



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p - некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

пусть x_1 и x_2 - действительные корни уравнения такие, что $x_1 \neq x_2$, и $x_1 \cdot x_2 > 0$

тогда первое условие, что $x_1 \neq x_2$, можно записать как, то что в квадратном уравнении дискриминант > 0

$$D > 0$$

$$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

$$4 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 4$$

$$\begin{cases} t < 2 \\ t > -2 \end{cases} \Rightarrow t \in (-2, 2)$$

второе условие, что $x_1 \cdot x_2 > 0$ можно выразить через теорему Виетта, $x_1 \cdot x_2 = c$, знаменит $c > 0$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases} \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

тогда на пересечении полученных нами множеств получаем, что:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

тогда это значит, что для того чтобы уравнение

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

имело 2 различных действительных корня произведение которых положительно t должно входить в одну из множеств

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.
 $a_1 = \frac{65+49}{4} = 28,5$ не подходит т.к. a - натуральное число

$$a_2 = \frac{65-49}{4} = 4$$

т.к. a_1 не подходит, значит верный вариант - a_2 ,

$$a = 4$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a = 40 - 4 = 36$$

~~Вариант~~ b подходит под условия

Ответ: $a = 4$; $b = 36$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

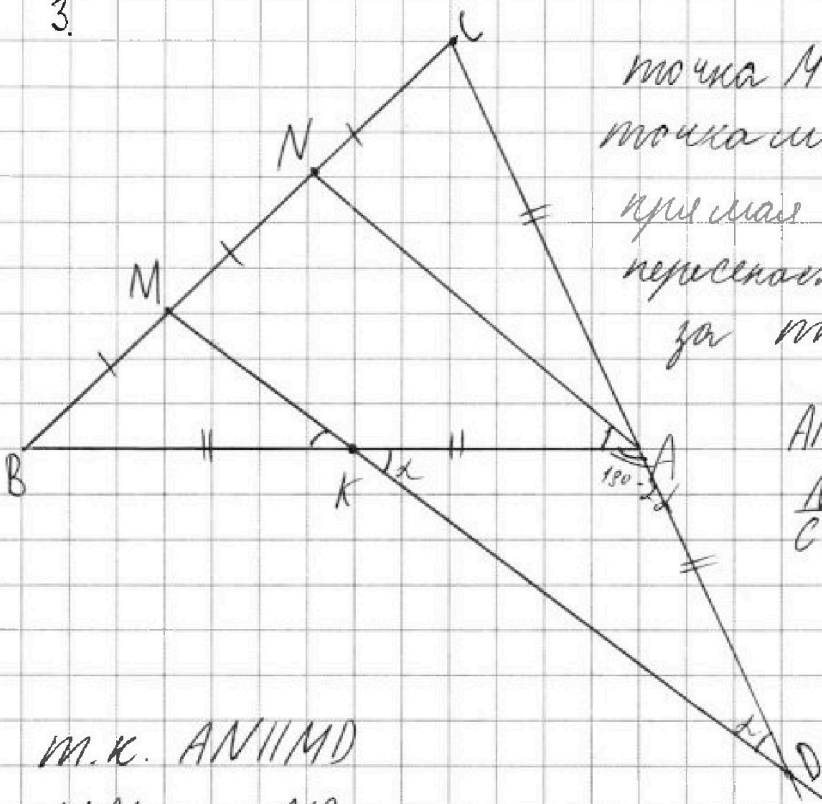


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.



точка M лежит между
точками B и N, т.к.
прямая параллельная BC
пересекает прямую BA
за точкой A

$$AN \parallel MD \Rightarrow$$

$$\frac{NC}{CA} = \frac{MB}{CD} \Rightarrow$$

$$CD = 2CA$$

т.к. $AN \parallel MD$

$$\frac{NM}{AK} = \frac{NB}{AB} \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB$$

$$AK = BK = CA = AD = \frac{1}{2} AB$$

$$BC = BM + MN + CN = 12$$

$$BM = MN = CN = \frac{1}{3} BC = 4$$

$\triangle AKD$ - равнобедренный, $AK = AD \Rightarrow \angle AKD = \angle ADK$

$\angle MKB = \angle AKD$ как вертикальные

$\angle NAB = \angle MKB$ как соответственные

углы
 $\angle ADK = \angle$

тогда:

$$\angle ADK = \angle AKD = \angle MKB = \angle NAB = \angle$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$\text{в } \triangle AKD \quad \angle KAD = 180^\circ - \angle AKD - \angle ADK = 180^\circ - 2d$$

