$

$+5(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$;

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})\Big(\underbrace{\underset{\geq 0}{(x+y)}\underset{\geq 0}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\underset{>0}{(x^2+y^2+5)}+\underset{>0}{1}}_{>0}\Big)=0$, а значит $\sqrt{x}=\sqrt{y}\Leftrightarrow$

$(x,y\geq 0)$

$x=y\geq 0$, тогда подставляя в 1-е ур-ние системы:

$\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=2\sqrt{6+5x-x^2}\\ x\geq 0\end{cases}$, заметим, что $6+5x-x^2=(x+1)(6-x)$

а $2\sqrt{(x+1)(6-x)}=\underbrace{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{6-x})^2}_{7}-(\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x})^2$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=7-(\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x})^2\\ x\geq 0\end{cases}$;

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x})^2+(\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x})-2=0\\ x\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=1\\ \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=-2\end{array}\right.\\ x\geq 0\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+1=1+2\sqrt{6-x}+6-x\\ x+1=4-4\sqrt{6-x}+6-x\end{array}\right.\\ x\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-3=\sqrt{6-x}\\ 4\sqrt{6-x}=9-2x\end{array}\right.\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-6x+9=6-x\\ 96-16x=81-36x+4x^2\end{array}\right.\\ x\geq 3\\ 2x\leq 9\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-5x+3=0\ (1)\\ 4x^2-20x-15=0\ (2)\end{array}\right.\\ 3\leq x\leq \frac{9}{2}\end{cases}$ (1): $D=25-12=13$

$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, заметим, что $\frac{5-\sqrt{13}}{2}<\frac{5}{2}<3$,

а $\frac{5+\sqrt{13}}{2}>\frac{5+1}{2}=3$ и $\frac{5+\sqrt{13}}{2}<\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}$ V.

(2) $D/_4=100+60=160$, $x=\frac{10\pm4\sqrt{10}}{4}=\frac{5\pm2\sqrt{10}}{2}$, при этом $\frac{5-2\sqrt{10}}{2}<\frac{5}{2}<3$

и $\frac{5+2\sqrt{10}}{2}>\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2}$, значит единственный подходящий корень:

$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$. Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2};\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

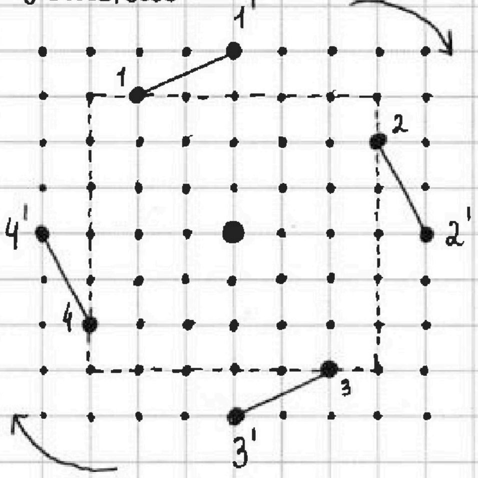
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Заметим, что для каждой точки (узла) в квадрате (кроме центральной) существует ещё ровно 3 точки в квадрате, которые в неё переходят при повороте, т. к. квадрат симметричен по вертикали и горизонтали, а значит и для любой пары точек (кроме центральной) существует ровно 3 другие пары, которые в неё переходят при повороте. В случае, когда в паре участвует центральная точка, пара определяется второй (не центральной) точкой, а, как мы выяснили, их всего 4 для каждой такой пары. Тогда кол-во способов перекрасить 2 узла в белый цвет согласно условию равно кол-вд способов выбрать 2 точки, делённому на 4, или

$$\frac{C_{81}^{2}}{4} = \frac{81!}{79!\cdot 2!\cdot 4} = \frac{81\cdot \cancel{80}^{10}\cdot \cancel{79!}}{\cancel{79!}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{4}} = 810.$$

(т. к. всего точек $9\times 9 = 81$)

