



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[6]{q^3} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}$$

$$x \neq 3$$

$$\sqrt[6]{q^9} = \sqrt{x+4}$$

$$\sqrt[6]{q^{11}} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

ОДЗ:

$$(15x+6)(x-3)^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{2}{5}$$

$$x-3 < 0 \Rightarrow 15x+6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$x \neq 3$, т.к. тогда

$$x-3 > 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \Rightarrow x > 3 \quad (x-3)^3 = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cap (3; +\infty).$$

$$(15x+6)(x-3)^3 \text{ по знаку совпадает с } \frac{15x+6}{(x-3)^3}.$$

$$\text{Если } \sqrt[6]{q^3} = 0, \text{ то } 15x+6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} +$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{q^9} = 0 \Rightarrow 0 = x+4 \Rightarrow x = -4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Противоречие} \\ \text{здесь} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \sqrt[6]{q^3} \neq 0, \sqrt[6]{q^9} \neq 0$, иначе $\sqrt[6]{q^3} = 0$, а это невозможно, аналогично $\sqrt[6]{q^{11}} \neq 0$, иначе $\sqrt[6]{q^3} = 0$.

$$\frac{\sqrt[6]{q^{11}}}{\sqrt[6]{q^3}} = \sqrt{(x-3)^4} \Rightarrow q^8 = \pm (x-3)^2 \Rightarrow q^8 = (x-3)^2, \text{ т.к.}$$

$$q^8 > 0, (x-3)^2 > 0 \Rightarrow \text{знак "+"}$$

$$\sqrt[6]{q^9} \cdot q^2 = \sqrt[6]{q^{11}}$$

$$(x+4)^8 \sqrt{(x-3)^4} = \sqrt{(x-3)} \cdot \sqrt{(15x+6)}.$$

$$(x+4)^4 \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{(x-3)(15x+6)}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $x-3 > 0$: $x=3 \neq 0$ *из ОДЗ.*

$$(x+4)^4 \sqrt{(x-3)^2} = (x+4) \sqrt{x-3}$$

$$(x+4) \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{15x+6}$$

$$x+4 = \sqrt{15x+6} \Rightarrow x+4 \geq 0$$

*и $15x+6 \geq 0$
из Т. Буаега.*

$$x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$\rightarrow x_1 = 5$
 $\rightarrow x_2 = 2$

$x_1 = 5$ - подходит

$x_2 = 2$ - не подходит из ОДЗ.

2) $x-3 < 0$.

$$\sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt{3-x}$$

$$(x+4) \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{15x+6}$$

~~$$x+4 = \sqrt{15x+6} \Rightarrow x+4 \geq 0$$~~

~~$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$~~

~~$$x^2 + 23x + 22 = 0 \Rightarrow x_3, x_4 = -22, -1$$
 из Т. Буаега~~

~~$$x_3 = -22$$
 - не подходит~~

~~$$x_4 = -1$$~~

~~$$x_3 = -22$$~~

~~$$x_4 = -1$$
 - не подходит т.к. $x+4 \geq 0$~~

$$x+4 = \sqrt{-15x-6} \Rightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ -15x-6 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = -22 \end{cases}$$

*из Т. Буаега
оба подходят.*

Ответ! $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -22$ - подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos 5x = 3 \cos 2x + p.$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p.$$

$$\cos x = t:$$

$$t(4t^2 - 3) + 6t - 3(2t^2 - 1) = p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3 = 0.$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3.$$

$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$, приравняем к 0, чтобы найти точки локально максимума и минимума.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12t + 3 = 0.$$

$$D = 144 - 144 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm 0}{2 \cdot 12} = \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 12 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f''(t) = 24 \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

производная всюду ~~меньше~~ неотрицательна \Rightarrow

\Rightarrow функция ~~возрастает~~ не убывает, если

дл. $-p+3=0$, то. функция $g(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t$

