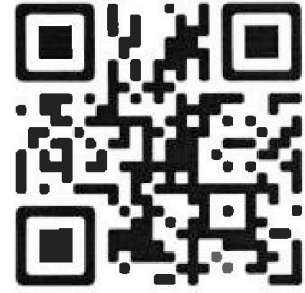




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + (gt^2 - g) = 0 - \text{квадратное уравнение}$$

дискриминант $\rightarrow D_1 > 0$ — два различных корня:
делим на 4

$$D_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2 - (gt^2 - g) = 4 \cdot 2 \cdot t^2 - gt^2 + g = 8t^2 - gt^2 + g =$$

$$D_1 = \left(\frac{4\sqrt{2}t}{2}\right)^2 - (gt^2 - g) = 8t^2 - gt^2 + g =$$

$$= g - t^2$$

$$D_1 > 0$$

$$g - t^2 > 0$$

$$t^2 < g$$

$$-3 < t < 3 - \text{условие на } t \sim 1$$

По теор. обр. теор. Виета:

$$x_1; x_2 = (gt^2 - g)$$

Из условия корни x_1 и x_2 при
каком-либо переименовании дают
неотрицательное число \Rightarrow

$$\Rightarrow gt^2 - g > 0 \quad | :g$$

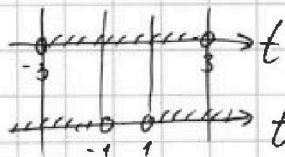
$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$\begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \end{cases} - \text{условие на } t \sim 2$$

система
П.о. условия

$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -3 \\ t < -1 \\ t > 1 \end{cases}$$



Итак:

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$$

$$= \cancel{(a+b)} + (a+b)(a+b+3)$$

$$\begin{cases} (a+b)(a+b+3) = 19p^4 \\ a-b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+b+3) = 19p^4 \\ a = 12+b \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2b+12)(2b+15) = 19p^4 & (*) \\ a = 12+b \end{cases}$$

$$(*) \quad (2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

↑ кратно 2 и не 19 \Rightarrow
 $\Rightarrow p = 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^4$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

↑ чётное ↑ нечётное

чётное + нечётное = нечётное

$$\text{П.о. } 2b+15 = 19$$

$$2b = 4$$

$$\underline{b = 2}$$

↑ единственное

нечётное в произведении $19 \cdot 2^3$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 12+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ответ: (14; 2)

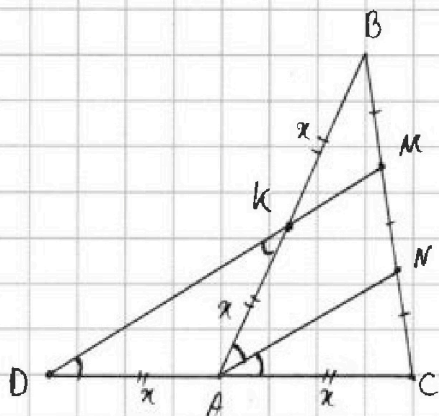


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) ~~$DM = MN + NM$~~ ~~BM~~ $DM \cap AB = K$
 ~~$AN \parallel DM$~~

2) $BM = MN = NC$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AN - \text{ср. лин. в } \triangle DMC \\ DM \parallel AN \end{array} \right\} \Rightarrow$ $KM - \text{ср. лин. в } \triangle ABN$ \Rightarrow $AK = KB$
(по теор. Фалеса) $DA = AC$

3) $AK = KB$
 $DA = AC$ \Rightarrow $AD = AC = AK = KB$
 $AB = CD$

4) $AD = AK \Rightarrow \triangle ADK - \text{н/д} \Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

5) $\left. \begin{array}{l} \angle AKD = \angle NAK \text{ (накр. угл. при } AN \parallel DM) \\ \angle ADK = \angle CAN \text{ (соств. при } AN \parallel DM) \\ \angle ADK = \angle AKD \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAN = \angle NAK \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos(2\angle CAN) =$
 $= \cos(\angle CAB)$

6) $\triangle ABC$: по теор. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle CAB)$$

$$6^2 = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$6^2 = 8x^2; x^2 = \frac{9}{2}; x = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{2}$$

$$AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

Дано:

$\triangle ABC$

$\{M; N\} \in BC$

$BM = MN = NC$

$AN \parallel DM$

$MD \cap AC = D$

~~$AB \parallel DC$~~ $A \in DC$

$BC = 6$

$AB = CD$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$

$AB = ?$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 ряд 2 ряд 3 ряд ...

