



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input checked="" type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1
Пусть a_1, a_2, a_3 - первые члены ариф. прогрессии.

Тогда по определению АРИФ. прогрессии:

$a_2 = a_1 + d$ $a_3 = a_1 + 3d$ $a_8 = a_1 + 7d$, где a_1 - первый член, d - разность прогрессии.

$$\text{Тогда: } \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x & (1) \\ a_1 + 3d = (x^2 + 9x)^2 & (2) \\ a_1 + 7d = -6x^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x & (1) \\ a_1 + 3d = (x^2 + 9x)^2 & (2) \\ a_1 + 7d = -6x^2 & (3) \end{cases}$$

$$\text{By (2) и (1): } (x^2 + 9x)^2 - (12 - 12x) = 2d$$

$$\text{By (3) и (2): } -dx^2 - (x^2 + 9x)^2 = 4d \quad (4)$$

$$\text{Тогда: } 2(x^2 + 9x)^2 - 2(12 - 12x) = 4d \quad (5)$$

By (4) и (5) получаем:

$$2(x^2 + 9x)^2 - 2(12 - 12x) = -dx^2 - (x^2 + 9x)^2$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2) + 24x - 24 = -dx^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 = -dx^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 56x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Занети μ_1, μ_2, μ_3 - 2 корень. Тогда по IV БЕЗУ:

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0 \quad \text{Но } +2 \text{ корен } x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0, \text{ тоды}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+2)^2(x^2+4x-2)=0$$

$$\downarrow D=16+8=24$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \pm\sqrt{6}-2$$

Тогда всего корней 3: $-2, \sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-2$.

Тогда членами прогрессии являются:

$$1) a_2 = 12 - 12(-2) = 36 \quad a_4 = 16 \quad a_8 = -24$$

$$2) a_2 = 12 - 12(\sqrt{6}-2) = 36 - 12\sqrt{6} \quad a_4 = 9 \quad a_8 = 24\sqrt{6} - 60$$

$$3) a_2 = 12 - 12(-\sqrt{6}-2) = 36 + 12\sqrt{6} \quad a_4 = 9 \quad a_8 = -24\sqrt{6} - 60$$

Они действительно являются членами прогрессии, значит эти и есть $\{10, 4, 0, 48\}$.

ОТВЕТ: $-2, \sqrt{6}-2, -\sqrt{6}-2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$A = m^2 - 9mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) =$$

$$\Phi = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$\Phi = m^2n - 2mn^2 - 2mn + mn(m - 2n + 2)$$

Пусть $\Phi = 17p^2$, тогда если Φ расложить на множители, то оно состоит из трех простых множителей.

Допустим, что среди чисел m, n и $m - 2n + 2$ есть совместное, тогда если мы будем раскладывать на множители, то оно будет состоять уже из более чем трех простых чисел (может одинаковых).

Но при раскладывании Φ член $(m - 2n + 2)$ возникает только 3, тогда m, n и $m - 2n + 2$ — простые. Рассмотрим

(лучше всего тогда выбрать простые числа, которые будут составлять Φ)

$$1) m = 17 \quad n = p \quad m - 2n - 2 = p, \text{ тогда}$$

$$17 - 2p - 2 = p \quad 15 = 3p \quad p = 5$$

$$\text{Но тогда } \Phi = (17 - 2 \cdot 5)(17 - 2 \cdot 5 + 13) = 7 \cdot 20 = 140, \text{ что}$$

не представимо в виде $15g^2$, т.к. $A \not\equiv 3$

$$2) m = p \quad n = 17 \quad m - 2n - 2 = p, \text{ тогда } p - 36 = p \quad \emptyset$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) m = n + p \quad \text{и} \quad m - 2n - 2 = 17, \quad \text{ТОГДА} \quad p = 17, \quad \text{НО}$$

РАЗ $m, n \in \mathbb{N}$, ТО РЕШЕНИЯ ТАКИХ РУНЕТ.

$$\text{ПЛЗ } B \neq 17p^2, \quad \text{ТО} \quad B = 15q^2 \quad A = 17p^2$$

$$\text{ТОГДА } ((m-2n)(m-2n+13)) = 17p^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} mn(m-2n-2) = 15q^2 \\ (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