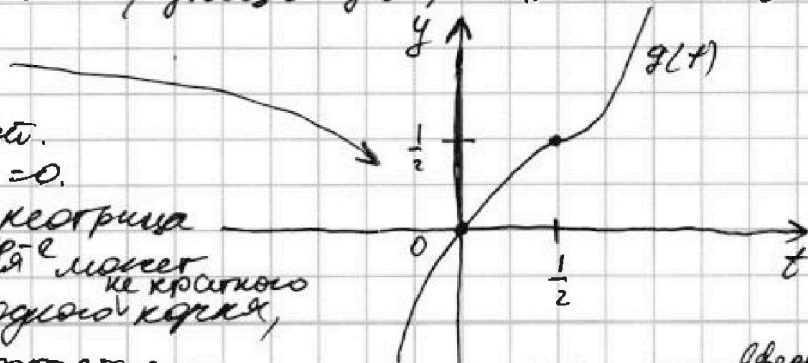
Имеет дв. вид

примерно такой.

$$\text{т.к. } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, g(0) = 0.$$

т.к. производная неотрицательна, то функция ~~не~~ может иметь не более одного ~~кратного~~ корня,

\Leftrightarrow т.е. $-p+3$ просто сдвигает график $g(t)$ на $-p+3$ или вниз.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда найдём возможные значения для $-p+3$.

$t = \cos x \Rightarrow$ чтобы были корни $-1 \leq t_{\text{корень}} \leq 1$

Если корень $t = 1$:

$$f^*(t) = 0, \quad 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$4 - 6 + 3 + 3 - p = 0 \Rightarrow p = 4$$

Если корень $t = -1$:

$$-4 - 6 - 3 + 3 - p = 0 \Rightarrow p = -10.$$

Получаем, что для p подходят любые значения от -10 до 4 . $p \in [-10, 4]$.

Решим это уравнение.

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0.$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + \frac{1}{2} = p - \frac{5}{2}.$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{5}{2} \Rightarrow t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$4\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) = p - \frac{7}{2}.$$

$$4\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{2p-7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$t = \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-7}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

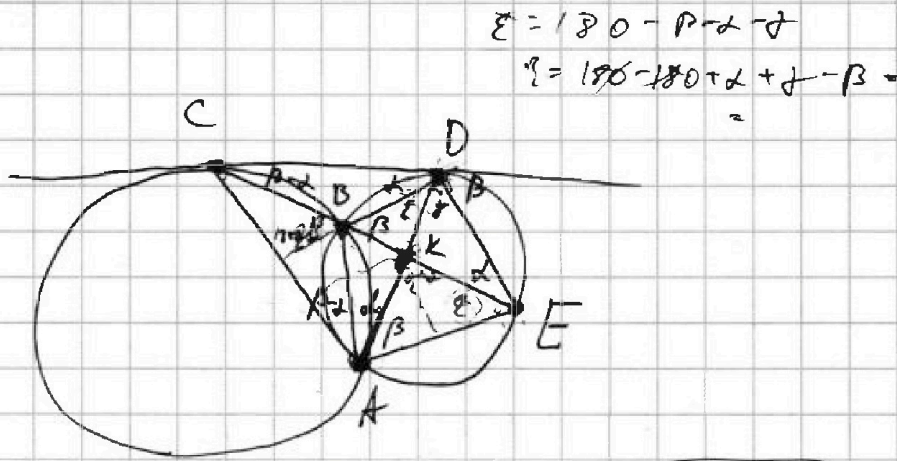


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AK - диаметр в $\triangle ACE \Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE}$

$CD^2 = CB \cdot CE$

$\triangle CDB \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{BD}{AE} = \frac{BE}{KE} \cdot \frac{BK}{AK}$

$\frac{AK}{KE} = \frac{BK}{DK}$

$\frac{DK}{KE} = \frac{BK \cdot BD}{AE \cdot AE}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Общее число способов посчитаем через формулу включения-исключения.

$$A = S_0 + S_1 + S_2 - S_0 \cap S_1 - S_0 \cap S_2 - S_1 \cap S_2 + (S_0 \cap S_1 \cap S_2)$$

где S_0, S_1, S_2 - число способов выбрать в клетках, где есть центральная и две соседние.

