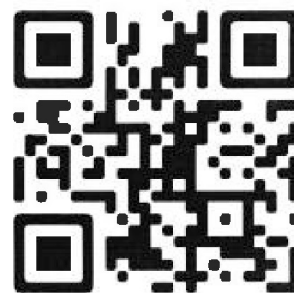




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2 $a, b \in \mathbb{N}$

$$a - b = 12; a = b + 12 \quad (1)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \quad p - \text{простое}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4 \quad (2)$$

Представим (1) b (2)

$$(b+b+12)(b+b+12+3) = 19p^4$$

$$2(b+b)(2b+15) = 19p^4$$

левая часть делится на 2, значит, правая часть тоже делится на 2 $\Rightarrow 19p^4 : 2 \Rightarrow p^4 : 2$

$$\begin{array}{l} 19 \cdot 2 \\ (19 \cdot 2) = 1 \end{array} \Rightarrow p^4 : 2$$

Если $p \neq 2$, то $p^4 \neq 2$ (т.к. $(p:2)=1$, т.е. 24р-простое), значит, $p = 2$

$$p = 2$$

р-простое

$$2(b+b)(2b+15) = 19 \cdot 2^4 \quad | : 2$$

$$(b+b)(2b+15) = 19 \cdot 2^3$$

$$2b^2 + 12b + 15b + 15 \cdot 6 = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 - 152 = 0$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$D = 27^2 + 4 \cdot 2 \cdot 62 = 729 + 496 = 1225 = (35)^2 = 83^2$$

$$b_1 = \frac{-27 - 83}{2 \cdot 2} < 0 \Rightarrow b_1 \notin \mathbb{N}$$

$$b_2 = \frac{-27 + 83}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b = 2, a = 2 + 12, a = 14$$

Ответ: 14 и 2.

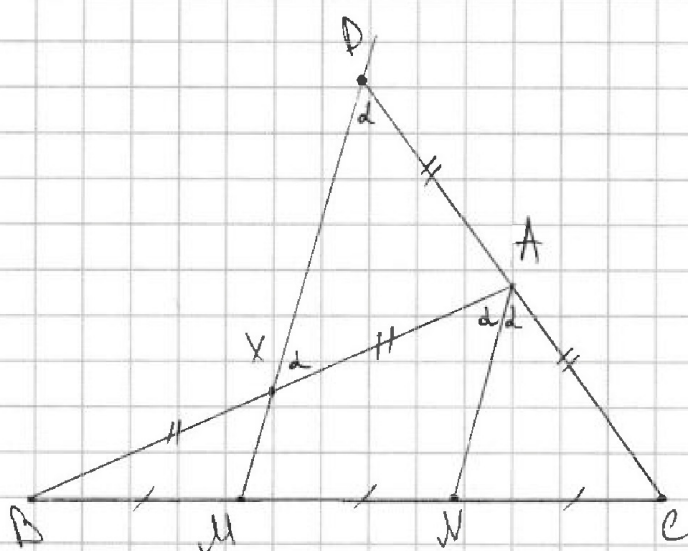


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
 $\triangle ABC$
 $M, N \in BC$
 $BM = MN = NC$
 $MD \parallel AN$
 $MD \cap AC = D$
 $BC = 6$
 $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$
 $AB = CD$
 $AB = ?$

1. $\triangle CMD$:

$AN \parallel MD$
 $MN = NC$ $\Rightarrow AN$ - средняя линия $\Rightarrow CA = AD$
по кругу

2. $X = MD \cap AB$

$\triangle BDN$:

$XM \parallel AN$ ($AN \parallel MD$) $\Rightarrow XM$ - средняя линия $\Rightarrow BX = AX$
 $BM = MN$
по кругу

3. $BX = AX = \frac{1}{2}AB$ (по условию)
 $CA = AD = \frac{1}{2}CD$ (по условию)
 $AB = CD$ (по укл.) $\Rightarrow AC = AD = BX = AX$

4. Пусть $\angle CAN = \alpha$, тогда $\angle CDM = \alpha$, т.к. $AN \parallel MD$ (соот. углы при пересечении)
 $\triangle XAD$ - $\triangle$, т.к. $AX = AD \Rightarrow \angle ADX = \alpha = \angle XAD$
 $\angle XAD = \angle XAM = \alpha$ (как $\angle$ или $AN \parallel MD$)
 Тогда $\angle BAC = 2\alpha = 2 \cdot \angle CAN \Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC)$

