



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

нужна 6x - 4y = 0

и x = 2y

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CE как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Пусть a_1 - первый член заданной арифметической прогрессии, d - её разность. Тогда пятый член прогрессии равен $a_1 + 4d$, девятый член равен $a_1 + 8d$, одиннадцатый член равен $a_1 + 10d$.

По условию,

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 6x + 18 & (1) \\ a_1 + 8d = (x^2 - 4x)^2 & (2) \\ a_1 + 10d = -3x^2 & (3) \end{cases}$$

Вычитем (1) из (2): $2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 \Rightarrow 2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$. Домножим обе части полученного уравнения на 2:

$$4d = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 \quad (4)$$

Вычитем (2) из (3): $4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 \Rightarrow 4d = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \Rightarrow 4d = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \quad (5)$

Из (4) и (5) уравнений получаем:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 &= -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 &= 0 \quad | : 3 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \end{aligned}$$

Пусть $f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$

Разделим $f(x)$ на $(x-2)$ по способу Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -8 & 17 & -4 & -12 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получаем, что $f(x) = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$

Разделим $x^3 - 6x^2 + 5x + 6$ на $x-2$ по способе Горнера:

	1	-6	5	6
2	1	-4	-3	0

Получаем, что $f(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$D/4 = 4+3=7$

Ответ: $x \in \{2, 2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 - 4x \leq -3y \leq 6 - 4x \\ -8 - 3x \leq -4y \leq 8 - 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq y \geq -2 + \frac{4}{3}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq y \geq -2 + \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq -2 + \frac{3}{4}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq -2 + \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) \geq -4 \\ x(\frac{5}{3} - \frac{3}{4}) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \frac{7}{12} \geq -4 \\ x \cdot \frac{7}{12} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{48}{7} \\ x \leq \frac{48}{7} \end{cases} \quad (1)$$

Планка

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} -6 + 3y \leq 4x \leq 6 + 3y \\ -8 + 4y \leq 3x \leq 8 + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq x \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq x \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} \\ y \cdot \frac{7}{12} \leq \frac{6}{4} + \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{50}{12} \\ y \leq \frac{50}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{50}{7} \\ y \leq \frac{50}{7} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 7(2x + y) \geq 7\left(2 \cdot -\frac{50}{7} - \frac{50}{7}\right) = -96 - 50 = -146$$

Равенство достигнуто при $(x, y) = \left(-\frac{50}{7}, -\frac{50}{7}\right)$

Значит, это значение условие выполнено.

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть $A = 13p^2$

Разберем случаи, учитывая, что p — простое

$m-n$	1	13	$13p$	$13p^2$	p	p^2	-1	-13	$-13p$	$-13p^2$	$-p$	$-p^2$
$m-n+9$	$13p^2$	p^2	p	1	$13p$	13	$-13p^2$	$-p^2$	$-p$	-1	$-13p$	-13
p	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$\sqrt{22}$	$-\frac{3}{4}$	-	$\frac{3}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{\frac{10}{13}}$	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{22}$

Последний разделим $m-n = p^2-4$ и $mn = -13$

Подставляем в B:

$$\begin{cases} 7mn = 3g^2 \\ -10mn = 3g^2 \end{cases}$$

- нет решений, т.к. $m, n \in \mathbb{N}$

$$7mn = 3g^2 \Rightarrow 3g^2 : 7 \Rightarrow g^2 : 7 \Rightarrow g = 7$$

$$\text{При } \begin{cases} 7mn = 3 \cdot 49 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn = 21 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ (m+n)^2 = 16 + 4 \cdot 21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=4 \\ m+n=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m,n)=(7,3) \\ (m,n)=(-3,-7) \end{cases} \\ & \begin{cases} m-n=-4 \\ mn=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=-4 \\ m+n=-10 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Пусть $A = 3g^2$

Разберем случаи. Будем обозначать $..^-$ исходящую из 9

$m-n$	1	3	$3g$	$3g^2$	9	g^2	-1	-3	$-3g$	$-3g^2$	-9
$m-n+9$	$3g^2$	g^2	9	1	$3g$	3	$-3g^2$	$-g^2$	-9	-1	$-3g$
g	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ни один случай не удастся.