Ответ: 810.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \end{cases} \Rightarrow x \geq y$ $3y \geq y \Leftrightarrow y \geq 0$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

$\geq 1 \quad \geq -\sqrt{6}$

$2\cdot\sqrt{\frac{49}{4}}$

$2\cdot\frac{7}{2} = 7$

$|8x - 24y| \leq 24$; $\begin{cases} |8x + 4y - 28y| \leq 24 \\ |4y + 8x - 20x| \leq 4 \end{cases}$ $\geq 6 - \sqrt{6}$

$6 + 5x - x^2 \leq ?$

$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |9x - 3y| \leq 3 \end{cases}$

$5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 5$

$D/4 = 9 - 25 \leq 0$

$x^2 - 5x - 6 + ? \geq 0$

$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n)$

$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$

$A = (m+n)(m+n-9) = 13q^2$; $q = 2$

$B = mn(m+n-3) = 75p^2$; $p = 2$ $3\cdot 427 = 3\cdot 7\cdot 61$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \overset{\in N}{(m+n)}\overset{\in N}{(m+n-9)} = 52 \\ mn(m+n-3) = 300 \end{cases} \\ \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 300 \\ (m+n)(m+n-3) = 52 \end{cases} \end{array}\right.$

$(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$

$m+n = 13$ $mn \cdot 10 = 300$

~~$m+n = -4$~~ $mn = 30$

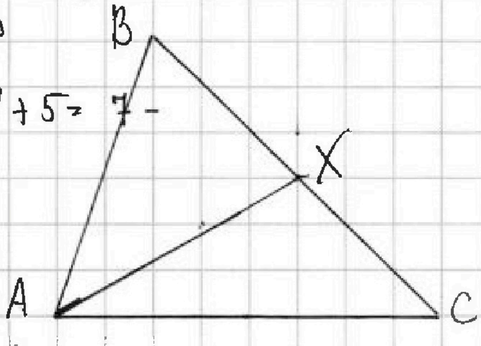
$m = 3 \; n = 10 \quad n = 10 \; n = 3$

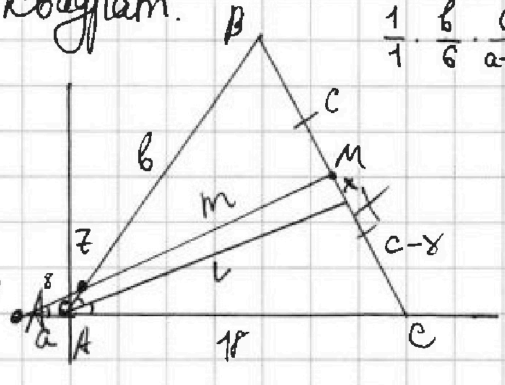
$(m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0$ $x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - 6$ $\frac{18}{c-x} = \frac{b+6}{c+x}$

$D = 81 + 1200 = 1281$ – не полный квадрат.

$\frac{1}{1}\cdot\frac{b}{6}\cdot\frac{a}{a+18} = 1$

$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 7 -$





$(m+n)(m+n-9) = 52$; $m+n = 13$ $y - 6 = \frac{25}{4}$

300

$y = \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \frac{49}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1 1-ый: $a-2d$, 2-ой: $a-d$ 3-ий: $\underset{(3x+3)}{a}$, 4-ый: $a+d$, 5ый $\underset{(x^2+2x)^2}{a+2d}$

9-ый: $\underset{3x^2}{a+6d}$; $\begin{cases} 3x+3+2d=(x^2+2x)^2 \\ 3x+3+6d=3x^2 \\ x+1+2d=x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+3+2d=(3x+1+2d)^2 \\ x+1+2d=x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+3+2d=9x^2+1+4d^2+4d+6x+12xd \\ x^2=x+1+2d \Rightarrow 2d=x+1-x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} 9x+9+18d+1+4d^2+4d+6x \\ +12xd-3x-3-2d=0 \end{cases}$