5. Пусть $AC = AD = AX = BX = x$, тогда

по т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC), \quad AB = AX + BX = 2x$$

$$6^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$36 = x^2 + 4x^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4} \cdot x^2$$

$$36 = 5x^2 + 3x^2$$

$$8x^2 = 36 \quad | :8$$

ОДЗ: $x > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 = \frac{36}{8}$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}; x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{3}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{D} \text{ } \} \text{задача}$$

$$\text{Ищем, } Ax = Bx = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ ищем, } AB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 3\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что на 1, $3 \cdot 4 = 12$ с учетом 11, значит равно
одна карта будет свободна. Сначала ~~выберем~~ с места 11
выберем на котором будет свободна карта можно
свободно. Выберем место, на котором будет стоять эта
карта в выбранном ряду можно свободно. То
есть выберем место для этой карты можно $3 \cdot 4$ спосо-
бами. На ряду, в котором есть свободная карта, сидят
еще 2 человека. Заметим, что если ~~карта~~ свободная
карта стоит не посередине, то расклад детей одно-
значен, т.е. один сидит за другим, а ~~то~~ можно
только тот, кто ближе к нам, же карта, стоит по
середине, то есть 2 способа рассадить детей. Значит,
рассадить детей на эту ~~11~~ ряд с учетом выбора ряда
можно $4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot C_{11}^2 + 1 \cdot 2 \cdot C_{11}^2) = 4 \cdot (2 \cdot C_{11}^2 (2+2)) = 4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2$ спосо-
бами. Теперь осталось 3 человека можно рассадить на
3 ряда. Выберем один ряд и ~~три~~ трех детей
можно $3 \cdot C_3^3$ способами. Заметим, что для людей 3
детей ~~расклад~~ существует единственный расклад
на 3 ряда по 3 человека, при котором все будут
доску, т.е. дети разного роста, т.е. если перед сидит
наивысший, в трех кто-то сидит, то он не вы-
дет доску, значит, он сидит на 1 карте; если перед
сидит средний, значит, он сидит на 2 карте; если перед
сидит на 3 карте, то средний человек не вы-
дет, значит, средний сидит перед высшим, значит,
он сидит на 2 карте, а высший на 3. Значит,
рассадить трех из девяти человек на один ряд ~~после того, как 11~~
только одним ~~3~~ ряда можно $3 \cdot C_3^3$ способами. А каждый
из трех ~~из~~ девяти человек на один ряд с учетом вы-
бора ряда можно рассадить $2 \cdot C_3^3$ способами, а остав-
шиеся 3 человека рассаживать однозначно
или детей можно рассадить так, чтобы один
был доску $4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 3 \cdot C_3^3 \cdot 2 \cdot C_3^3 = 4 \cdot 4! \cdot C_{11}^2 \cdot C_3^3 \cdot C_3^3$
способами

Ответ: $4 \cdot 4! \cdot C_{11}^2 \cdot C_3^3 \cdot C_3^3$

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

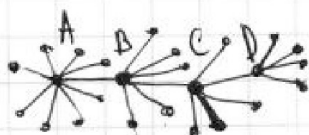
СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пороча QR-кода недопустима!

[illegible]

Пример:



Oct: 24



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x-y-1} = 2$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2 - \sqrt{1-x-y-1} \quad |^+2$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 4 + 1 - |x-y-1| = 4\sqrt{1-x-y-1}$$

$$4\sqrt{1-x-y-1} = 5 - |x-y-1|$$

$$|x-y-1| \geq 0 \Rightarrow 1-x-y-1 \geq 0, 1 \geq x-y-1$$

$$x-y \geq 1$$

Т.к. x и y — целые, $x-y$ — тоже целое, значит

$$\begin{cases} x-y=1 & (1) \\ x-y=2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y \geq 1 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$$

$$(1) \quad x=y+1$$

$$\sqrt{2(y+1)-2y-y^2-2y-1-y^2} + \sqrt{1-(y+1)-y-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} + \sqrt{1-y-1-y-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} + 1 = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 1$$

$$-2y^2-2y+1 = 1$$

$$2y+2y=0$$

$$y+y=0; y(y+1)=0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$y=0, x=1 \quad (+)$$