Ответ: $(7,3), (-3,-7)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

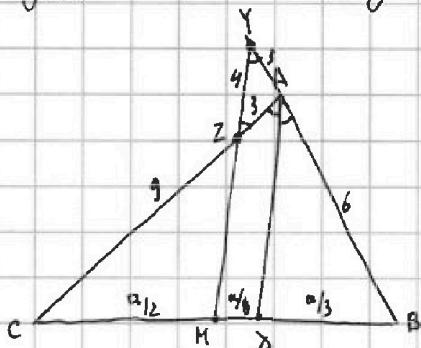
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть $\angle CAB = d$. Тогда $\angle CAZ = d$, т.к. AX - биссектриса $\angle A$.

Из параллельности $MY \parallel AX$ получаем, что $\angle YZA = \angle ZAX = d$



$\angle ZAB$ - внешний для $\triangle AZY$.

Значит, $\angle YZA + \angle YZA = \angle ZAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle YZA = 2d - d = d$$

Но если $\angle AZY = \angle YZA$,

вывод: $\triangle AZY$ - р/д ($AZ = AY = 3$)

Пусть $BC = a$. AM - медиана $\Rightarrow CM = MB = \frac{1}{2}a$

$MZ \parallel AX \Rightarrow \angle CZM = \angle CAZ$, $\angle CAZ$ - одинарный при $\angle CZM$ и $\angle CAZ$.

Значит, $\triangle CZM \sim \triangle CAZ$ по двум углам.

$$\text{Отсюда } \frac{CZ}{CA} = \frac{CM}{CX} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + MX} \Rightarrow \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot MX \Rightarrow \frac{a^2}{6} = \frac{a}{2} \cdot MX \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot MX = \frac{a^2}{6}$$

$$\Rightarrow MX = \frac{a}{3} \Rightarrow MX = \frac{a}{6}$$

$$\frac{a}{2} = MB = MX + XB = \frac{a}{6} + XB \Rightarrow XB = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

$$\text{По свойству биссектрисы, } \frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XC} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{6}} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{6}} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{a/3}{2a/6} \Rightarrow \frac{AB}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 6$$

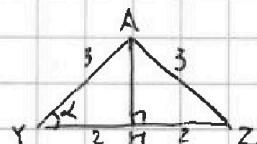
Рассмотрим р/д $\triangle AYZ$:

Высота AY этого треугольника является медианой. Значит, $HY = \frac{a}{2} = 2$

$$\cos d = \frac{HY}{AY} = \frac{2}{3}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 144 \cos 2\alpha. \quad (1)$$

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$. Подставив значение $\cos \alpha = \frac{2}{3}$:

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{9} - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

Подставим 6 (1): $BC^2 = 180 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$

$$\Rightarrow BC = 16$$

Ответ: 16

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

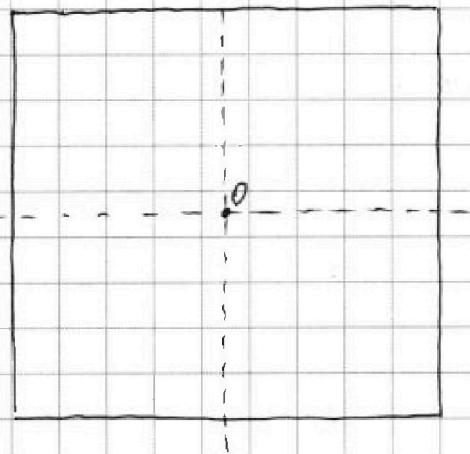


- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Заметим, что было 6 групп

известно покрашено 100 точек

Найдем среднюю ~~квадратную~~

или квадратную, параллельные стороны квадрата делают это на 9 ~~квадрата~~ частей.