$3x(3+2+4d-1)+7+4d^2+20d=0$

$\quad 2x+2-2x^2 \quad (x+1-x^2)^2 \quad (10x+10-10x^2)$

$\begin{cases} a+2d=3x+3 \mid \cdot 4 \\ a+4d=x^4+4x^3+4x^2 \mid \cdot 2 \\ a+8d=3x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 8d=12x+12-4a \\ 8d=2x^4+8x^3+8x^2-2a \\ 8d=3x^2-a \end{cases}$; $\begin{cases} 3x^2-a=12x+12-4a \\ 3x^2-a=2x^4+8x^3+8x^2-2a \end{cases}$

$\cancel{3x^2+3x}$

$\begin{cases} x^2+a=4x+4 \\ 3x^2+a=2x^4+8x^3+8x^2 \end{cases}$; $2x^2=2x^4+8x^3+8x^2-4x-4$

$2x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$

$(x+1)(x^3+3x^2-2)=0$

$(x+1)^2(x^2+2x-2)=0$

$D=1+2=3$

$(x+1)^2\left(x-\frac{-1-\sqrt3}{1}\right)\left(x-\frac{\sqrt3-1}{1}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1\pm\sqrt3 \end{array}\right.$

$x \geq 3y$:

~~$x-3y\leq 3$; $x\leq 3+3y$~~

$4(x+2y)$

2. $\begin{cases} |x-3y|\leq 3 \\ |3x-y|\leq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} |6y-2x|\leq 6 \\ |6x-2y|\leq 2 \end{cases}$

$4y+8x=ax-3ay+3bx-by$

$y(4+3a+b)=x(a+3b-8)$

$\begin{cases} 4+3a+b=0 \\ a+3b-8=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4+3\cdot(8-3b)+b=0 \\ a=8-3b \end{cases}$

$3y-x+3x-y$

$2y+2x$

$\begin{cases} 28-8b=0 \\ a=8-3b \end{cases}$; $\begin{cases} b=\frac72 \\ a=\frac{16}{2}-\frac{21}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b=\frac72 \\ a=-\frac52 \end{cases}$

$x^2-6xy+9y^2\leq 9$

$9x^2-6xy+y^2\leq 1$; ~~$10x^2+10y^2\leq 10$~~ ~~$x^2+y^2\leq 1$~~

$2x^4+8x^3+8x^2=3x^2+3x+3$

$2x^4+8x^3+5x^2-3x-3=0$

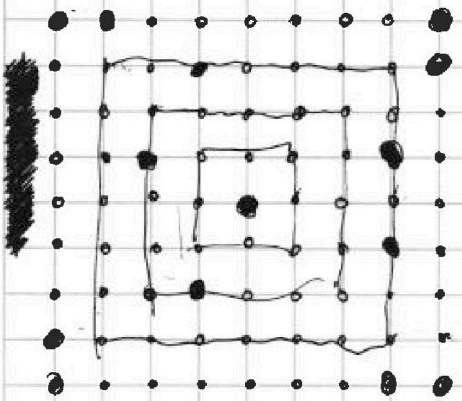
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$0 \le a \le \frac{7}{2}$



C_{81}^{2}

$\frac{81!}{79!\cdot 2!\cdot 4} = \frac{81\cdot 80\cdot 79!}{79!\cdot 2\cdot 4} = 810$

$\begin{cases} |x-3y| \le 3 \\ |3x-y| \le 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -3 \le x+3y \le 3 \\ -1 \le 3x-y \le 1 \end{cases}$