ЗАМЕТИМ, ЧТО $m-2n$ И $m-2n+13$ РАЗНОЙ ЧЕТНОСТИ
(ОЧЕВИДНО)

ТОГДА ОДИН ИЗ НИХ ЧЕТНЫЙ, ТО ГОДА $17p^2 : 2$,

А ПЛЗ $17/2$, ТО $p^2 : 2$. Т.е. p - простое, ТО ~~оно~~

$p=2$ (т.к. Это единственное простое число : 2).

$$\text{ПУСТ } m-2n = x, \quad \text{ТОГДА} \quad x(x+13) = 17 \cdot 4$$

$$x^2 + 13x - 68 = 0 \quad D = 269 + 68 \cdot 4 = 169 + 272 = 441 = 21^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 21}{2} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -17$$

I) ЕСЛИ $x = -17$, ТО $n-2n = -17 \Rightarrow n = 2n-17$.

ТОГДА ИЗ (2) МОЖНАДЕМ: $(2n-17)n(17-n) = 15q^2$

$$15q^2 = (17-2n) \cdot n \cdot 17. \quad \text{Т.к. } 15q^2 : 17, \quad \text{НО } 15/17, \quad \text{То}$$

$q^2 : 17$, ТО ПЛЗ q - простое, ТО $q = 17$. ТОГДА:

$$17 \cdot 17 \cdot 17 = (17-2n) \cdot n \cdot 17 \Rightarrow 17n-2n^2 = 15 \cdot 17$$

$$2n^2 - 17n + 15 \cdot 17 = 0 \quad D = 289 - 8 \cdot 15 \cdot 17 < 0, \quad \text{ЗДЕСЬ НЕТ ТАКИХ } n$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II) Есть $x=4$, то $m-2n=4$ $m=2n+4$, ТОГДА

Число (2) МОСКОВСКАЯ: $15q^2 = (2n+4)n \cdot 2 = 4(n+2)n$

ТОЕСТЬ $15q^2 : 2$, А РАЗ $15/2$, ТО $q^2 : 2$, ИО ПА)

$q^2 = 15/2$, т.о. $q^2 = 2$.

Значит $15 \cdot 4 : 8(n+2)n \Leftrightarrow n^2 + 2n - 15 = 0$.

$$D = 4 + 60 = 64 \quad n = \frac{-2 \pm 8}{2} = -9 - 1 \quad n_1 = 3 \quad n_2 = -5$$

Но т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $n=3$. $m = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

ТОГДА $A = 4 \cdot 14 \wedge B = 10 \cdot 3 / 2 = 60 = 15 \cdot 2^2$.

СЛЕДОВАТЕЛЬНО КРОМЕ МАРКИ $(10; 3)$ ДРУГИХ НЕТ.

ОТВЕТ: $(10; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $XH = 6x$. По теореме Фалеса $\frac{XH}{AH} = \frac{BC}{AC}$ Значит

$$\frac{AH}{XH} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow MC = \frac{BC \cdot XH}{AH} = \frac{12 \cdot 6x}{6} = 12x.$$

Но т.к. $BH = MC$, то $BH = 12x$ и $BX = BM - MH = 6x$
(по условию)

По свойству биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$

$$XC = XM + MC = 18x \quad \text{Тогда } AB = \frac{BX \cdot AC}{XC} = \frac{6x \cdot 18}{18x} = 6$$