Найдем эти части ~~квадратами~~.

~~квадратами~~ нет таких.

Заметим, что на границе ~~затенить~~ нет точек.

Если боковые точки имеют 6 одинаковых цветов, то есть еще 3 раскраски, полученные из этой поворотом. ~~то есть~~

Есть C_{25}^2 и 6 ведется 2 боковые грани 6 цветами. ~~то есть~~

Если боковые грани имеют 6 цветов по сторонам квадратов, то таких раскрасок $25 \cdot 25$

Если боковые грани имеют 6 цветов по диагонально прописанным квадратам, то если было есть $25 \cdot 25$ таких раскрасок

$$\text{Итого получает} \quad \frac{25 \cdot 24}{2} + 2 \cdot 25^2 = 25 \cdot 12 + 25 \cdot 50 + 25 \cdot 62 =$$

$$= \cancel{\cancel{1550}} \text{ раскрасок}$$

$$\text{Ответ: } \cancel{\cancel{1550}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} m-n = -1 \\ m-n+g = -13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 1 \\ p^2 = -\frac{g}{13} \end{cases} \text{ - не удл. ун.}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n+g = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p=2 \end{cases} \text{ - подходит}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p \\ m-n+g = -p \end{cases} \Rightarrow g = 12p \text{ - не удл. ун.}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p^2 \\ m-n+g = -1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = -10 \text{ - не удл. ун.}$$

$$|4x-3y| \leq 6$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$-16 \leq 2x \leq -16$$

Решение задачи, когда $p=2, m-n=13$. Тогда $3p^2 = B = (13+3)m n$

$$\Rightarrow 16mn = 3g^2$$

Отсюда $3g^2 : 16 \Rightarrow g^2 : 16$, то есть $6, g^2, 2$ входят в отложенные и обозначены 2

$$2. \text{ Пусть } A = 3g^2, g - \text{ простое}$$

Разберем случаи:

$m-n$	1	3	$3g^2$	$3g^2$	-1	-3	$-3g^2$	$-3g^2$
$m-n+g$	$3g^2$	g^2	9	9	$-3g^2$	$-g^2$	-9	-9
g	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	$\sqrt{12}$	$-\frac{g}{2}$	$-\frac{g}{2}$	-	-	-	-

$$|4x-3y| \leq 6$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$7(2x+y)$$

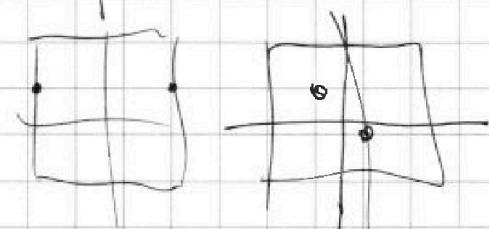
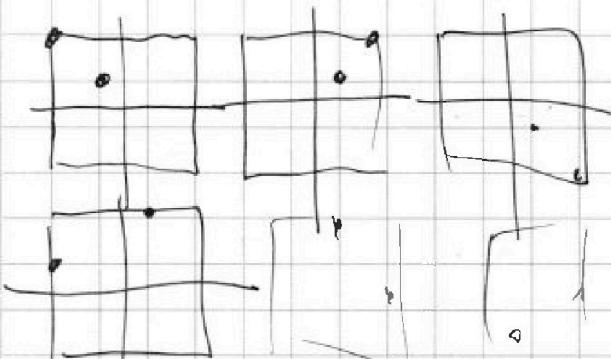
$$7x - 3y \leq 6$$

$$3x - 4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x-3y \leq 6$$

$$-6 \leq 9x \quad -6 + 3y \leq 4x$$

$$-6 - 4x \leq$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание № 2.

$$(*) \begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \\ -14 \leq 7x-7y \leq 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq x-y \leq 2 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow} \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq y-x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -16 \leq 2y \leq 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \stackrel{1 \cdot 2}{\Rightarrow} \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \stackrel{+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -24 \leq 2x+y \leq 24 \quad | \cdot 7 \Rightarrow -168 \leq 14x+7y \leq 168$$

Поэтому $14x+7y \geq -168$. $14x+7y = 5(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})$

Приведенное значение -118 достигается при $x = -8, y = -8$.

