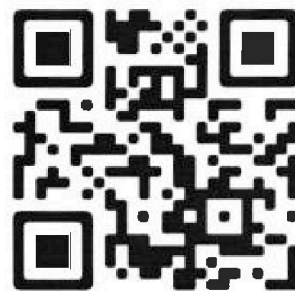




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t > 7$ .

$x^2 + 2 \cdot \sqrt{t}x + (4t^2 - 4) = 0$ .  $\sqrt{t}$  — это 2 корня,  
 $4t^2 - 4 > 0$ , т.е.  
 $D > 0$ ; корни  $\sqrt{t}$  и  $-\sqrt{t}$ , по т. Виета  $4t^2 - 4$ , т.е.

$t > 7$ .

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16t^2 = 4t^2.$$

$$\text{Ответ: } t \in \left(-\frac{2}{\sqrt{t}}, -7\right) \cup \left(7, \frac{2}{\sqrt{t}}\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$(a^2 - 2ab + b^2) + 75a - 75b = (a-b)^2 + 75(a-b) = (a-b)(a-b+75).$$

Поскольку  $a-b < 38$ ,  $(a-b)(a-b+75) < 38 \cdot 53 < 57 \cdot 87 = 77 \cdot 3^5$ . Значит  $p=2$ , а  $17p^5 = 17 \cdot 2^5$ . Поскольку

$a+b$  чётно, то и  $(a-b)$  чётно, а  $(a-b+75)$  — нечётно.

$|a-b+75| =$  либо 7, либо 17, но в первом случае

$$|a-b| = 17 \cdot 2^5, \text{ что } > 38.$$

Значит,  $|a-b| = 32$ ,  $|a-b+75| = 17$ . Если

$a-b > 0$ , то  $|a-b+75| > |a-b|$ . Значит  $a-b = -32$ .

Поскольку  $a+b=40$ , то  $a=4$ ,  $b=36$ . Ответ:  $a=4$ ;  $b=36$ .



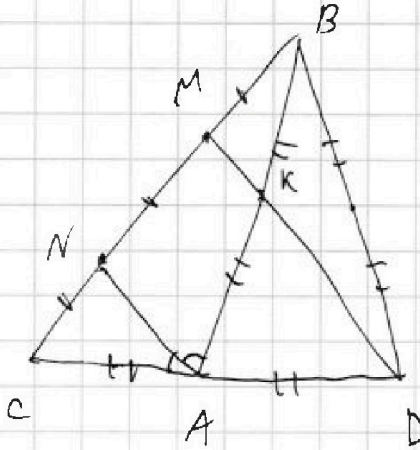
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть  $(MD \cap AB) = K$ .

Тогда  $BK = AK$ , т.к.  $MK$  - средняя линия  $\triangle ABN$ . Аналогично,

$AC = AD$ , т.к.  $AN$  - ср. линия

в  $\triangle MCD$ . Поскольку  $AB = CD$ ,

то и  $AC = AD = KA = KB$ .

Поскольку  $\frac{AC}{AB} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$ , то  $AN$  - биссектриса  $\angle CAB$ . По условию,  $\cos \angle CAB = -\frac{1}{4}$ . Значит  $\angle CAB$  тупой, и  $\cos \angle BAD = \frac{1}{4}$ . То есть высота

из точки  $B$  на  $AD$  падает в середину  $AD$ .

Значит  $AB = BD$ . Теперь,  $4AB^2 = 2BC^2 + 2BD^2 - CD^2$

(формула медианы). Пусть  $AC = x$ . Тогда  $16x^2 = 288 +$   
 $+ 8x^2 - 4x^2$ ,  $12x^2 = 288$ ,  $x^2 = 24$ ,  $x = 2\sqrt{6}$ , а  $AB = 2x =$   
 $= 4\sqrt{6}$ . Ответ:  $4\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_8^2 \cdot 6 C_6^3 \cdot 3.$$

Суммарно у трёх вариантов:

$$\cancel{BA} \cancel{BAA} \cancel{AAB} \quad 3C_8^2 \cdot C_6^3 + 3C_8^3 \cdot 8 \cdot 7 + 3C_8^3 \cdot C_6^3 = 3C_8^3 (8 \cdot 7 + 2C_6^3)$$
$$= 3C_8^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot C_6^3 = C_8^3 \cdot C_6^3 \quad \text{ответ: } C_6^3 \cdot C_8^3$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Рассмотрим 3 случая: свободное место в первой, второй и третьей "строчке" соответственно. Строка - это ряд в матрице из карт, перпендикулярная рядам.