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 36 + 100 + 40 = 176$$

$$BC = \sqrt{176} = 8\sqrt{6}$$

ОТВЕТ: $8\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

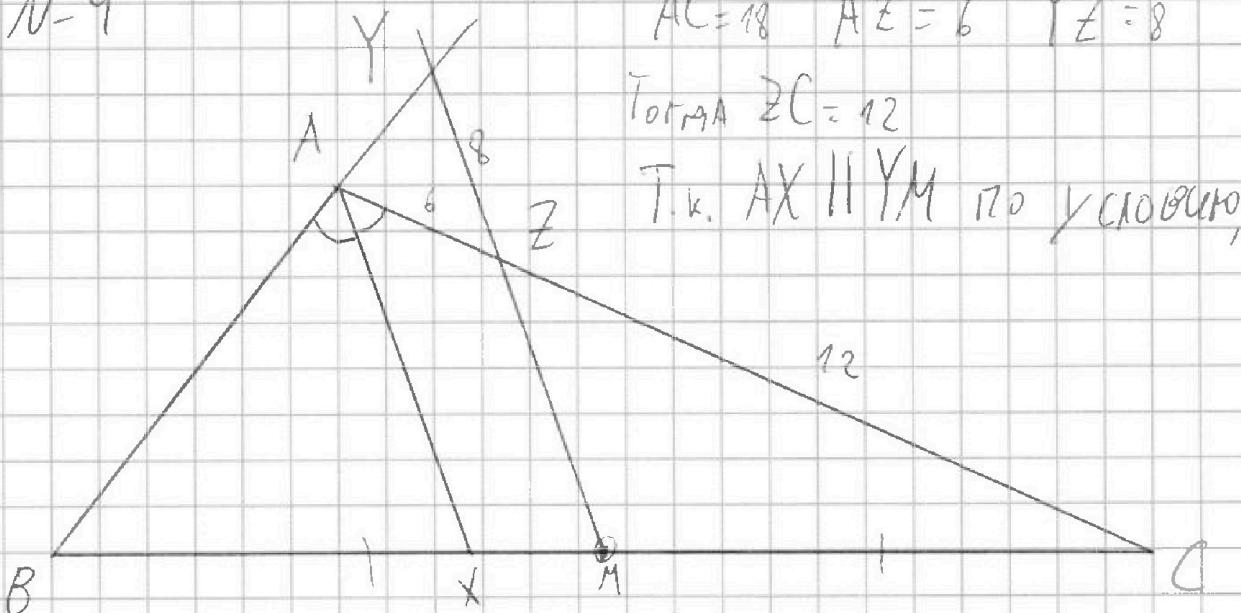


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4



$$AC = 18 \quad AZ = 6 \quad YZ = 8$$

$$\text{Тогда } ZC = 12$$

Т.к. $AX \parallel YM$ то условие

то для секущей AY : $\angle BAX = \angle BYM$

и для секущей AZ : $\angle XAC = \angle AZY$

тогда ~~доказать~~ по определению биссектрисы:

$$\angle BAX = \angle XAC \Rightarrow \angle BYM = \angle AZY$$

$$\text{Пусть } \angle BYM = \alpha, \text{ то } \angle AZY = \angle BAX = \angle XAC = \alpha \Rightarrow$$

$$\angle BAC = 2\alpha$$

$\triangle AYZ$ - равнобедренный т.к. $\angle AYZ = \angle AZY$.

По определению следует: $AY = AZ = 6$

Тогда по теореме косинусов для $\triangle AYZ$:

$$AY^2 = AZ^2 + YZ^2 - 2AZ \cdot YZ \cos \angle AZY$$

$$\cos \angle = \frac{36 - 36 + 64}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 12-x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$

Уг ОДЗ: $x > -\frac{1}{2}$

$2x > -1$

$x+4 > 3-x$

$\sqrt{x+4} > \sqrt{3-x} \quad \sqrt{x+4} + \sqrt{3-x} > 0$

Тогда из (9): $2\sqrt{12-x-x^2}-5 > 0$, значит равносильно

переходу $(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 = (2\sqrt{12-x-x^2}-5)^2$

$x+4+3-x-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{3-x} = 4(12-x-x^2)-20\sqrt{12-x-x^2}+25$

$7-2\sqrt{12-x-x^2} = 4(12-x-x^2)-20\sqrt{12-x-x^2}+25$

$18\sqrt{12-x-x^2}-4(12-x-x^2)-18=0$ (Учитывая $\sqrt{12-x-x^2}=t \geq 0$,

тогда $12-x-x^2=t^2$ и

$18t-4t^2-18=0$

$2t^2-9t+9=0$

$D=81-8 \cdot 9 \geq 0$

$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} \quad t_1 = 3 \quad t_2 = 1,5$