Действительно: $14 \cdot (-8) + 7 \cdot (-8) = -112 - 56 = -118$.

Проверка, что (*) верно:

$$\begin{cases} |4 \cdot (-8) - 3 \cdot (-8)| \leq 6 \\ |3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-8)| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-32 + 24| \leq 6 \\ |12 - 32| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 25 \\ \hline 310 \\ 124 \\ \hline 15 \\ 25 \\ \hline 105 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 25 \\ \hline 310 \\ 124 \\ \hline 15 \\ 25 \\ \hline 105 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4x-3y = \frac{48}{7} = \frac{96}{14} = \frac{96}{28} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7} = \frac{12}{3} = 4$$

$$3x-4y = \frac{12}{7} = \frac{12}{14} = \frac{12}{28} = \frac{6}{7} = \frac{3}{3} = 1$$

$$12 \cdot 25 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 625 = 25 \cdot 12 = 25 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

$$2 \cdot 625$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3

Дано: $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn.$$

1. Пусть $A = 13p^2$, где p - простое.

Разберём случаи, учитывая, что p - простое и 13 - простое

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ p^2=\frac{10}{13} \end{cases} \text{ - не удобн. умножить} \\ 2) \quad & \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ p=\sqrt{22} \end{cases} \text{ - не удобн. умножить} \\ 3) \quad & \begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ np=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ p=-\frac{3}{4} \end{cases} \text{ - не удобн. умножить} \\ 4) \quad & \begin{cases} m-n=13p^2 \\ m-n+9=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ 13p^2+8=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ p^2=-\frac{8}{13} \end{cases} \text{ - нет решений.} \end{aligned}$$

Поэтому ни один из случаев не для реализован.

2. Пусть $A = 3q^2$, где q - простое

Разберём случаи:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ q^2=\frac{10}{3} \end{cases} \text{ - не удобн. умножить} \\ 2) \quad & \begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ 12=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ q=2\sqrt{3} \end{cases} \text{ - не удобн. умножить} \\ 3) \quad & \begin{cases} m-n=3q \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow \\ 4) \quad & \begin{cases} m-n=3q^2 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12x - 9y = 18 \quad 4x - 3y = 6$$

$$3x - 9y = 8$$

$$2x + y = -24$$

$$4x$$

$$\begin{cases} 12x - 18y = 32 \\ 3x + 6y - \sqrt{5-y^2} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \end{cases}$$

$$4x + 2y = -48$$

$$A = m^2 - 2mn + h^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-h) - (m-h)(m-h+3) = 3g^2$$

$$B = m^2n - mh^2 + 3mn = mn(m-n+3) = 13p^2$$

$$(m-n+3)^2 = m^2 - 2mn + h^2 + 6m - 6n + 9 = A - 3m + 3n - 9$$

$$A - (m-n+3)^2 + 3(m-n+3) = (m-n+3)(m-n)$$

$$B = (m-n+3)(mn) = mn(m-n+3)$$

$$-13p^2 = -13$$

$$(m-n+3)^2 = m^2 + n^2 + 9 - 2mn + 6m - 6n = m^2 + n^2 - 2mn + 9m - 9n - 10$$

$$\begin{cases} -13p^2 + 9 = 1 \\ -3m + 3n + 9 = 223 \end{cases} \quad (m-n+3)^2 = A - 3(m-n-3)$$

$$13p^2 = -10$$

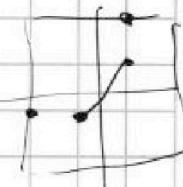
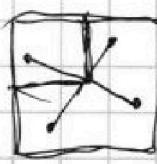
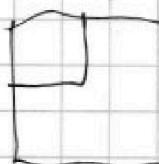
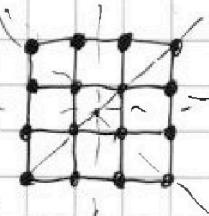
$$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n-3)$$