I.  $\overline{mmmm} \leftarrow \text{деска}$

1	x	.	.
2	.	.	.
3	.	.	.
	1	2	3

Выберем 2 карты на первый ряд. Это  $C_8^2$  - так единственного

вариант есть - по рассту. Выберем из оставшихся шести троек на 2 ряд -  $C_6^3$ . Опять же единственный вариант - по рассту. Вставим 3 по рассту на 3 ряд. Всего  $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot 3$ , т.к.

свободное место может быть в <sup>0-ой</sup> строке.

II.  $\overline{mm}$

7	.	.	.
2	x	.	.
3	.	.	.
	7	2	3

Эт заняты 1 место 1 ряда -  $C_8^1$  вар., третье место 1 ряда - 7. Оставшиеся -  $C_6^3$ , как в прошлом варианте.

Всего  $8 \cdot 7 \cdot C_6^3 \cdot 3$

III. Вариант аналогичен первому. Всего:

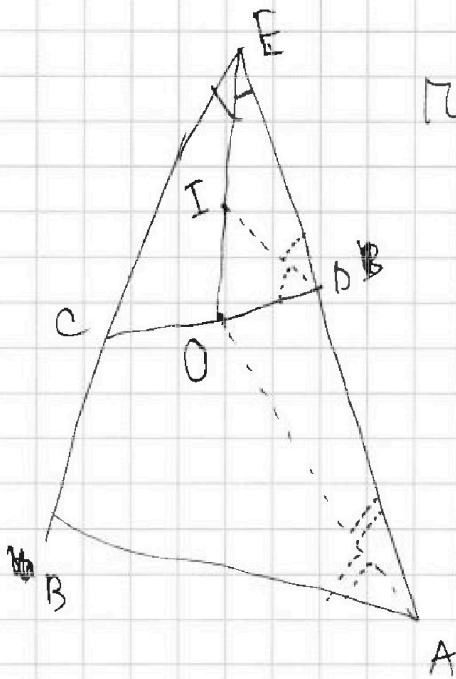


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5.

Пусть  $I$  - центр впис. окр.

$$\triangle PCE. \text{ Тогда } \frac{EI}{EO} = \frac{PE}{BE},$$

т.к.  $\triangle PEC \sim \triangle BEA$ .

$$\text{В силу подобия, } \frac{EI}{EO} = \frac{PE}{DE+EO}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{EI}{EO} = \frac{PE}{PO}. \text{ Тогда если } \frac{PE}{PE+EO} = \frac{PE}{BE} \Rightarrow$$

$$PO+OE = BE = PO. \text{ Ответ: } PO.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



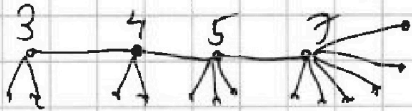
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Если представить остров в виде графа, где деревни - вершины, дороги - рёбра, то получится дерево (из условия) на  $x+4$  вершинах, где  $x$  - кол-во деревьев с одной деревней. Поскольку в дереве вершин на одну больше, чем рёбер, то  $\frac{x+4}{2} = x+3$ ,  $x=2$ . Пример, очевидно, существует:



Ответ: 17.





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Поскольку  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то и выражения  $xy$  и  $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ . Поскольку корни корней из целого числа  $\neq 0$ , есть 2 варианта: когда корни равны  $(1 \text{ и } 0)$  и  $(0 \text{ и } 1)$  соответственно. Пусть  $\sqrt{t} = 7$ , то  $t = 7$ ; если  $\sqrt{t} = 0$ , то  $t = 0$ .  
Значит сами подкоренные выражения равны  $1$  и  $0$ .