$\angle CAD$ - тупой, поэтому $\angle CAD = 180^\circ$

$$\angle CAD = \angle CAN + \angle NAB + \angle KAD = \angle CAN + d + 180^\circ - 2d$$

$$\Rightarrow \angle CAN = d$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2d = -\frac{1}{4}$$

$$\text{в } \triangle ABC \quad \angle CAB = \angle CAN + \angle NAB = 2d$$

можем пусть $AC = x$, тогда $AB = 2AC = 2x$

можем по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos 2d \cdot AB \cdot AC$$

$$12^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2x \cdot x$$

$$144 = 6x^2$$

$$x^2 = 24$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2x = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$

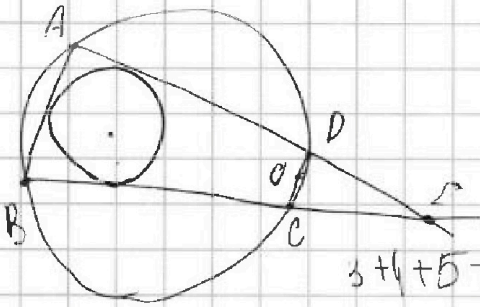
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3+4+5+7 = 19 - 3 - 16 + 1 = 11$$

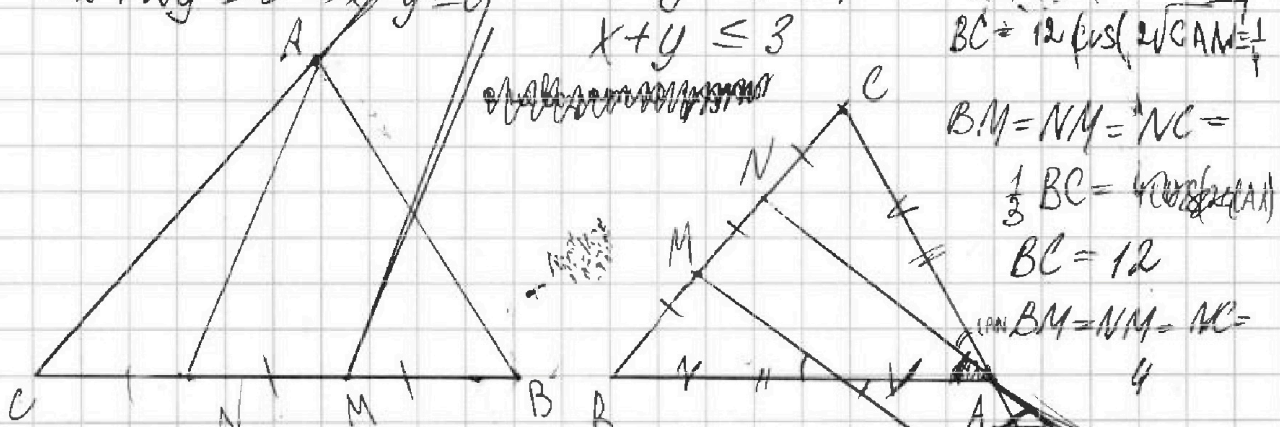
$$7 \cdot \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + |1-|x+y-2|| = 1$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \quad | \quad 1-|x+y-2| \geq 0$$

$$2x+2y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0 \quad | \quad x+y-2 \leq 1$$

$$x+y \leq 3$$

$BC = 12 \cos(\angle CAN) = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$



$BM = NM = NC = \frac{1}{3} BC = 4$
 $BC = 12$
 $BM = NM = NC = 4$

$\cos \angle CAN = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$12^2 = (2x)^2 + x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot x$
 $144 = 4x^2 + x^2 + x^2$
 $144 : 6 = 24$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.

Из всех, кроме 4 деревьев выходит по одной дороге, значит из каждой такой деревни дорога должна вести в одну из 4 деревьев

из которых есть много дорог, т.к. если это не так, то 2 деревни с 1 дорогой будут соединены вместе и в них невозможно будет попасть из другой деревни, а это противоречит условию.