$$7y =$$

$$B = (m-n+3)(mn) = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 13p^2 \quad m(m+2) = 13p^2$$

$$m$$

$$-3p^2 + 9 = 0$$



У.с определяется по 1 кв.тү

$$\text{Все: } \frac{C_{1002}}{9} = 9 \cdot 6662 + 2y \cdot c$$

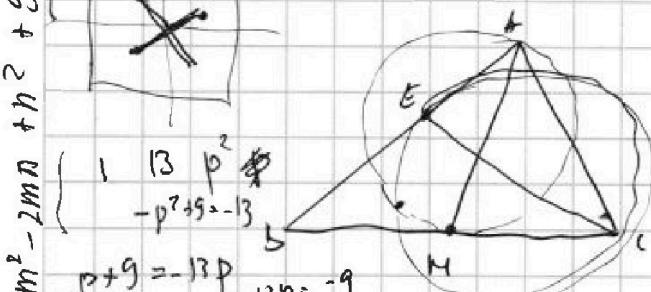
$$\begin{cases} 7 \text{ обр} - 30 \text{ дим} + 2 \text{ У.с.} \\ \frac{25-y^2}{89} + 5-x \end{cases}$$

$$\frac{25-y^2}{89} + 5-x$$

$$\frac{31-120}{89} - x - 6 + 36 - y^2$$

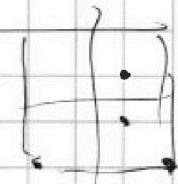


$$\begin{aligned} & x+6+5-y+25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{16} - 10\sqrt{5-y} = \\ & 5x - y + 4y^2 + 89 - 120 - 4x - 9y^2 \end{aligned}$$



$$(x+6)(5-y) =$$

$$= 30 - xy + 5x - 6y$$



$$\begin{cases} 13p^2 \\ -p^2 + 9 = -13 \end{cases}$$

$$12p = -9$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 9x^4 + x - 5\sqrt{y} = 9y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$30$$

$$m \cdot n = -13p$$

$$m \cdot n + 9 = -10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(n+1)^2 + 3(n+3) = 3p^2$$

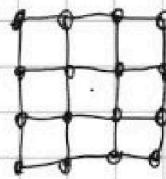
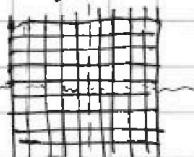
m = 1

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} \\ 9x^4 + x - 5\sqrt{y} \end{cases} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$9(x^2-y^2)/(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x+6 + 5-y + 25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-y} = 60 - 2x - 2y$$

$$3x+2y^2-y-26 = \begin{matrix} x-y \\ 7x-3y=+6 \\ 3x-4y=-8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7x-7y=-14 \\ x-y=2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4x^4 - 4y^4 + x-y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0 \\ -8+g = -3p \end{matrix} \quad \begin{matrix} x+y = 2 \\ Bp^2/3g^2 \end{matrix}$$