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{1-1-1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1=2 - \text{верно}$$

$$y=-1, x=0 \quad (+)$$

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{1-1-1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1=2 - \text{верно}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = y + 2$$

$$\sqrt{2y+4-2y-y^2-4y-4-y^2} + \sqrt{1-1y+2-y-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-4y} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-4y} = 2 \quad |^2$$

$$-2y^2-4y = 4$$

$$-y^2-2y = 2$$

$$y^2+2y+2 = 0$$

$$D_1 = 1 - 2 < 0 - \text{нет корней}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{cases} x-y-1 < 0 \\ x-y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x-y-1 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y < 1 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$$

Т.к. $x-y$ — целое, ~~решения~~ системы следует,
что

$$x-y=0; x=y$$

$$\sqrt{2x-2x-x^2-x^2} + \sqrt{1-10-1} = 2$$

$$\sqrt{-2x^2} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2x^2} = 2 \quad |^2$$

$$-2x^2 = 4$$

$$x^2 = -2 - \text{нет решений}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, если $x - y - 1 \geq 0$, то $y = 0, x = 1$ — решение;
если $x - y - 1 < 0$, то $y = 1, x = 0$ — решение;
Ответ: $(0, -1), (1, 0)$

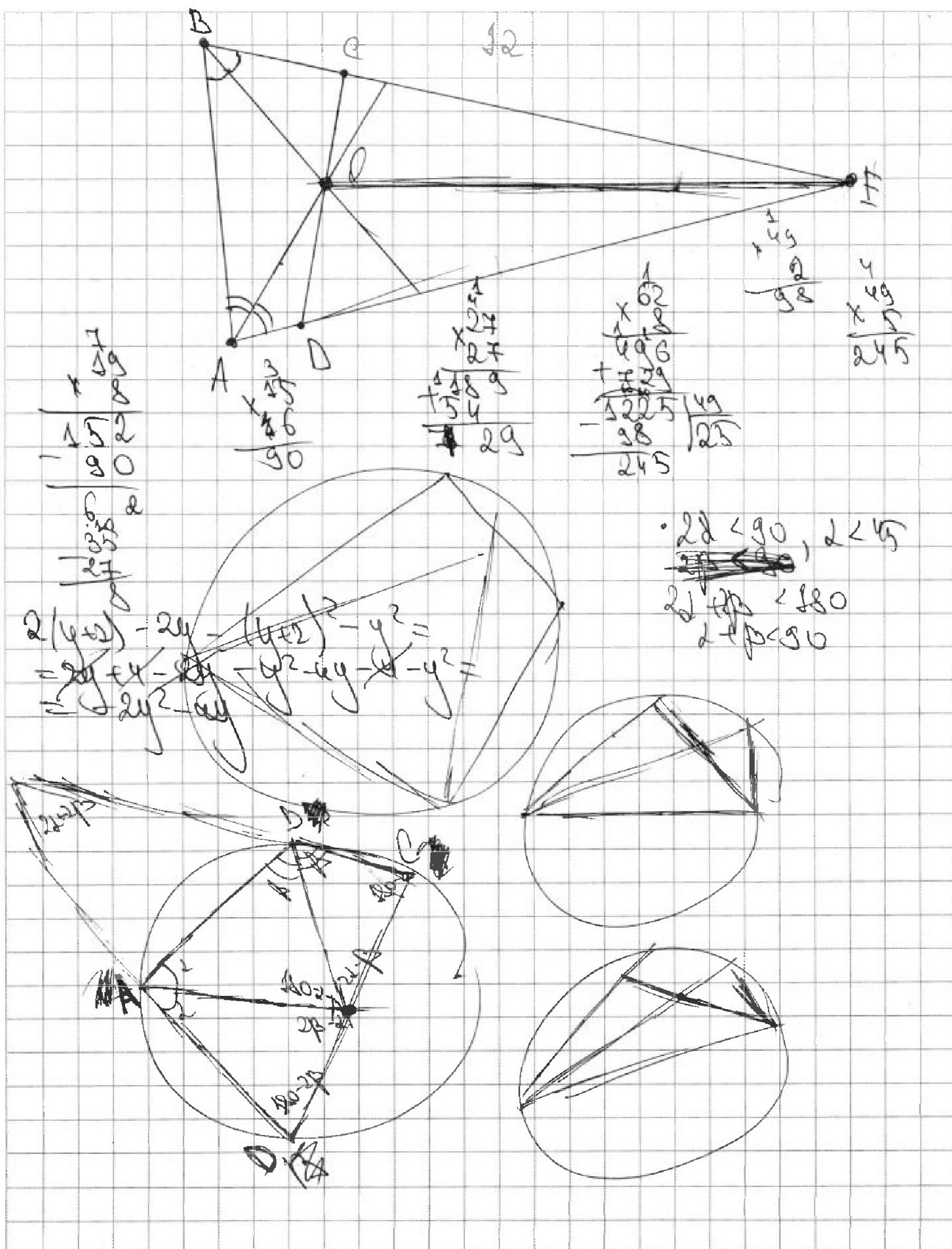


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1



2



3



4



5



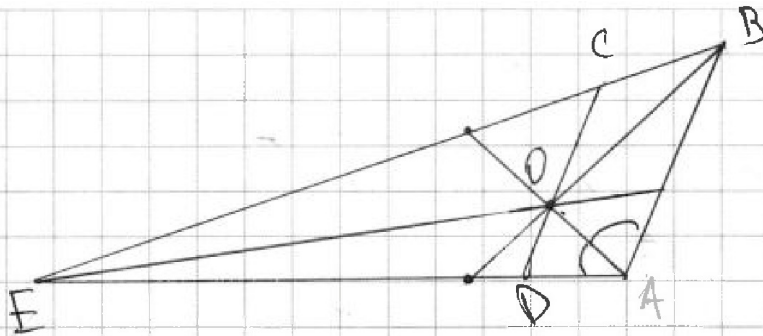
6



7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Т.к. $ABCD$ - вписанный ~~в $\triangle ABE$~~ ~~треугольник~~

~~то AB и CD делятся пополам~~ $\triangle AEB$

~~$\angle ECD = \angle EAB$~~
 ~~$\angle EDC = \angle EBA$~~

~~то EO - биссектриса $\angle AEB$, EO - медиана $\triangle AEB$,
 $\angle DOE = \angle OCE$~~