1) Для $t=3$, т.е. $12-x-x^2=9 \quad 3-x-x^2=0 \quad x^2+x-3=0 \quad D=1+12=13$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, но т.к. $x \geq 0$, т.о. $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{y-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ДДЗ: } & \begin{cases} x \geq 0 \\ 3 \geq y \geq 0 \\ 12 - x - y^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим (2) отдельно:

$$2x^5 + 4x^2 - 9y^2 + \sqrt{3x} - \sqrt{3y} = 0$$

$$2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x} = a \text{ и } \sqrt{y} = b, \text{ то } \begin{cases} a, b \geq 0 \\ a^5 - b^5 + 4(a^2 - b^2) + \sqrt{3}(a - b) = 0 \end{cases}$$

$$2(a^5 - b^5) + 4(a^2 - b^2) + \sqrt{3}(a - b) = 0$$

$$\text{Поэтому } a = b, \text{ т.е. } a^5 = b^5, a^2 = b^2, a = b$$

$$2 \frac{a^5 - b^5}{a - b} + 4 \frac{a^2 - b^2}{a - b} + \sqrt{3} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Но если } a > b, \text{ то } a^5 > b^5 \text{ и } a - b > 0 \Rightarrow \frac{a^5 - b^5}{a - b} > 0$$

$$\text{т.е. } a^5 > b^5 \text{ и } a - b > 0 \Rightarrow \frac{a^5 - b^5}{a - b} > 0$$

$$\text{А если } b > a, \text{ то } a^5 < b^5 \text{ и } a - b < 0 \Rightarrow \frac{a^5 - b^5}{a - b} > 0$$

$$\text{т.е. } a^5 < b^5 \text{ и } a - b < 0 \Rightarrow \frac{a^5 - b^5}{a - b} > 0$$

и $\sqrt{3} > 0$. Значит (3) > 0. Тогда $a = b$.

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y \text{ при } x, y \geq 0 \quad (\text{т.е. } \text{решение } (1))$$

Тогда из (1):

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Если $t = 1,5$, то $12 - x - x^2 = 1,5^2$ $12 - x - x^2 = 2,25$

$$x^2 + x - 12 = -2,25 \quad x^2 + x - 9,75 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 9,75 = \\ = 1 + 39 = 40 \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}, \text{ но т.к. } 0 < x \leq 3,70$$

$$x = \sqrt{10} - 0,5$$

Значит из начальной системы удовлетворяют решения $(\sqrt{10} - 0,5; \sqrt{10} - 0,5)$ и $(\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; \frac{\sqrt{13} - 1}{2})$

Число $\sqrt{10} - 0,5$, т.к. из (2) удовлетворяют все

$x = y$, а (1) при $x = y$ тоже эти м/з.

Ответ: $(\sqrt{10} - 0,5; \sqrt{10} - 0,5), (\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; \frac{\sqrt{13} - 1}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

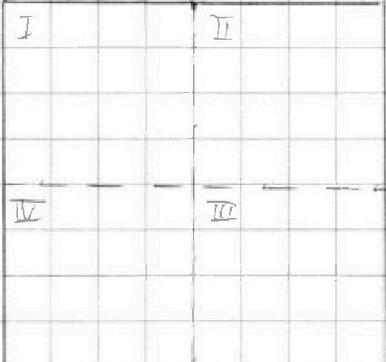


рис. 1

Представим каждый угол как клетку, тогда рассмотрим квадрат 8×8 . Разобейте его на 4 равные части как показано на рис. 1. Назовём их I, II, III и

IV сектора в соответствии с рисунком. Тогда если клетка находится в одном секторе, то при 1 повороте она обязательно переместится в следующий, а при 2 поворотах в противоположный (рассматривая более одного полного поворота не имеет смысла, т.к. они аналогичны 0, 1 и 2 поворотам).

Рассмотрим все существующие раскраски на два вида: марные и немарные. Марные - это те, которые через 2 поворота переходят в себя. Немарные - те, которые ~~переходят~~ через 2 поворота ~~не~~ переходят в себя. А тех, что переходят в себя через 1 поворот нет. Т.к. если такие есть, то 1-я строка перекраинет 2-ю и т.д., но такого не может быть.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧОСКОМУ КАЖДАЯ КЛЕТКА МЕРЕЙДЕТ В СОСТАВИИ
СЕКТОР И ВОДЫ СТОРОНУ.

Пусть x - все существующие раскраски непарные, y - все существующие марные раскраски.

Приложение: раскраска - некоторая комбинация разных клеток. Но мы считаем все эти x и y различными. Тогда чтобы получить кол-во раскрасок, которые считаются одинаковыми при переворотах,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \text{т.к. } \cancel{\text{раскраска}}$$

~~БАЖКО~~ Каждой непарной раскраске будут сопоставлены 3 другие, а марной (исходя из определения) только 1.