$$A: m^2 - 2mn + n^2 + gm - gn = (m-n+3)^2$$

$$B: m^2 n - mn^2 + 3mn$$

$$m+n \cdot \frac{g}{2}$$

$$x-6 \quad 25-10y+y^2 \quad \cdot mn(m-n+3) \quad 16+8^2$$

$$(m+n+g)^2 = g(m-n+3) \quad 7x-7y = -2$$

$$18m-18n = A -$$

$$(m-n+g)(m-n-g) = A \quad x-y = \frac{2}{7} \quad A+g| + 9m-9n$$

$$mn(m-n+3) = B$$

$$(m-n)^2 - g(m-n)$$

$$x+y = 14 \quad x = \frac{-32}{5}$$

$$352 \quad \begin{matrix} 96 \\ \frac{5}{170} \end{matrix}$$

$$(m-n)m n + 3mn$$

$$7x+6x+72 \leq 56$$

$$\begin{matrix} m-n \\ m-n+3 \end{matrix}$$

$$-y < 2x+4$$

$$2x+y = -28$$

$$110x+72 \leq 56$$

$$\begin{matrix} 82 \\ (a+b)^2 - ab \end{matrix}$$

$$352$$

$$14 - \frac{2}{7} + \frac{14+2}{2}$$

$$b>-3y$$

$$5x+36 \leq 3$$

$$x=a^4$$

$$|3x-4y| \leq 6$$

$$3x+8x+69 \leq 6$$

$$x-a^4$$

$$2x+y \approx 24$$

$$-8 \leq x \leq 8$$

$$|11x+36| \leq 8$$

$$21 - \frac{3}{7}$$

$$a$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) - 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\frac{1}{p^2}$$

$$(2x+y)^2 \quad 5+(5-y)^2 \quad -10y$$

$$(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8) = -5(a-b)$$

$$\frac{1}{p^2}$$

$$5+5^2-y^2$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8) = -5(a-b)a^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Q_5 = 6x+18, \quad Q_7 = (x^2-4x)^2, \quad Q_{11} = -3x^2 \quad \frac{6+8}{9} = \frac{18+32}{3} = \cancel{\underline{\underline{16}}}$$

$Q_3, d.$

$$Q_1 + 4d = 6x+18 \quad Q_1 + 6d = (x^2-4x)^2, \quad Q_1 + 10d = -3x^2$$

$$Q_1 + 4d = 6x+18 = 2x+6(x+3)$$

$$Q_1 + 6d = (x^2-4x)^2 = x^2(x-4)^2$$

$$2Q_1 = x^2(x-4)^2 - 6(x+3) = x^2(x^2-8x+16) - 6x - 18 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \quad | :2$$

$$4d = -3x^2 - (x^4 - 8x^3 + 16x^2) = -13x^2 + x^4 + 8x^3 = -x^4 + 8x^3 - 13x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 13x^2 \quad \frac{x^4}{+19} = \frac{-x^4}{51}$$

$$3x^4 - 29x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0}{2 + 8 + 17 + 4 - n},$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 17 & -4 & -12 \\
\hline -1 & 1 & -9 & 21 & -30 \\
\hline 2 & 1 & -6 & 5 & 6 & 0
\end{array}$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0 \quad \frac{16-9}{16-9}$$

$$(x-1)^2(x^2-3x-3)$$

$$2/4 = 4+3$$

$$-x^4x - 3y \leq 6 \quad \frac{65}{25}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & -6 & 5 & 6 \\
\hline -2 & 1 & -8 \\
3 & 2 & -3 \\
\hline -3 & 1 & -9
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & -6 & 5 & 6 \\
\hline 2 & 1 & -4 \\
\hline 2 & 1 & -3 & 0
\end{array}$$

$$(x^2 - 4x - 3) / (x^2 - 4x - 3) \quad 1625 \quad 2 + \frac{4}{3}x$$

$$15,8 + y = 24$$

$$\begin{array}{r|rr}
 14x & 13x & -3y \\
\hline 12x^2 & 12x^2 & + 12y^2 \\
y^2 & y^2 & - 16y^2 \\
\hline 13 & 13 & 56
\end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x^3 + 16x^2 + 12x + 4x^2 - 16x - 12$$

$$= \underbrace{x^4}_{13+11} - \underbrace{4x^3}_{26-33} - \underbrace{3x^2}_{y^2} + \underbrace{16x^2}_{-18-33} + \underbrace{12x}_{y} + \underbrace{4x^2}_{-56} - \underbrace{16x}_{12} - 12$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | :4 \quad \rightarrow -18 \leq 12x - 9y \leq 9$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | :3 \quad \rightarrow -32 \leq 12x - 16y \leq 32$$

$$-18 + 9y \leq 12x \leq 32 + 16y \quad \rightarrow -32 + 16y \leq 12x \leq 9y + 9$$