\Rightarrow мест 12, учеников - 11 \Rightarrow
 \Rightarrow один ряд останется незаполненным

Рассмотрим такой ряд:

выберем 2-х учеников из 11 для этого ряда - C_{11}^2
 пусть тот, кто выше - δ
 тот, кто ниже - μ

условия удовлетворяют только такие рассадки δ и μ :

δ	μ	μ	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	δ	<input type="checkbox"/>	μ
μ	<input type="checkbox"/>	δ	δ

— их 4 варианта.

Чтобы выбрать такой ряд: C_{11}^2 и варианты.
 На этот ряд в сумме способов: $4 \cdot C_{11}^2$

Оставшиеся 9 мест заполнить 9 учениками.
 (*) Для выполнения условия будет достаточно рассадить выбранный набор для данного ряда в порядке возрастания, начиная с 1-й парты.

на 1-й ряд способов - C_9^3 это можно сделать лишь 1 способом
 на 2-й ряд - C_6^3
 на оставшийся всего 1 вариант рассадки (*)

Итого кол-во комбинаций:

$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 = 4 \cdot \frac{11!}{2!(11-2)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{16 \cdot (10 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)}{2 \cdot 2 \cdot 8} = 1760 \cdot 7 \cdot 120 = 1478400$$

Ответ: 1478400

120
+
840

960
x 1260
840

704
1408

1478400



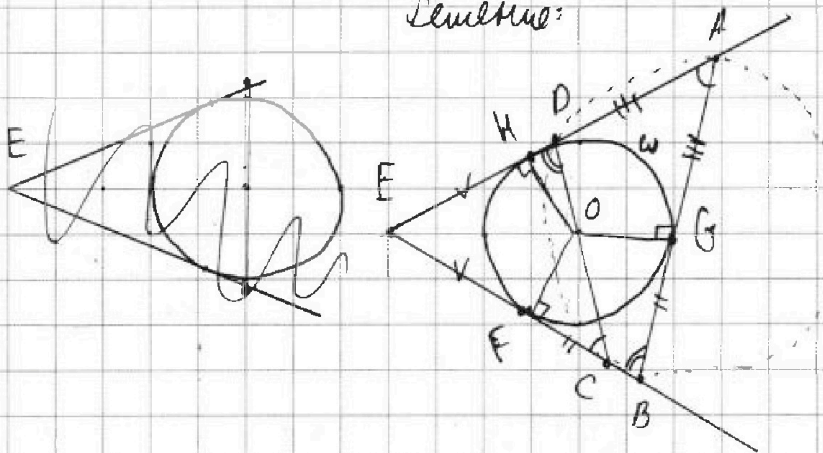
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Дано:

$ABCD$ - впис. 4-х-угол.

$AD \cap BC = E$

ω - окр. впис. в $\triangle AEB$
с центром в т. O

$O \in DC$

$BE = 12$

$ED + DO = ?$,
 $(ED + DO) \rightarrow \max$

1) т.к. $ABCD$ - впис. : $\angle CBA = \angle EDC$
 $\angle ECO = \angle BAE$

2) $Pow(E; \omega) = EC \cdot EB = ED \cdot AE$

3) $\{F; G; H\}$ - точки касания ω с сторонами

$\triangle AEB \Rightarrow EK = EF$

$FB = BG$

$AD = AG$

4) $\angle AEB = 180 - \angle EAB - \angle EBA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HOF = \angle EAB + \angle EBA$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. из любой деревни можно добраться в любую другую, причём единственным образом \Rightarrow дороги (рёбра) и деревни (вершины) образуют связный граф без циклов.

Центре деревни из которых выходят 5, 6, 7 и 9 рёбер пусть будут "основными" а другие - "остаточными".

От "остаточных" можно вывести только одно ребро \Rightarrow такие вершины не могут находиться между 2-мя группами, они должны быть замыкающими \Rightarrow они могут присоединяться только к "основным".

"основные" должны быть соединены последовательно. Прономеруем "основных".

Путь "основной" I имеет n_1 рёбер; II - n_2 рёбер; III - n_3 рёбер; IV - n_4 рёбер.

встроим их так: $\textcircled{I} - \textcircled{II} - \textcircled{III} - \textcircled{IV}$

тогда свободных рёбер останется:

$$y \text{ I-го: } n_1 - 1$$

$$y \text{ II-го: } n_2 - 2$$

$$y \text{ III-го: } n_3 - 2$$

$$y \text{ IV-го: } n_4 - 1$$

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + (n_4 - 1) =$$

количество "остаточных"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пока всего деревьев :

$$4 + (n_1 - 1) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + (n_4 - 1) =$$

$$= 4 + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - 1 - 2 - 2 - 1 =$$

$$= (5 + 6 + 7 + 9) - 2 = (5 - 2) + 7 + 15 =$$

$$= 3 + 7 + 15 = 25$$

Ответ: может быть деревьев 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

тогда
выражение
имело
смысл

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 > 0 & (1) \\ 1 - |x - y - 1| > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x - 2y - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x - 1) + 1(-y^2 - 2y - 1) + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 - (y+1)^2 > -2 \quad | : -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 < 2$$