$S_0 = C_{150-100}^4$, т.к. можно разбить \square диагональю, при центральной симметрии каждая клетка из одной части окажется в другой части (так, это перейдут в самих себя нет).

$$S_1 = C_{150-100}^4 \rightarrow \text{т.к.}$$

$$S_2 = C_{150-100}^4 \rightarrow \text{т.к. при каждой симметрии}$$

средней линии
отк-но центра, ~~т.к.~~ клетка из одной половинки перейдет в другую \Rightarrow можно выбрать 4 клетки в одной из половинок \Rightarrow остальные 4 находятся симметричным способом.

~~$$S_0 \cap S_1 = C_{150-50}^2$$~~

$$S_1 \cap S_2 = C_{150-50}^2$$

т.к. поставив 1 клетку сверху-т.к. т.к. каждая будет отмечена в одной из четвертей прямоугольника.



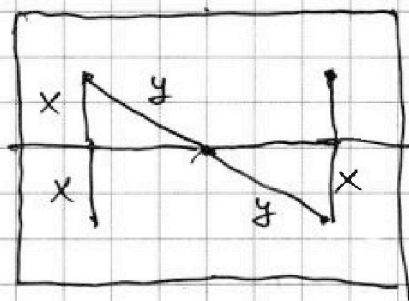
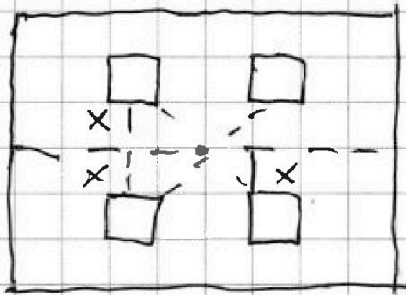
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~$S_1 \cap S_2$~~ симметрия
 отн-но одной из средних линий и отн-но центр-
 то не самое, что и симметрия отн-но обеим
 средних линий. \leftarrow Это видно из равенства



У них равны гипотенузы \wedge касаясь \Rightarrow равны и
 сами Δ .

~~$S_0 \cap S_1$~~

$$S_1 \cap S_2 = C_{150 \cdot 50}^2$$

$$S_0 \cap S_1 = C_{150 \cdot 50}^2$$

$$S_0 \cap S_2 = C_{150 \cdot 50}^2$$

В силу выше сказанного, ясно, что

$$S_1 \cap S_2 \cap S_0 = C_{150 \cdot 50}^2. \text{ Т.к. ясно, что}$$

одна из симметрий к нему не обладает.

$$A = 3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 3 \cdot C_{150 \cdot 50}^2 + C_{150 \cdot 50}^2 = 3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 50}^2$$

Ответ: $3 \cdot C_{150 \cdot 100}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 50}^2$

