



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}t(x + 4t^2 - 4) = 0$$

2 корня  $\Rightarrow D > 0$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot (4t^2 - 4) =$$

$$= 12t^2 - 16t^2 + 16 = \cancel{16t^2} - 4t^2 + 16$$

$$-4t^2 + 16 > 0, \quad | : (-4)$$

$$t^2 - 4 < 0$$

$$(t-2)(t+2) < 0$$

$$t \in (-2; 2)$$



$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow$  по т. Виета:

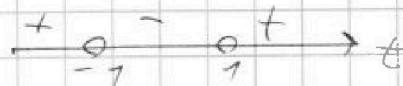
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4t^2 - 4}{1} = 4t^2 - 4;$$

$$4t^2 - 4 > 0 \quad | : 4$$

$$t^2 - 1 > 0$$

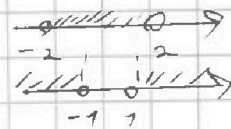
$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$



Получаем

$$\begin{cases} t \in (-2; 2) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ. } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} 2.$$

$$a + b = 40$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5$$

$p$  - простое.

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$$

$14p^5$  можно разложить на 2 множителя

получим:  $14p^5 = 1 \cdot 14p^5$

Заметим  $a = 40 - b \quad (-1) \cdot (-14p^5)$

~~$(40 - b - b)(40 - b)$~~

$(40 - b - b)(40 - b - b + 15) = (40 - 2b) \cdot (55 - 2b)$

Заметим, что ~~одно~~ одно из чисел  $(40 - 2b)$  и  $(55 - 2b)$  всегда будет четным  $\Rightarrow$  их произведение тоже четное. (Также можно вывести 2 из скобок)

$\Rightarrow 14p^5$  тоже четное. Единственное простое  $p$ , при котором это возможно, это  $p = 2$ .

Значит,

$$(40 - 2b) \cdot (55 - 2b) = 14 \cdot 2^5 = 14 \cdot 32$$

$$2(20 - b) \cdot (55 - 2b) = 14 \cdot 32 = 14 \cdot 2 \cdot 16$$

$$(20 - b)(55 - 2b) = 14 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 16 \\ \hline 102 \\ 140 \\ \hline 224 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten work on grid paper showing a quadratic equation and its solution. The equations are:

$$1100 - 40b - 55b + 2b^2 - 242 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$D = 95^2 - 4 \cdot 2 \cdot 828 = 49^2$$

$$b_1 = \frac{95 - 49}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

$$b_2 = \frac{95 + 49}{2} = 36$$

The student has circled  $b = 36$  and calculated  $a = 40 - b = 40 - 36 = 4$ . There are several vertical multiplication problems on the right side of the page, including  $95 \times 95$ ,  $828 \times 2$ , and  $49 \times 49$ .

Презентация  
решения:

1100 - 40b - 55b + 2b^2 - 242 = 0  
 2b^2 - 95b + 828 = 0  
 D = 95^2 - 4 \cdot 2 \cdot 828 = 49^2  
 b\_1 = \frac{95 - 49}{2} = \frac{46}{2} \notin \mathbb{N}, \text{ не подходит.}

$$b_2 = \frac{95 + 49}{2} = 36.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 36 \\ a = 40 - b = 40 - 36 = 4. \end{cases}$$

Ответ.  $a = 4$   
 $b = 36$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

~~Пусть  $BM = MN = NC = 4$~~

$BM = MN = NC = 4$   
 $= \frac{1}{3} BC = 4$

Решение:

По Т. Фалеса  
Спрям  $AN \parallel DM$ ,  
 $\angle BCD$ .

$CA = AD = x \Rightarrow AB = CD = CA + AD = 2x$   
(по усл.)