часть плоскости, находящейся
внутри окружности с центром в
т. $O(1; -1)$ и радиусом $r = \sqrt{2}$

$$(2) \quad 1 - |x - y - 1| > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - (y+1)| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x - y < 2 \\ x < y+1 \\ -x + y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x < y+2 \\ x < y+1 \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > y+1 \\ x < y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y < x-2 \\ y > x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x-1 & \text{- часть плоскости ниже прямой } y = x-1 \\ y > x-2 & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x-2 \\ y > x-1 & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x-1 \\ y > x & \text{- часть плоскости выше прямой } y = x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

Сумма двух неотрицательных положительных парней не может давать 2

значит корни данных положительных целые числа:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 0 \\ \sqrt{1-|x-y-1|} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-x^2-y^2 = 0 \\ 1-|x-y-1| = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 2 \\ \sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-x^2-y^2 = 4 \\ 1-|x-y-1| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-x^2-y^2} = 1 \\ 1-|x-y-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-x^2-y^2 = 1 \\ 1-|x-y-1| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 & \text{точка } (x;y) \text{ принадлежит} \\ |x-y-1| = 3 & \text{окружности, но она не} \\ & \text{входит в зону решения} \\ & \text{(см. предыдущ. стр.)} \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = -2 & \text{сумма квадратов } < 0 \\ |x-y-1| = 1 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 & (1) \\ |x-y-1| = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ |x-y-1| = 0 \end{cases}$$

(1) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ - оар. с центром в $(1;-1)$ и радиусом 1

(2) $|x-y-1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y+1 \\ x-y-1=0 \\ x < y+1 \\ -x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = x-1$ - прямая линия

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

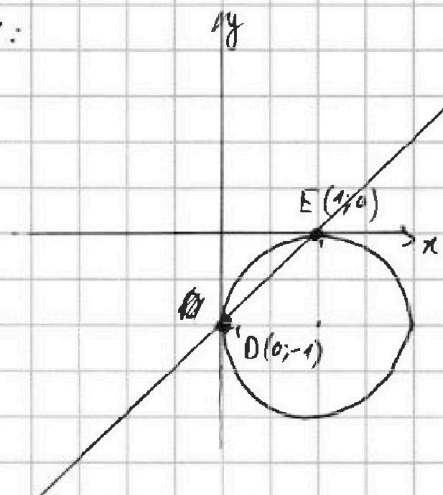
СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Изобразим решение системы:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$



Проверим принадлежат ли точки E и D окружности:

$$E: (1-1)^2 + (0+1)^2 = 1 \\ 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$D: (0-1)^2 + (-1+1)^2 = 1 \\ 1 = 1 \quad \checkmark$$

Прямая может или касаться (1 обр. точка) или пересекаться с окружностью.

В нашем случае она пересекла окружность в точках E(1;0) и D(0;-1) — это и есть

решения $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$

Ответ: (1;0), (0;-1)

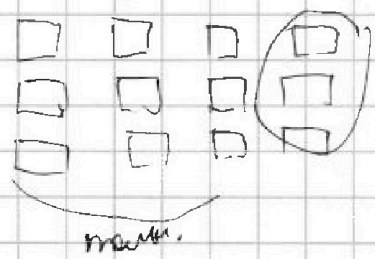
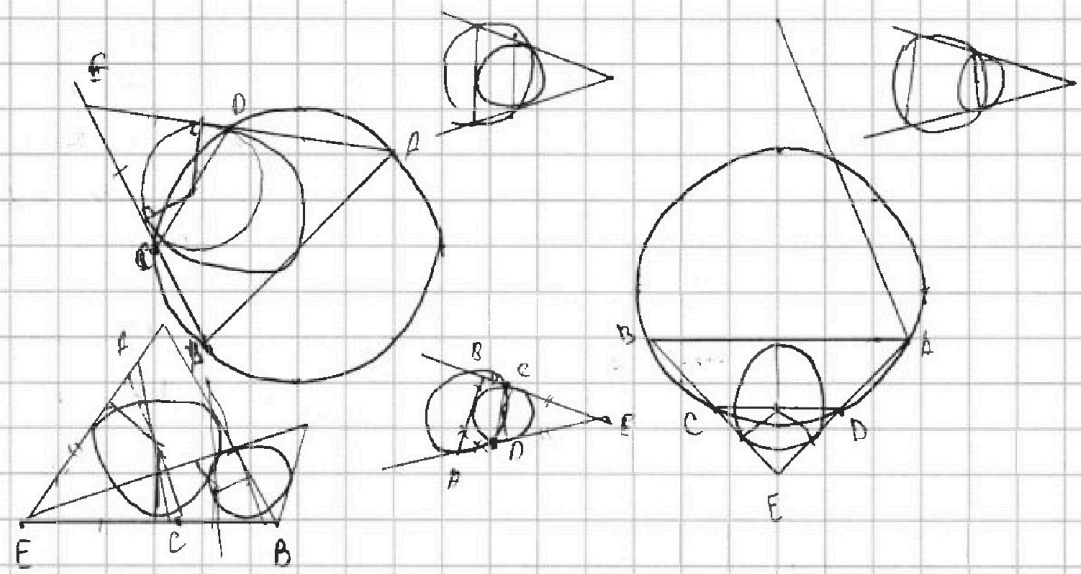