$-1 \le x-y \le 1 \mid \cdot 2$; $-2 \le 2x-2y \le 2$

$-1 \le 3x-y \le 1 \mid \cdot 2$; $-2 \le 6x-2y \le 2$

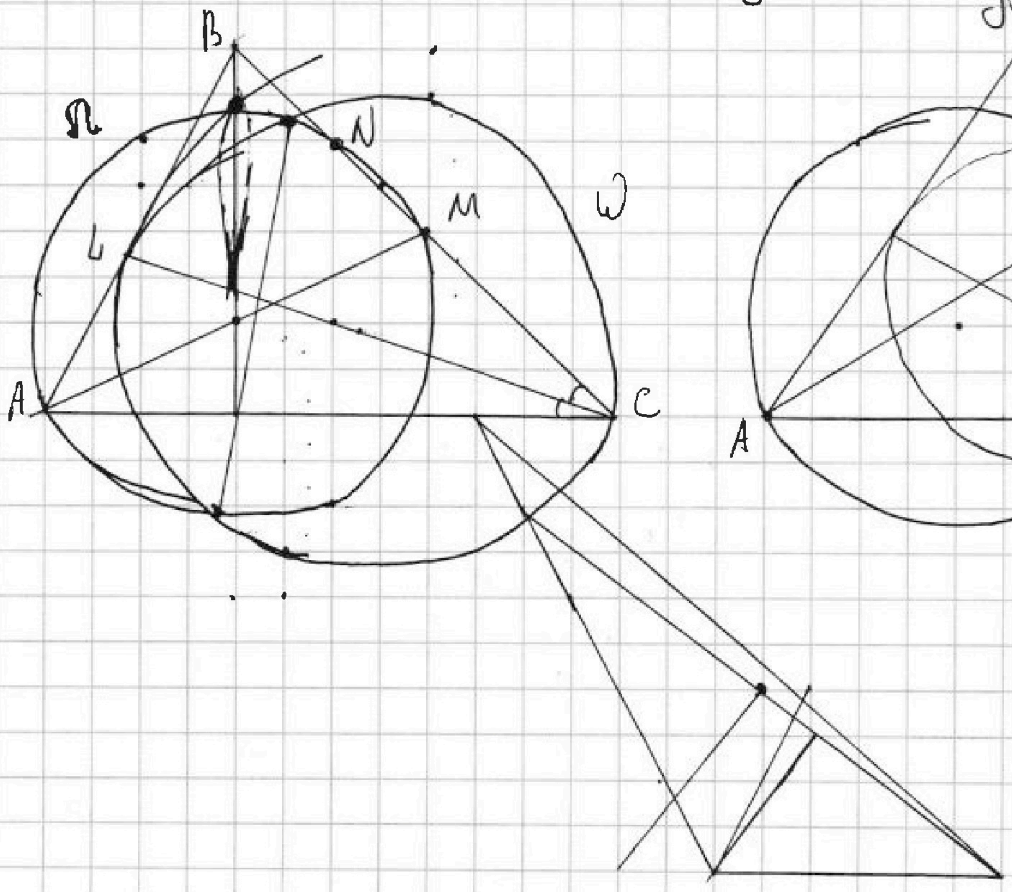
$8x-4y \le 4$

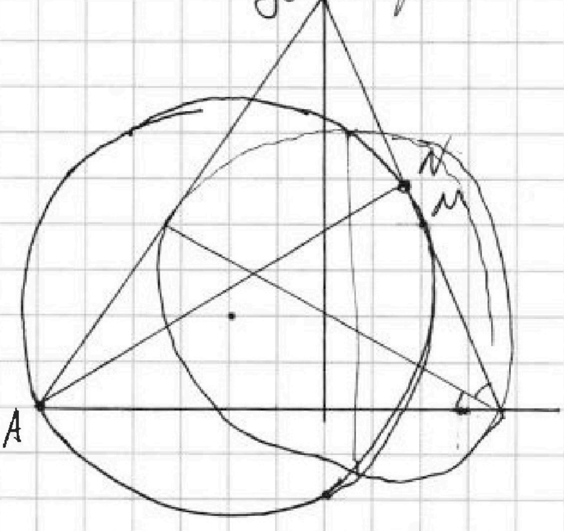
$3y-3 \le x \le 3y+3$; $3x-3 \le y \le 3x+3$