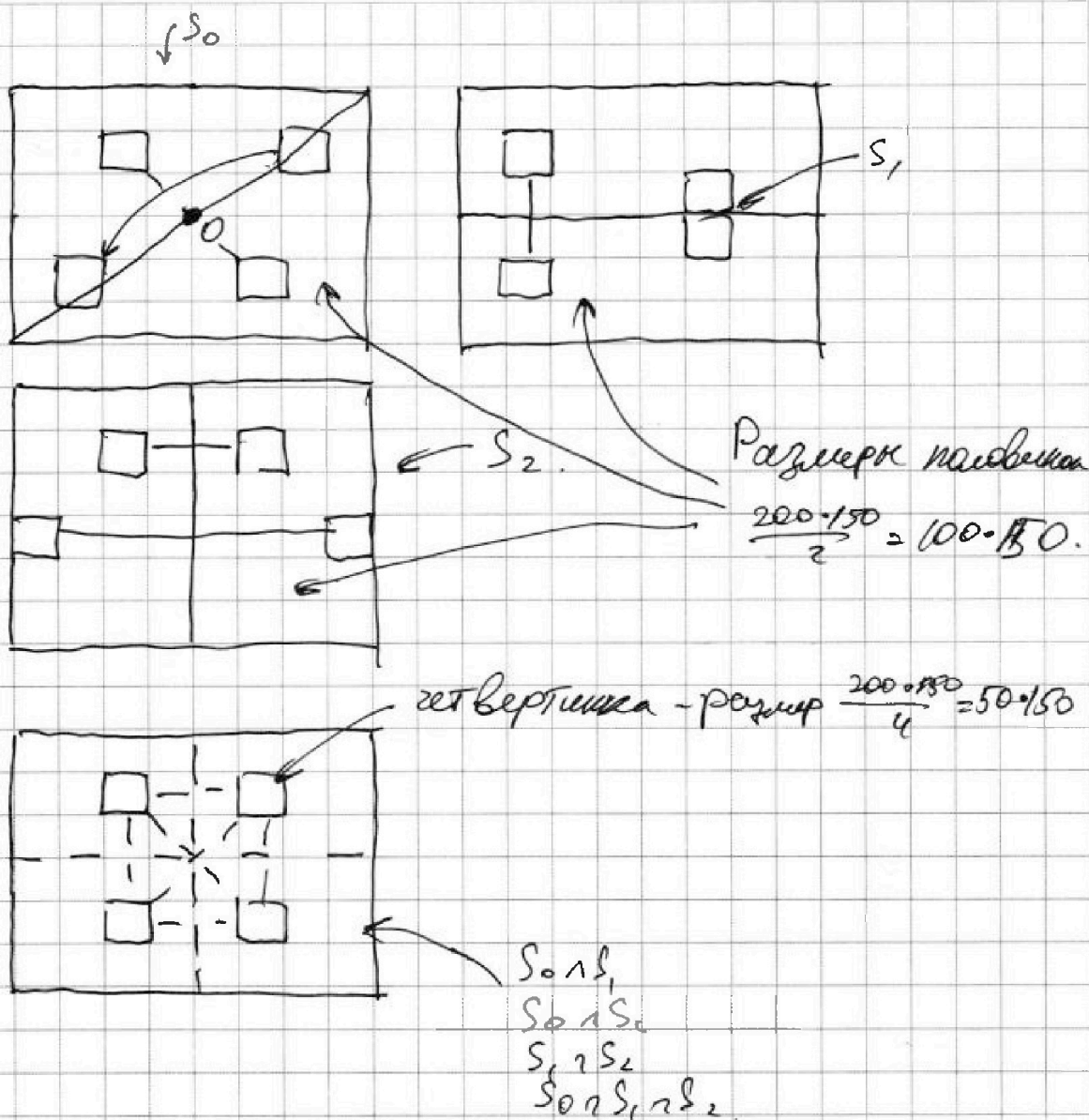


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b + 8, \quad b_1 = -29 \Rightarrow a_1 = -21, \quad a > b$$

$$b_2 = 28 \Rightarrow a_2 = 28 + 8 = 36, \quad a > b.$$

$$c_1 = b_1 - 1 = -30$$

$$c_2 = b_2 - 1 = 27$$

2). $a - c = -1$
 $b - c = -p^2 \Rightarrow a - b = p^2 - 1$ — аналитично получаем,
 что если $a - b \neq 3$, то $p = 3$.