$$-50 \leq 25y$$

$$-2 \leq y$$

$$\begin{array}{l} 14x - 3y \leq 6 \\ 13x - 4y \leq 5 \end{array}$$

$$14x$$

$$2x+y = 24$$

$$18$$

$$36-15$$

$$\begin{array}{l} 2y \leq 91 \\ y \leq \frac{91}{7} \end{array}$$

$$28-30$$

$$21-40$$

$$\begin{array}{l} -6 \leq 12x - 36 \\ 36 \leq 12x \end{array}$$

$$-8 \leq -10x + 72 \leq 6$$

$$80x = 29$$

$$-14 \leq x - 24 \leq 14$$

$$x = 8+8 \quad 7-10$$

$$4x - 72 + 6x$$

$$32-24 \quad 24-32$$

$$(10-7) \leq 6$$

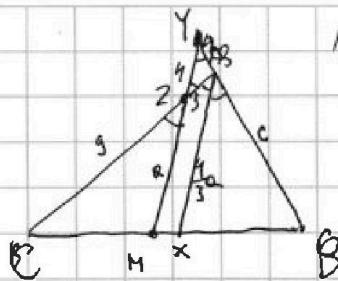
$$10 \leq x \leq 38$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$YZ = 4$$

$$\frac{a}{Ax} = \frac{9x}{3x}$$

$$7x - 3y = -6$$

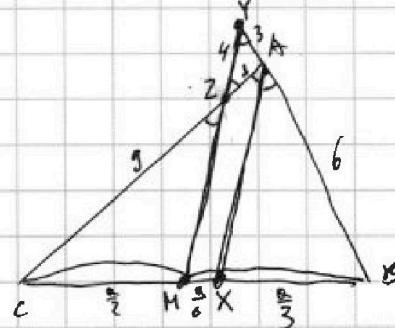
$$\frac{c}{CZ} = \frac{4x}{4+4}$$

$$3x - 4y = -8$$

$$x - y = -2$$



$$AC : AB = CX : XB$$



$$\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{24}{168} = \frac{6}{9}$$

$$4x - 3y = 6$$

$$3x - 4y = 8$$

$$168 = 14x + 7y$$

$$\frac{288}{5} = 32$$

$$\frac{144}{5} = 16$$

$$168$$

$$x - y = 2$$

$$x =$$

$$12x - 3y = 18$$

$$12x - 3y = 32$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$8 \leq 3x - 4y \leq 8$$

$$-14 \leq x + y \leq 14$$

$$\frac{a}{Ax} = \frac{9x}{3x}$$

$$7x - 3y = -6$$

$$3x - 4y = -8$$

$$x - y = -2$$

$$4C + AC = \frac{4}{3}AC + 4x$$

$$x + y = 2$$

$$C(4 - \frac{4}{3}x) = 4C - \frac{1}{3}AC - 4x$$

$$y = 2$$

$$C = \frac{12x}{12-x}$$

$$BC = a$$

$$AB = c$$

$$\frac{Cx}{xB} = \frac{12}{C}$$

$$CM + MX =$$

$$CMX = 0$$

$$\frac{a}{3} = \frac{a/2}{MX}$$

$$3 = \frac{a}{2MX}$$

$$MX = \frac{a}{6}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{a/2}{AB}$$

$$AB = \frac{a}{3}$$

$$40$$

$$\frac{3a}{2} + 3MX = 40/2$$

$$3MX = \frac{a}{2}$$

$$BC^2 = AB^2 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\angle$$

$$180 - 144 \cdot \cos 2\angle$$

$$\cos 2\angle = 2 \cos^2 \angle - 1$$

$$180 - 144(2 \cos^2 \angle - 1)$$

$$324 - 288 \cdot \frac{a}{9}$$

$$x =$$

$$-16 \leq 2x \leq 16$$

$$21x \geq -168$$

$$-16 \leq -2x + y \leq 16$$

$$-32 + 24$$

$$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$18 - 10 \leq x = -8$$

$$-8 - 10$$