$3y-3 \le 9x \le 3y+3$

$\cancel{x \le 3y+3}$

$\cancel{y \le 9x+3}$





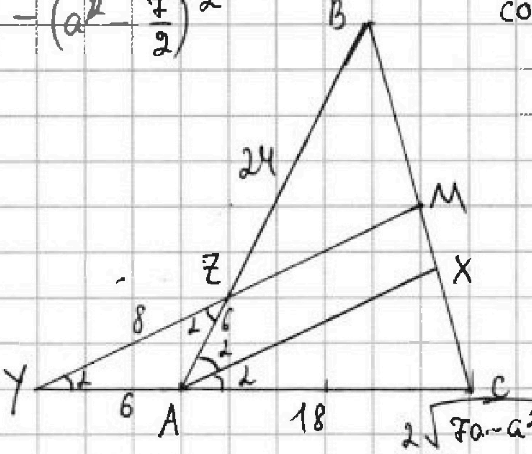
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{49}{4} - \left(a^2 - \frac{7}{2}\right)^2$



$\cos\alpha = \frac{64+36-36}{2\cdot 8\cdot 6} = \frac{8\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 8\cdot 6} = \frac{2}{3}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{b}{6}\cdot\frac{6}{24} = 1$

По т. косинусов: $BC^2 = \cancel{AB^2 + AC^2}$

$= 900 + 324 + 2\cdot 30\cdot 18\cdot\frac{1}{9} =$

$= 900 + 324 + 120 = 6\cdot 224 = 12\cdot 112 = 24\cdot 56$

$9\cdot 100 \quad 9\cdot 36 \quad 6\cdot 20 \quad 6\cdot 150 \quad 6\cdot 54 \quad 12\cdot 10 \quad 12\cdot 75 \quad 12\cdot 27 \quad 8\cdot 3 \quad 8\cdot 7$

$2\sqrt{7a-a^2} \le 2\cdot\frac{7}{2} \le 7$

$2\sqrt{7a-a^2} - 5$

$7a - a^2 \le \frac{49}{4} \qquad a^2 - 7a + ? \ge ?$

$\left(a - \frac{7}{2}\right)^2$

$$\begin{cases}\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}\\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2\end{cases}$$

$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 2\sqrt{a(7-a)}$

$7 - 2\sqrt{a(7-a)} = 4a(\cancel{7-a}a)$

$-10\sqrt{a(7-a)} + 25$

$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$

$(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + 5(x-y)(x+y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$

$(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})\left((x^2+y^2+5)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 1\right) = 0$

$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 2\sqrt{a(7-a)}$

$x = y \ge 0 \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

$\sqrt{x+1} = a, \quad \sqrt{6-x} = b$

$(6-x)(x+1)$

$x+1 = a \Rightarrow x = a-1$

$b = 6 - x = 6 - a + 1 = 7 - a$

$\sqrt{a} + 5 = \sqrt{7-a}(2\sqrt{a}+1)$

$a + 10\sqrt{a} + 25 = (7-a)(4a + 4\sqrt{a} + 1)$

$a - b + 5 = 2ab \quad ; \quad 5 = b - 2ab - a$

$a + 10\sqrt{a} + 25 = 28a + 28\sqrt{a} + 7 - 4a^2 - 4a\sqrt{a} - a$

$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-x}\,(2\sqrt{x+1} + 1)$

$x + 1 + 5\sqrt{x+1} + 25 = (6-x)(4x + 4 + 4\sqrt{x+1} + 1)$

$4a^2 + 4a\sqrt{a} - 26a - 18\sqrt{a} + 18 = 0$

$2t^4 + 2t^3 - 13t^2 - 9t + 9 = 0$

$2\cdot 3^4 - 2\cdot 3^3 - 13\cdot 3^2 + 27 + 9$

$4\cdot 3^3 - 13\cdot 3^2 = -3^2$