$$a - c = -1$$

$$b - c = -9 \Rightarrow c = b + 9 \Rightarrow a = b + 8.$$

$$a + b^2 = 820 \Rightarrow b^2 + b + 8/2 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249$$

$$\sqrt{3249} = 57$$

$$b_3, b_4 = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow b_3 = -29$$

$$b_4 = 28.$$

$$b_3 = -29 \Rightarrow a_3 = b_3 + 8 = -21$$

$$b_4 = 28 \Rightarrow a_4 = b_4 + 8 = 36.$$

$$c_3 = b_3 + 9 = -21 + 9 = -13$$

$$c_4 = b_4 + 9 = 28 + 9 = 37.$$

В итоге получили тройки (a, b, c)

~~$$(-29, -21, -30); (-29, -21, -13); (28, 36, 27); (28, 36, 37).$$~~

$$(-21, -29, -30); (-21, -29, -13); (36, 28, 27); (36, 28, 37).$$

Везде $a > b$, $a - b \neq 3$, $a + b^2 = 820$, $(a - c)(b - c) = p^2$.

Ответ: $(-21, -29, -30); (-21, -29, -13); (36, 28, 27);$
 $(36, 28, 37).$

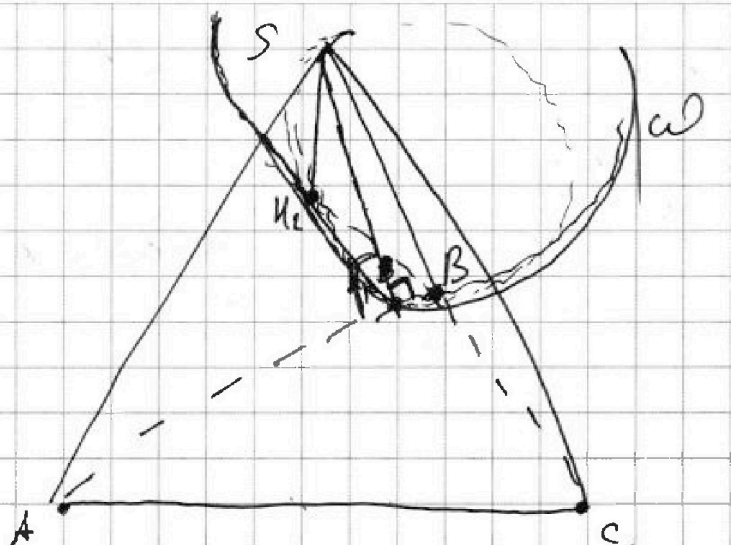


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

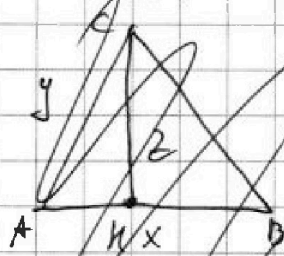
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть ABC выберем так, что $S_{ABK_1} = S_{BCK_2} = 5$, $S_{AK_1C} = 4$
 y ст. в ABK_1 и BCK_2 равны основания, есть общая сторона, а также равны высоты, т.к. из точки S , т.к. равны площади. $SK_1 = SK_2 = \frac{y \cdot z}{z} = y. \Rightarrow$

\Rightarrow ~~равны и центры~~ S равноудалена от ~~этой стороны~~ ~~высоты~~

Далее



$$AK = \sqrt{y^2 - z^2} \Rightarrow KB = z \Rightarrow AB = x - \sqrt{y^2 - z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = KB^2 + CK^2$$

Получим, что стороны стороны BC вычисляются единств. величин образом. (т.к. y - одинаков, если AB было не общим, то величина BC не была



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сравноудалена от K_1 и $K_2 \Rightarrow K_1$ и K_2 лежат на
окр-ти, ~~где~~ радиусом SK_1 с центром S .
Т.к. SK_1 высота, то AB - касательная
к ~~этой~~ этой окр-ти (будем касаться окруж

ω)

SA_2



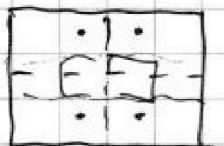
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