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{4} + \frac{y}{4}$$

$x+y$ - кол-во ~~раскрасок~~ вообще всех раскрасок без учёта переворотов. Чтобы их посчитать мы выбираем одну из

64 клеток, а вторую из 63, но и таким кол-во на

2, т.к. каждой паре соответствует другая пара, но не-

таки одинакичные места. Тогда $\frac{63 \cdot 64}{2} = 63 \cdot 32$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А у можно посчитать так: из I и II секторов
выбирается одна клетка (их всего 32) и эти две
составляются однозначно другая парой симметричной
из определяемых парных раскрасок.

Тогда $y=32$

$$\text{значит } \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{4} + \frac{y}{4} = \frac{63+32}{4} + \frac{32}{4} = 8(63+1) = 64 \cdot 8 = 512.$$

ОТВЕТ: 512

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+4^2} - \sqrt{3-y^2} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 9x^2 - \sqrt{3y^2} = 2y^5 - 9\sqrt{3x+y^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 12-x-y^2 \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x+y^2 \leq 12 \end{array} \\ & 2(x^5 - y^5) + 9(x^2 - y^2) + \sqrt{3}(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) = 0 \\ & \sqrt{x} = a, \quad \sqrt{y} = b \quad x = 0, \quad 2 - \sqrt{3-y^2} + 5 = 2 \\ & 2(a^8 - b^8) + 9(a^6 - b^6) - \sqrt{3}(a-b) = 0 \quad 1) x=0 \\ & (a-b)(2(a^8 + a^6b + a^4b^2 + a^2b^4 + b^8) + 9) \quad 2 - \sqrt{3-y^2} + 5 = 2\sqrt{12-y^2} \\ & 1) x=0, \quad y=0, \quad 9,75 \quad 7 - \sqrt{3-y^2} = 2\sqrt{12-y^2} \\ & 2 - \sqrt{3-y^2} + 5 = 2\sqrt{12-y^2} \quad 49 - 14\sqrt{3-y^2} + 3-y = 49 - 4y^2 \\ & 9,75 = 36 + 3 = 39 \quad 4y^2 - 4 + 4 = 14\sqrt{3-y^2} \\ & 9\frac{3}{4} = 36 + 3 = 39 \quad y = 1 \quad 9x + 4 = 14 - 2 \\ & \sqrt{3-y^2} = 2\sqrt{12-y^2} \quad y = 2 \quad 16 - 2 + 4 = 14 \\ & 3 - y^2 = 4(12-y^2) \quad 16y^2 + y^2 + 16 - 8y^2 - 8y + 32y^2 = \\ & 3 - y^2 = 48 - 4y^2 \quad 196 - 196y + 32y^2 = 196 - 196y \\ & 48 = 4y^2 \quad 16y^4 - 8y^3 + 32y^2 + 180y - 196 = 0 \\ & a = b \quad (a-b)(2(a^8 + a^6b + a^4b^2 + a^2b^4 + b^8) + 9) \\ & \sqrt{x+4^2} - \sqrt{3-x^2} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \quad (x+4)(3-x) \\ & \sqrt{x+4^2} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} + \sqrt{3-x} \quad 3x + x^2 + 12 - 4x \\ & x+4 \quad 12 - x - x^2 \quad x+4 \geq 3-x \\ & A + B + 5 = 2AB \quad 2x \geq -1 \\ & \sqrt{x+4^2} - \sqrt{3-x^2} = 2\sqrt{12-x+x^2} - 5 \quad 3x + x^2 + 12 - 4x \\ & 8(x+4)^2 - 2\sqrt{12-x-x^2} = 4(12-x+x^2) - 10\sqrt{12-x-x^2} + 25 \\ & 8\sqrt{12-x-x^2} = \frac{-1 + 2\sqrt{12}}{2} = \sqrt{12} - 0,5 \\ & 3x + x^2 + 12 - 4x = (\sqrt{12})^2 + 3 + 0,25 \\ & 3x + x^2 + 12 - 4x = 12 + 3 + 0,25 \\ & 3x + x^2 + 12 - 4x = 15,25 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