тогда пусть 4 деревни - шавыне, тогда каждая другая деревня соединена с шавной, но шавыне деревни тоже должны быть соединены между собой. т.к. из любой шавной деревни можно попасть в любую, то между 4 шавыными деревнями не может 3-х дорог. если 4 между ними будет хотя бы 4 дороги, то у нас получится 4 цикла, а значит из одной деревни мы сможем попасть в другую более чем одним путем, значит между шавыными деревнями ровно 3 дороги всего дорог из шавной деревни:

$$3 + 4 + 7 + 5 = 19 \quad 19 - 3 = 16 \text{ дорог - выходит из}$$

значит всего у нас есть 16 шавных деревьев в других деревнях

$$16 + 4 = 20 \text{ деревьев - всего}$$

Ответ: 20 деревьев



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 & \text{т.к. } x^2+y^2 \geq 0, \text{ то } 2x+2y \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 & 2x+2y \geq x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 1-|x+y-2| \geq 0 \\ |x+y-2| \leq 1 & \Rightarrow \begin{cases} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} \times x+y \in [1; 3]$$

$$\begin{cases} 2x+2y \geq x^2+y^2 \\ 2x+2y \in [2; 6] \end{cases}$$

т.к. модуль всегда ≥ 0 , ~~но~~ а выражение под модулем принимает только целые значения, то:

$\sqrt{1-|x+y-2|}$ может быть равен только 0 или 1, т.к. $|x+y-2|$ равен может быть равен только 0 или 1

1) если $\sqrt{1-|x+y-2|} = 1$

$$\sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \Rightarrow 1-|x+y-2| = 1$$

$$|x+y-2| = 0 \Rightarrow x+y = 2 \Rightarrow 2x+2y = 4$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} + 1 = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{мы можем выразить } y \text{ через } x$$

$$y = 2 - x$$

$$x^2 + (2-x)^2 = 4 \quad x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{решения} - (0; 2), (2; 0)$$

2) если $\sqrt{1 - |x+y-2|} = 0$

$$\sqrt{1 - |x+y-2|} = 0 \Rightarrow 1 - |x+y-2| = 0 \Rightarrow |x+y-2| = 1$$

$$\begin{cases} x+y-2 = 1 \\ x+y-2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y = 6 & (1) \\ 2x+2y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1 - |x+y-2|} = 1$$

(1)

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} + 0 = 1 \Rightarrow \sqrt{6 - x^2 - y^2} = 1$$

$$6 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 - x$$

$$x^2 + (3-x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5$$

$$2x^2 - 6x = -4$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} - \text{решения: } (2; 1), (1; 2)$$

(2)

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} + 0 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1$$

$$2-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ возвращаем } y \text{ через } x:$$

$$y = 1-x$$

$$x^2+(1-x)^2=1$$

$$x^2+1-2x+x^2=1$$

$$2x^2-2x=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

решения - $(0; 1), (1; 0)$

все эти решения подходят и удовлетворяют условиям

Ответ: $(0; 2), (2; 0), (2; 1), (1; 2), (0; 1), (1; 0)$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

a и b - натуральные числа

$$a + b = 40$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b - 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b) \cdot (a-b+15) = 17p^5$$

или можем выразить b через a

$$a + b = 40, \text{ тогда}$$

$$b = 40 - a$$

$$(a - (40 - a))^2 + 15(a - (40 - a)) = 17p^5$$

$$(2a - 40) \cdot (2a - 25) = 17p^5$$

$$4a^2 - 80a - 50a + 1000 = 17p^5$$

В левой части все числа четные, значит сумма тоже четное число, значит

$17p^5 : 2$, т.к. $17 \not\div 2$, значит, что $p^5 : 2$, но p - простое число, единственное простое число которое в 5 степени делится на 2, это 2, значит $p = 2$

$$p^5 = 2^5 = 32 \Rightarrow 17 \cdot p^5 = 17 \cdot 32 = 544$$

$$4a^2 - 130a + 1000 = 544$$

$$4a^2 - 130a + 456 = 0$$

$$2a^2 - 65a + 228 = 0$$

$$D = 65^2 - 4 \cdot 2 \cdot 228 = 4225 - 1824 = 2401$$

$$a = \frac{65 \pm \sqrt{2401}}{2 \cdot 2}$$