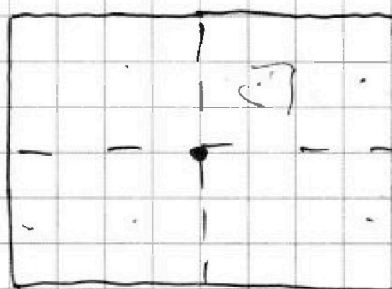
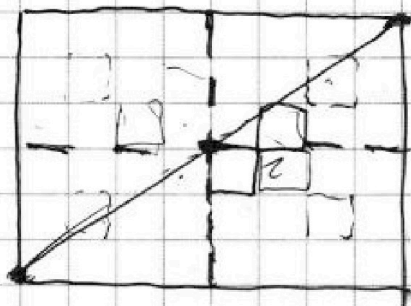
$(S_1 \cap S_2)$



Р. $\frac{150 \cdot 200 - 200}{4} = 50 \cdot 149$

$C_{50 \cdot 149}^2 + C_{50 \cdot 149}^1 = C_{19200}^2 + C_{200}^4$

$(S_1 \cap S_2 \cap S_0)$



$S_0 = C_{150 \cdot 100}^4$

$S_0 \cap S_1 = C_{50 \cdot 130}^2$

$S_1 = C_{100 \cdot 150}^4$

$S_0 \cap S_2 = C_{50 \cdot 150}^2$

$S_2 = C_{100 \cdot 150}^4$

$S_2 \cap S_1 = C_{50 \cdot 150}^2$

$S_0 \cap S_1 \cap S_2 = C_{50 \cdot 150}^2$

$\Sigma = S_0 + S_1 + S_2 - S_0 \cap S_1 - S_0 \cap S_2 - S_1 \cap S_2 + S_0 \cap S_1 \cap S_2$

$3 \cdot C_{100 \cdot 150}^4 -$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем условие задачи:

$$a > b.$$

$$a - b \not\equiv 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a + b^2 = 820$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \text{т.к. } p\text{-простое} > 1:$$

$$\begin{cases} a-c=p, b-c=p \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c. \\ a-c=-p, b-c=-p \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ a-c=1, b-c=p^2 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ (1) \quad a-c=p^2, b-c=1 \\ (2) \quad a-c=-1, b-c=-p^2 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \\ a-c=-p^2, b-c=-1 \Rightarrow \text{кет, т.к. } a > b \Rightarrow a-c > b-c \end{cases}$$

Остались 2 случая

$$1) a-c=p^2, b-c=1 \Rightarrow a-b=p^2-1=(p-1)(p+1)$$

Пусть $p \not\equiv 3 \Rightarrow$ Если $p \equiv 1$, то $p-1 \equiv 3 \Rightarrow a-b \equiv 3$
 Если $p \equiv 2$, то $p+1 \equiv 3 \Rightarrow a-b \equiv 3$

Если $p \equiv 3$, то $p^2-1 \not\equiv 3$.

Противоречие с
условием

Получается, что $p \equiv 3 \Rightarrow p=3$, т.к. p -простое.

$$a-c=9 \Rightarrow a=b+9.$$

$$b-c=1 \Rightarrow c=b-1$$

$$a+b^2=820 \Rightarrow b^2+b+9=820 \Rightarrow b^2+b-812=0.$$

$$D=1+4 \cdot 812=3249=57^2 \Rightarrow b_{1,2}=\frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1=-29, b_2=28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t = p - 3.$$

$$4\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) = p -$$

$$4\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}\right) \cdot 4 = 4t^3 - 6t^2 + 3t - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$