<input type="checkbox"/>						
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 - 12x \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= (x^2 + 4x)^2 \\ a_4 &= -6x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_4 &= a_1 + 3d \\ a_8 &= a_1 + 7d \end{aligned}$$

$$a_1 + d = 12 - 12x$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$4 - 8 \quad 48 + 24 - 16 - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} 2d &= (x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x \\ 4d &= -6x^2 - (x^2 + 4x)^2 \end{aligned}$$

$$2d = x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 12 + 12x$$

$$4d = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$4d = 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 - 24 + 24x$$

$$2x^4 + 16x^3 + 32x^2 - 24 + 24x - 6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2 = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$4(1+1) = 24$$

$$-4 \pm 2\sqrt{6}$$

$$2$$

$$(x-2)(x^3 + 10x^2 + 38x)$$

$$+ 76x^4 = 0$$

$$4(16 + 8 \cdot 8 + 18 \cdot 4) -$$

$$16 \cdot 8 \cdot 8 + 18 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 + 8$$

$$8(2 - 8 + 9 - 2 - 1)$$

$$1) a_2 = 36$$

$$a_4 = 16 \quad d = 10 \quad 16 - 40 = -24$$

$$a_8 = -24$$

$$2) a_2 = 12 + 2\sqrt{6} + 24 = 36 + 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_6 = 24\sqrt{6} - 60$$

$$x^2 = 6 + 4\sqrt{6} + 4 = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$4x = 4\sqrt{6} \cdot 8$$

$$d = \frac{32 - 32 + 12\sqrt{6}}{2} : 6\sqrt{6} - 16 = -6(10 - 4\sqrt{6}) = 24\sqrt{6} - 60$$

$$a_8 = x^2 = 6 + 4\sqrt{6} + 4 = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$4x = -4\sqrt{6} \cdot 8$$

$$a_4 =$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \quad | \quad x-2$$

$$x^4 - 2x^3$$

$$10x^3 + 18x^2$$

$$10x^3 - 20x^2$$

$$38x^2 + 8x$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \quad | \quad x+2$$

$$x^3 + 10x^2$$

$$6x^2 + 18x^2$$

$$6x^2 - 12x^2$$

$$6x^2 + 8x$$

$$6x^2 + 12x$$

$$-4x - 8$$

$$d = \frac{32 + 12\sqrt{6}}{2} : 16 + 6\sqrt{6}$$

$$4 - 4(4\sqrt{6})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$|a| \leq b \quad -b \leq a \leq b$$

$$\begin{array}{r} 18^2 \\ \times 18 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$|3x - 2y| \leq 4$$

$$a \leq b \quad a \geq b$$

$$\begin{array}{r} 19^2 \\ \times 4 \\ \hline 18 \\ + 384 \\ \hline 324 \end{array}$$

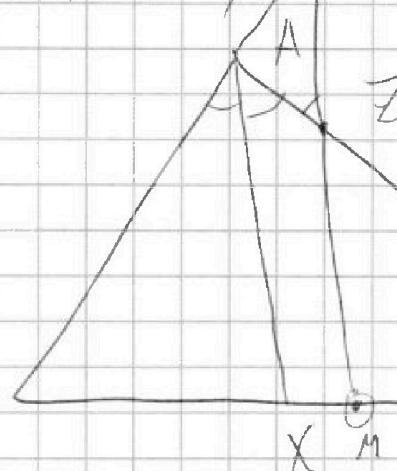
$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6 \quad 4 \leq 5x - 5y \leq 10$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-4 \leq 3x - 2y \leq 4$$

$$AC = 18$$

$$256 - 3$$



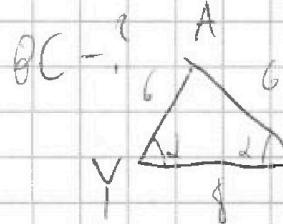
$$A2 = 6 \quad 47 = 8 \quad \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{14}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 6 \\ \hline 384 \end{array}$$