~~В  $\triangle ABC$~~   $AN$  делит сторону  $BC$  на отрезки, пропорциональные сторонам  $AB$  и  $AC$

$\left( \frac{BN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{AB}{AC} \right) \Rightarrow AN$  — биссектриса  $\angle BAC$

$\Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$ ,

$\Rightarrow$  (по усл.)  $\cos \angle BAC = -\frac{1}{4}$ .

Заметим.  $\cos$  в  $\triangle BAC$ .

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ ,  
 $144 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ ,  
 $144 = 5x^2 + x^2$ ,  $144 = 6x^2$   $x^2 = 24$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AB = 2x = 4\sqrt{6}$$

Ответ.  $AB = 4\sqrt{6}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

реш. к.

$ABCD$  - впис.

$$\angle BCD = 180^\circ -$$

$$- \angle BAD,$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA \quad \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$$

$$\Rightarrow \angle ECD = 180^\circ - \angle BCD = \angle BAD,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$$

$$\gamma = 360 - 180 + \beta - \alpha - 90 =$$

$$= 90 + \beta - \alpha$$

пусть

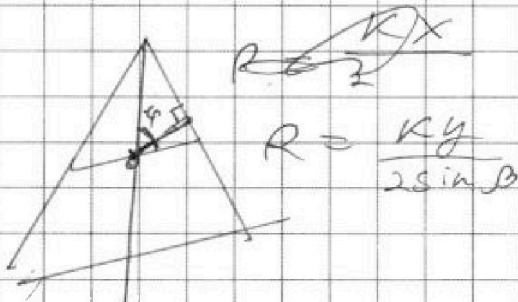
$$BE = Kx,$$

$$CE = x$$

$$\begin{aligned} AE &= Ky \\ DE &= y \\ AD &= z \end{aligned}$$

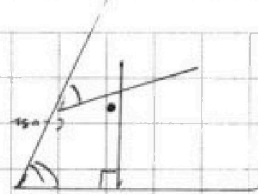
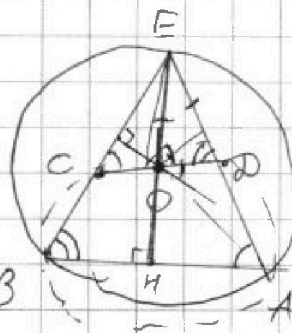
$\triangle ABE$

$$\frac{Kx}{\sin \alpha} = \frac{Ky}{\sin \beta} = 2R$$



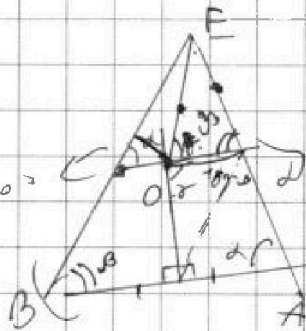
$\triangle ADE$ :

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sin \beta} &= \frac{y}{\sin \angle EAD} = \frac{y}{\sin \gamma} \\ &= \frac{y}{\sin(90 + \beta - \alpha)} \end{aligned}$$

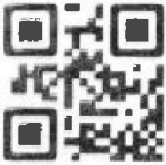


$$360 - (180 + \alpha + \beta) - 90 =$$

$$= 90 + \beta - \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно

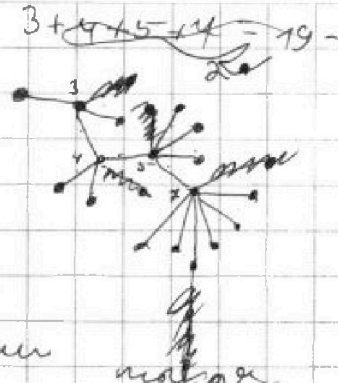
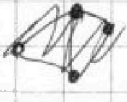


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Каждая  
деревья с одной  
дерева, выходящей из  
нее, должно соединиться  
этой деревей с деревей с  
3, 4, 5 или 4 деревьями. Если  
"одинаковая" деревья соединена с  
другой "одинаковой", то эти две  
деревья не могут быть больше ни  
к чему прикреплены (соединены),  
иначе их степень (кол-во выходящих  
гребей) будет  $> 1$ .