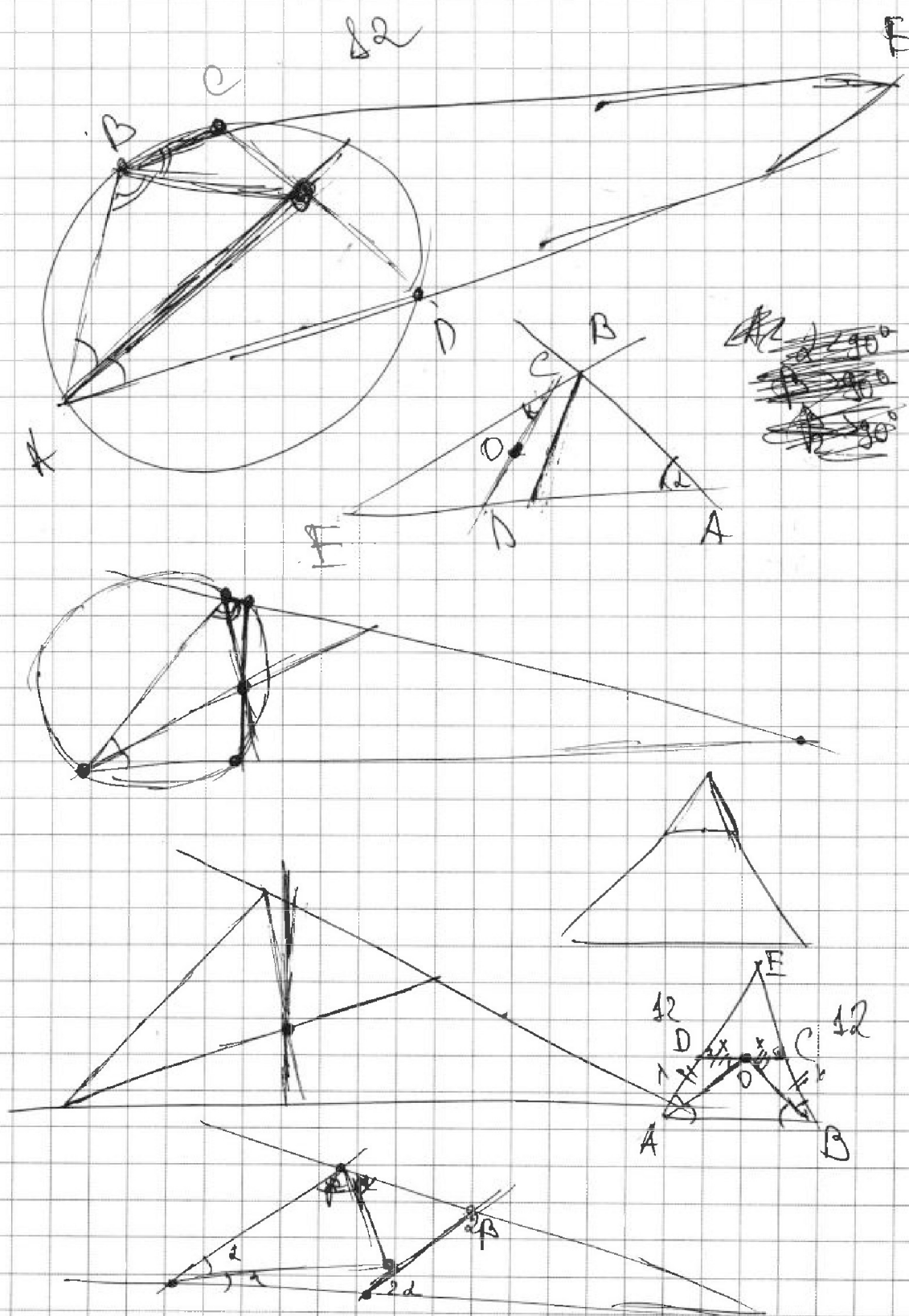


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



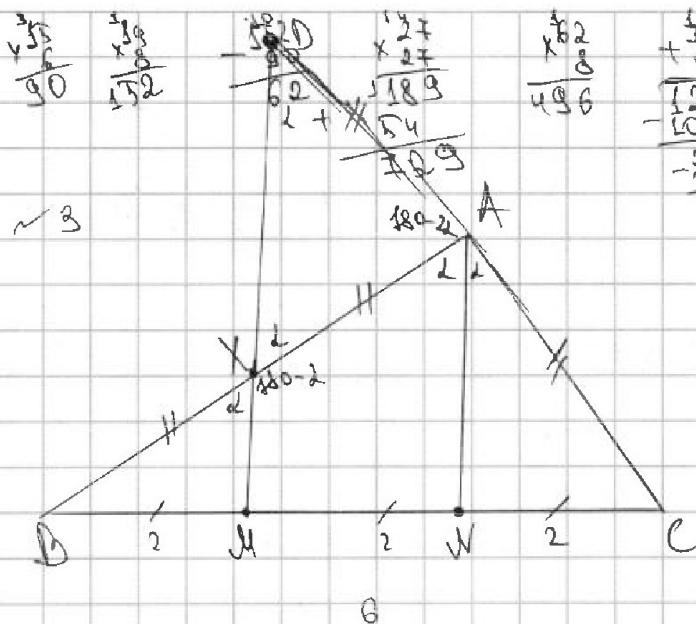


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

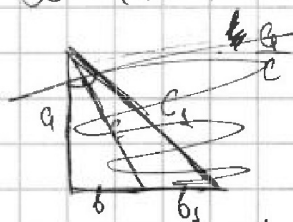
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CD$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$



$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - 1 \\ -\frac{3}{4} &= \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \\ \cos \alpha &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - 2 \cdot \cos^2 30^\circ &= 1 - \frac{2 \cdot 3}{4} \\ &= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