$$\text{I. } \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 7 & (2) \\ 7 - (x + y - 2) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow |x + y - 2| = 7 \Rightarrow x + y = 3 \text{ (a)} \text{ или } x + y = 7 \text{ (b)}$$

$$\text{(a): } x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 3$$

$$x(2-x) + (3-x)(x-2) = 7 = 2x - x^2 + 3x - 3 - x^2 + x = 7$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 = (x-1)(x-2) \Rightarrow x = 1, 2.$$

$$(x, y): (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{b) } x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 7$$

$$x(2-x) + (7-x)(x+1) = 7 = 2x - x^2 + x + 7 - x^2 - x$$

$$x^2 - 2x = 0 = x(x-2) \Rightarrow x = 0, 2.$$

$$(x, y): (0, 7), (2, 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad 2x+2y-x^2-y^2=0(1), \quad 7-(x+y-2)=7(2)$$

$$(2) \Rightarrow (x+y-2)=0 \Rightarrow x+y=2.$$

$$\cancel{2x+2y} \quad x(2-x)+y(2-y)=x(2-x)+(2-x)x=2x(2-x)=0$$

$$x=0; 2.$$

$$(x; y): (0; 2), (2; 0)$$

$$\text{Ответ: } (x; y): (2; 0), (0; 2), (2; 7), (7; 2), (0; 7), (7; 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

The page contains handwritten mathematical work on grid paper. The work includes several diagrams and equations:

- Top left: A circle with a horizontal chord and some faint lines.
- Top right: A triangle with a vertical line from the top vertex to the base.
- Middle left: A triangle with a vertical line from the top vertex to the base.
- Middle right: A triangle with a vertical line from the top vertex to the base.
- Bottom left: A triangle with a vertical line from the top vertex to the base.
- Bottom right: A triangle with a vertical line from the top vertex to the base.

There are also several lines of algebraic equations and calculations, some of which are crossed out or partially written. The work is somewhat messy and appears to be a student's attempt at solving a problem.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper:

$$\sqrt{(x-2)(x-4)} + \sqrt{(x-2)(x-7)} = 7$$

$$7x^2 \Rightarrow 72x^2$$

$$(x-2)(x-4) = (x-2)(x-7) + x^2$$

$$1 - |x-4-2| = 0 \quad x(x-2) + 3x/(x-7) = 7$$

$$x(x-2) = (x-2)(x-7) + x^2$$

$$x^2 - 2x = x^2 - 9x + 14 + x^2$$

$$-2x = -9x + 14 + x^2$$

$$x^2 - 7x + 14 = 0$$

$$x = 7 \pm \sqrt{49 - 56} = 7 \pm \sqrt{-7}$$

Diagrams of triangles:

- A triangle with vertices A, B, C and side lengths a, b, c.
- A triangle with side length 7.
- A triangle with side length 7.
- A triangle with side length 7.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

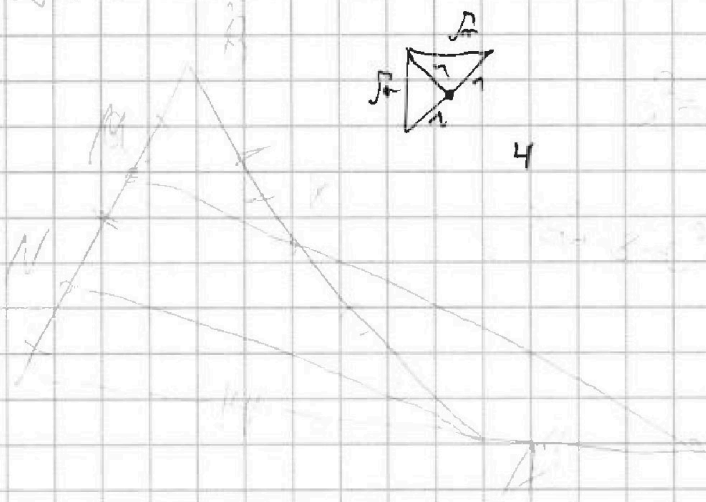
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

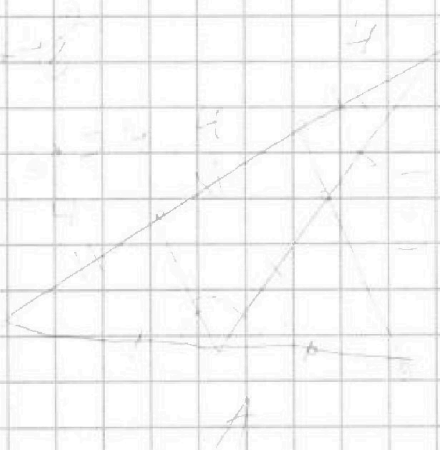
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



a  $\Delta A B C$   $\Delta B C$



4



$$AB = BC + AC$$

$$AB = BC + AC$$

$$AB = BC$$