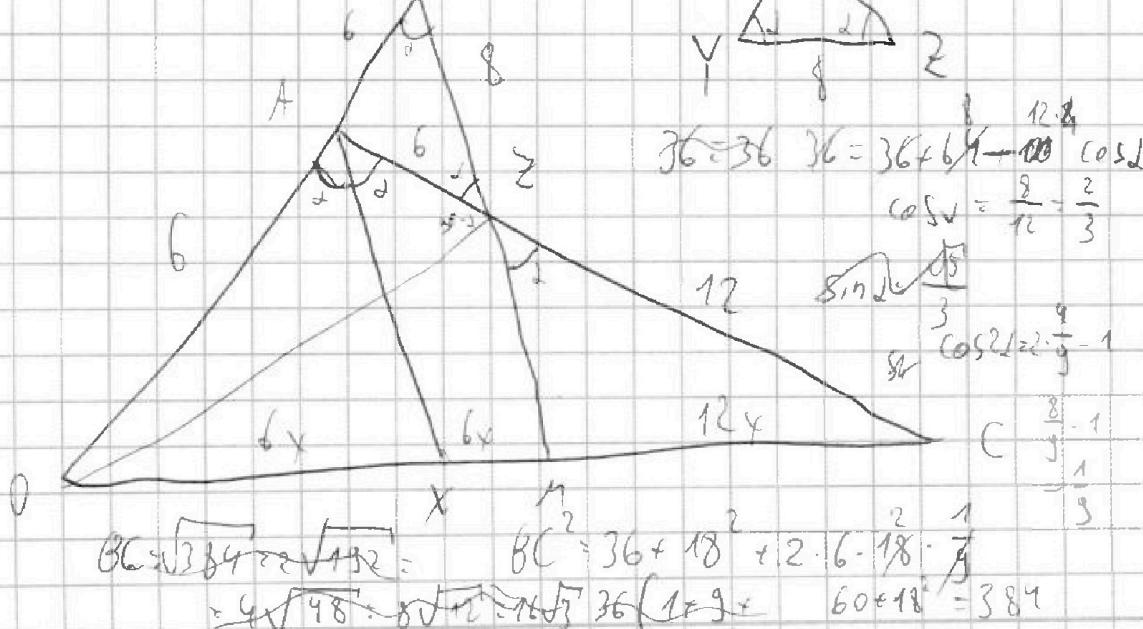
B

C

Y



Y 8 2



$$36 = 36 \quad 36 = 36 + 64 - 100 \cos 12$$

$$\cos 12 = \frac{8}{12} - \frac{2}{3}$$

$$\sin 12 = \frac{\sqrt{15}}{3} \quad \cos 12 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 1 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$BC = \sqrt{384} = \sqrt{48} = 8\sqrt{3} \quad BC^2 = 36 + 18^2 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} = 384$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

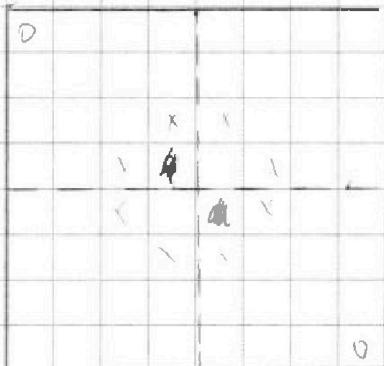
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{4} + \frac{c}{2} = \frac{5+c}{4} > \frac{c}{4}$$

$$\begin{array}{r} 64 \cdot 63 \\ \times 16 \\ \hline 17 \\ + 112 \\ \hline 16 \\ \hline 232 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \cdot 83 \\ \times 16 \\ \hline 16 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$512$$

$$\begin{array}{r} 15 \cdot p^2 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$m^2 n - 2mn^2 + 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

$$3 : m \quad 3 : n \quad 8 : (m - 2n - 2)$$

$$1) \quad m = 17$$

$$n = 0$$

$$m - 2n - 2 = 0$$

$$289 - 4n$$

$$m = 17 \quad n = 5$$

$$p = 5$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = 15p^2$$

$$15 - 2n = p \quad 15 - 2p = p \quad p = 5 \quad n = 5$$

$$49 + 13 \cdot 4 = 720 = 150$$

$$2) \quad n = 17$$

$$m = p$$

$$p = 36 = p$$

$$3) \quad m = n = 0$$

$$m - 2n - 2 = 17$$

$$-p = 19$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = 17p^2$$

$$n - 2n + 13 = 1$$

$$n - 2n = 13$$

$$n - 2n + 1 = 1$$

$$m - 2n = 1$$

$$p = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