и 4 перекарты по 3 карты 1 чел

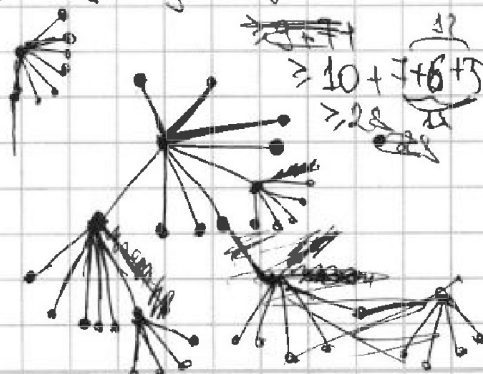
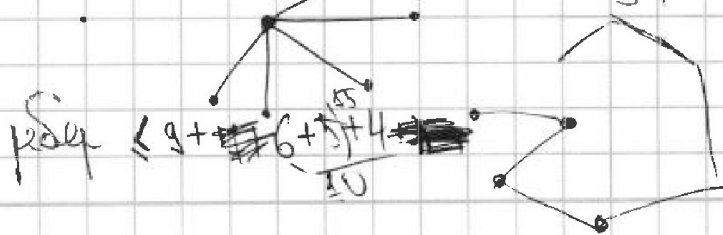
- 1 карта
- карта перед или карта
- карта или карта



$$\begin{aligned} &4 \cdot C_{11}^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot C_9^3 \cdot 2 \cdot C_6^3 \cdot \dots = \\ &= 4! \cdot 3 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \end{aligned}$$

и 6

с) дерево



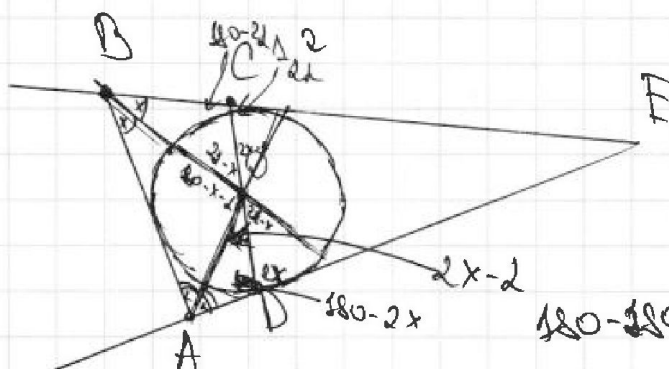
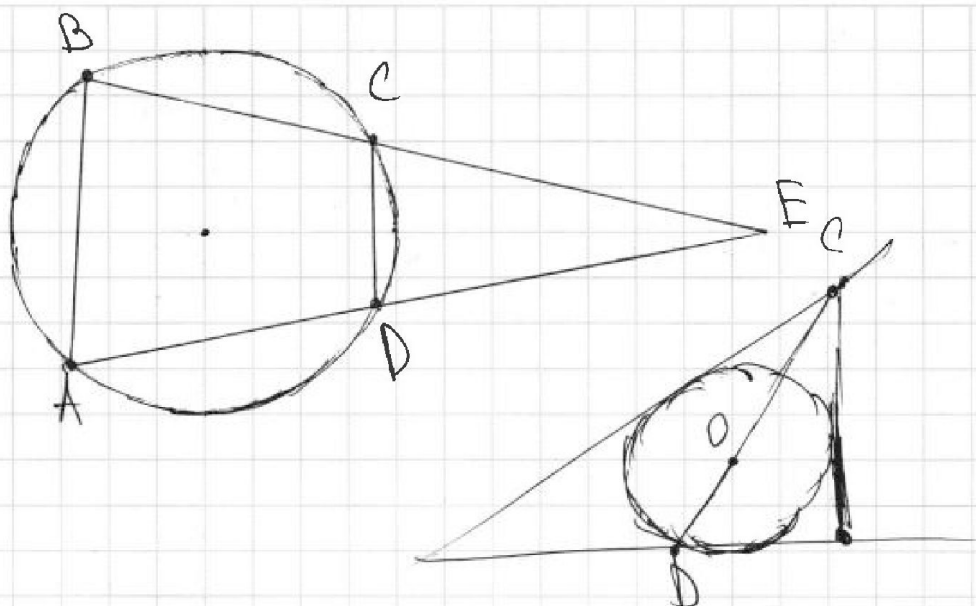


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 2x + 2x - 2x = 180 - 2x$$

$$180 - 2x + 2x - 2x = 180 - 2x$$

$$EC \cdot 12 = ED \cdot AF$$

$$12 = \frac{DE \cdot AF}{CE}$$