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

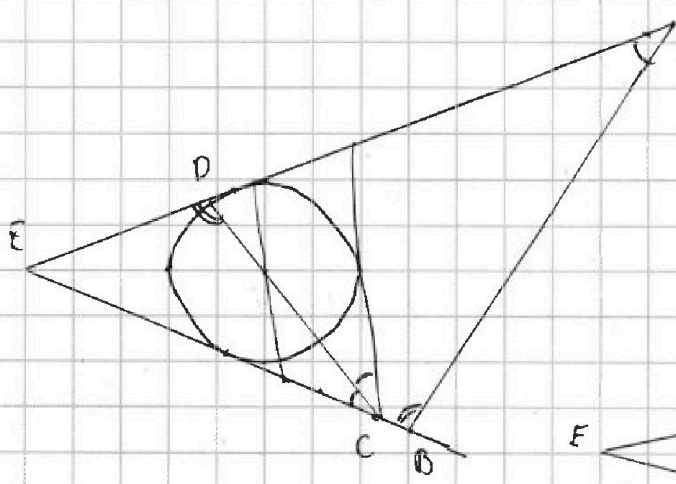
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

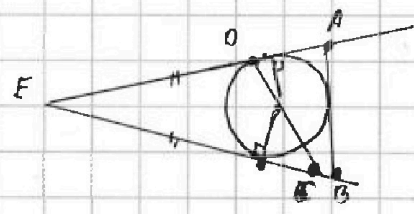


- все равно $(4 \cdot C_{11}^2) \cdot (P_2 \cdot P_3 \cdot P_3)$
 $C_9^3 \cdot C_6^3$



$$BE \cdot EC = ED \cdot AE$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{ED}{EB}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

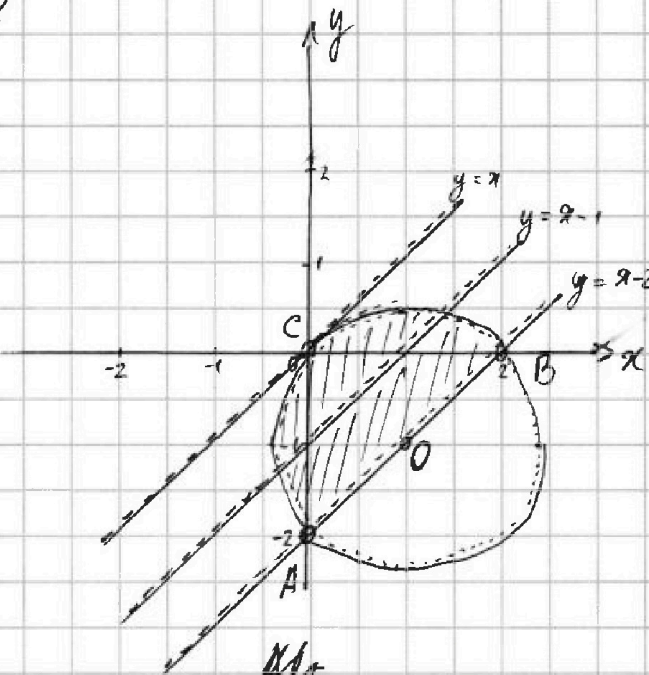
СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем систему условий на картинке:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 < 2 \\ \begin{cases} y < x-1 \\ y = x-2 \\ y > x-1 \\ y < x \end{cases} \end{cases}$$

Изобразим
систему
графически



Найдём точки пересечения окр.-ты с осью Oy:

$$(y_{AC} - 1)^2 + 1 = 2$$

$$(y_{AC} - 1)^2 = 1$$

$$y_{AC} \in \{-2; 0\}$$

Значит: $A(0; -2); C(0; 0)$

Пересечение с осью Ox:

$$(x_{BC} - 1)^2 + 1 = 2$$

$$x_{BC} \in \{0; 2\}$$

$$C(0; 0)$$

$$B(2; 0)$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB$ - диаметр.