Значит, все "одинаковые" соединены  
с какой-то не "одинаковой" деревей.  
Значит, кол-во "одинаковых" деревьев —  
это количество всех гребей минус  
кол-во гребей между не "одинаковыми"  
деревьями.

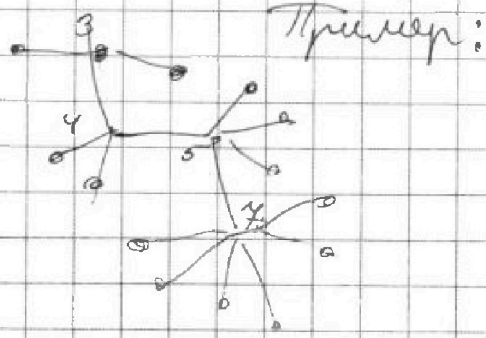
Итого:

Кодировано:

$$= N_{\text{гребей}} - N_{\text{гребей}},$$

где  $N_{\text{гребей}}$  — всего гребей,

$N_{\text{гребей}}$  — всего гребей между не "одинаковыми"







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

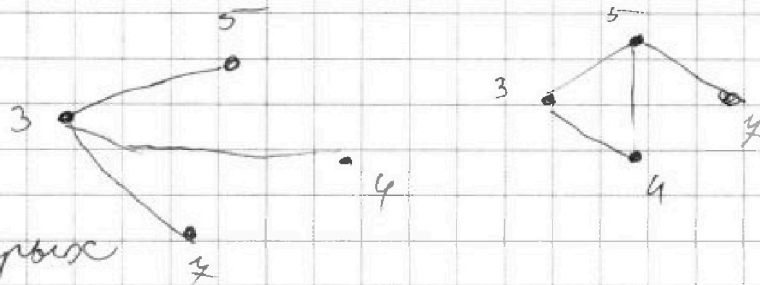
СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{Аналоги} \quad N_{\text{дерев}} - N_{\text{дерев}} = \\
 & = (3+4+5+4) - 2 \cdot N_{\text{дерев}} = \left. \begin{array}{l} \text{(т.к. каждая} \\ \text{деревяшка между} \\ \text{не "единицами"} \\ \text{убирает "единицы"} \\ \text{двойные)} \end{array} \right\} \\
 & = N_{\text{единицы}}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим значения  $N_{\text{дерев}}$ .

Оно может быть ~~каким-то~~ только 3 (т.к. не "единицы" обязательно соединены) ~~до~~ (и если такое дерево больше 3,



но из-за некоторых

деревьев  $\exists$  других. Будет несколько вариантов.

$\Rightarrow$   $N_{\text{единицы}}$  всегда будет

$$(3+4+5+4) - 2 \cdot 3 = 13.$$

$$\text{Всего деревьев } 13 + 4 = 17.$$

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим все случаи:

a)  $x + y = 1$

$x = 1 - y$

$$\sqrt{1 \cdot (2-1) + 2 \cdot (1-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |1-2|} = 1$$

$$\sqrt{1 + 2y - 2y^2} + 0 = 1$$

$$1 + 2y - 2y^2 = 1$$

$$y^2 - y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{мин}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 0$$

b)  $x + y = 2$   $x = 2 - y$

$$\sqrt{2 \cdot (2-2) + 2 \cdot (2-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |2-2|} = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot (2-y) \cdot y} + 1 = 1$$

$$y(2-y) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{мин}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 0$$

b)  $x + y = 3$

$$\sqrt{3 \cdot (2-3) + 2 \cdot (3-y) \cdot y} + \sqrt{1 - |3-2|} = 1$$

$$\sqrt{-3 + 6y - 2y^2} = 1$$

$$-2y^2 - 6y - 3 - 1 = 0 \quad (\cdot 2)$$

$$y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2 \quad \text{мин}$$

$$y = 2 \quad x = 1$$

В итоге:

Ответ.  $(1; 0), (0; 1), (2; 0), (0; 2),$

$(2; 1), (1; 2).$

это все пары  $(x; y)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x+y-2)} = 1$$~~

~~$$-\alpha(2+\alpha) + \beta(1-\alpha) = (\dots)$$~~

~~$$\approx -\alpha(2+\alpha) \in (\dots)$$~~

~~И т.д.~~

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-(x+y-2)} = 1$$

Условие уравнения было взято

$$1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$|x+y-2| \leq 1 \quad |^{\wedge} 2$$

$$(x+y-2)^2 \leq 1,$$

$$(x+y-2)^2 - 1^2 \leq 0,$$

$$(x+y-3)(x+y-1) \leq 0$$



$$x+y \in [1; 3]$$

т.к.  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то  $x+y \in \mathbb{Z}$ ,

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} 2x+2y-x^2-y^2 &= 2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy = \\ &= (x+y)(2 - (x+y)) + 2xy. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = \sqrt{(x+y)(2-(x+y)+2xy)}$$

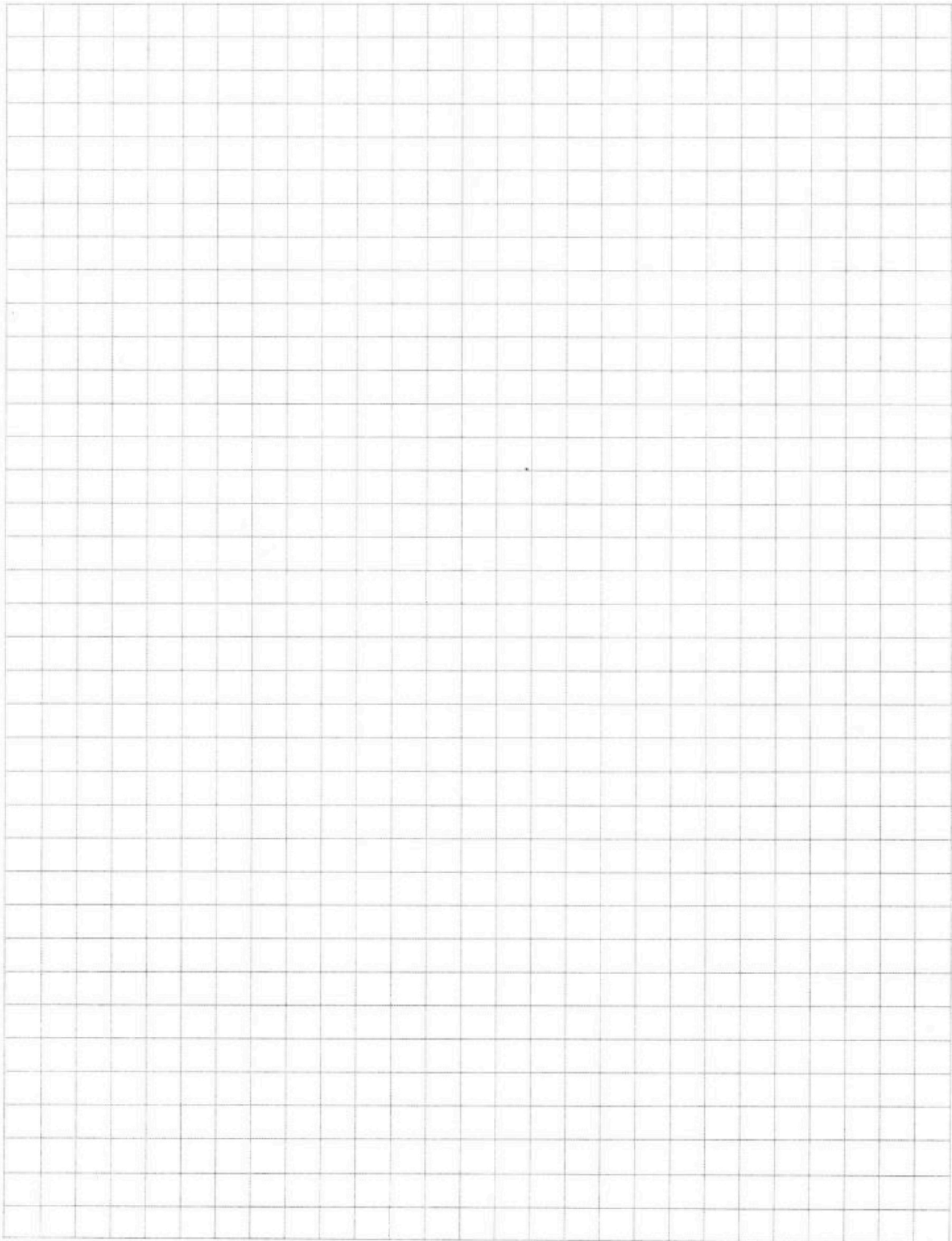


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч.

$(x+y-2)(x+y-2) =$   
 $= 2(x+y)(x+y-2) - 2(x+y+2) =$   
 $= x^2 + xy + y^2 - 2y + xy + 4$   
 $x^2 + xy - 2x + xy + y^2 - 2y - 2x - 2y + 4 = 2x - 2y + 4 =$

$(1-a-b)^2 a$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$   
 $a + \sqrt{ab} + b = 1$

$\sqrt{ab} = 1 - a - b$   
 $ab = (1-a-b)^2 / 4$

$(x+y)^2 =$   
 $= x^2 + y^2 - 2xy$

нч.

$\sqrt{2(x+y) - (x^2+y^2)} + \sqrt{1-(x+y-2)} =$   
 $= (2x+2y+2xy-x^2-y^2) / 2 + x+y$   
 $= 2(x+y+xy) -$   
 $2(x+y) - (x+y)^2 + 2xy = (x+y)(2-x-y+2)$   
 $= (x+y)(4-(x+y))$

$b + h_2 - xh_1 - yh_2 = (2-b-y)z =$   
 $= 2x + h_2 - xh_1 - yh_2 - z = (2-b-y)z$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-x^2 - y^2 + 2x + 2y = -(x+y)^2 + 2x + 2y + 2xy =$$

$$-(x+y)^2 + 2(x+y - xy) \quad a = x+y$$

$$(x+y)(2-x-y) + 2xy \quad b = xy$$

$$a = x+y-2 \quad \sqrt{(a+2)(-a)+b} \quad 1 - |x+y-2| \quad |x+y-2| \leq 1$$

$$\sqrt{2a+2b-a^2} + \sqrt{1-(a-2)} = 1$$

$$\sqrt{2a+2b-a^2}$$

$$1. \quad a(2-a) + 2b \quad x = 1-y$$

$$\sqrt{1+2y-2y^2} + \sqrt{0} = 1$$

$$-y^2 + y + 1 + 1 = 0$$

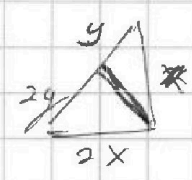
$$2y^2 - 2y = 0 \quad y=0 \quad x=1$$



$$x+y \in (1; 3)$$

$$2. \quad \sqrt{0+2y-y^2} + \sqrt{1} = 1 \quad x = 2-y$$

$$2y^2 - 2y = 0 \quad y=0 \quad x=2$$



$$3. \quad \sqrt{-1+3y-y^2} + \sqrt{0} = 1 \quad x = 3-y$$

$$y^2 - 3y = 0 \quad y=0 \quad x=3$$

$$a^2 = (x-b)^2 + (y-b)^2 + (x+y-2)^2 = (x-b)^2 + (y-b)^2 + (x+y-2)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$