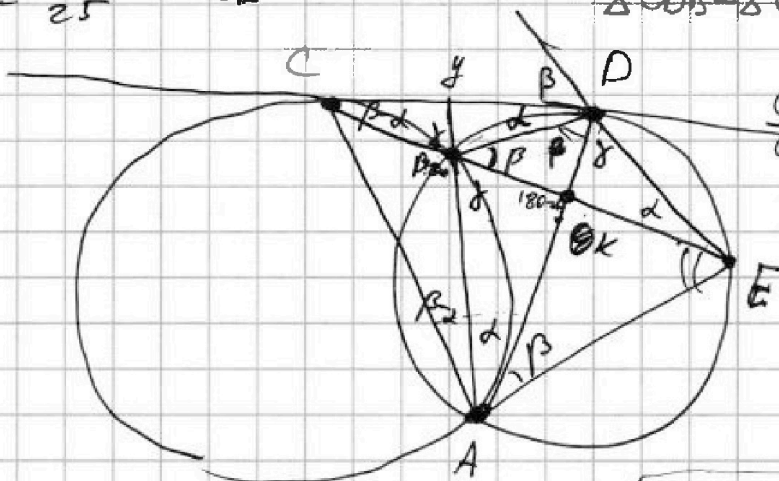
$$\frac{ED}{CA} = ?$$

$$CD^2 = CB \cdot CE,$$

$$\triangle CDB \sim \triangle CDE.$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CD}{CB}$$

DE = a
CD = b
CE = c.
~~DE~~



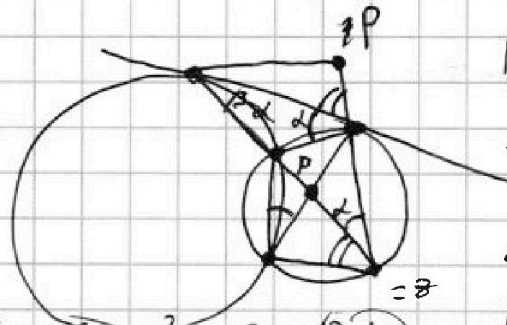
$$\triangle BDK \sim \triangle KAE \Rightarrow \frac{DK}{KA} = \frac{BK}{KE}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE.$$

$$BK \cdot KE = DK \cdot KA.$$

$$CD^2 = CB \cdot CE = (9x - BK) \cdot 36x.$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{BC}$$



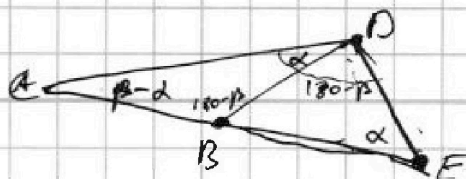
~~DK~~

$$\cancel{2(9x - BK) = DK \cdot KA}$$

$$\triangle CBD \sim \triangle CDE.$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{BD}{CD}$$

$$y^2 = 3 \cdot 6x \cdot (18x)^2 - 36x \cdot (BK)$$



$$\frac{DE}{BD} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = \cancel{\cos x} + \cancel{\cos x} \cos(x+x) - \cos x \cos x - \sin x \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4\sin^2 x) \cdot \boxed{2\cos x (2\cos x - 1)}$$

$$\cos x (7 - 4\sin^2 x) = 3\cos 2x + p$$

$$\cos x (7 - 4\sin^2 x) = 3 - 2\sin^2 x + p$$

$$p - 1 = \cos x (7 - 4\sin^2 x) - 2\cos^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x - 1$$

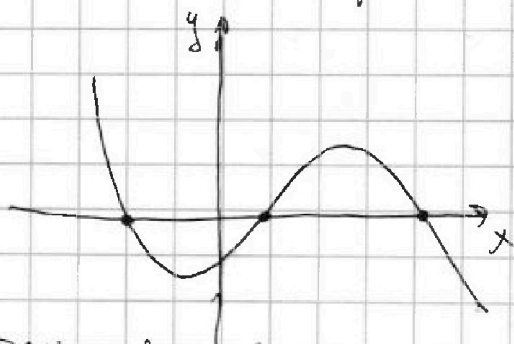
$$= \cos x (7 - 4\sin^2 x - 2\cos x) = \cos x (7 - 4(1 - \cos^2 x) - 2\cos x)$$

$$= \cos x (3 - 4\cos^2 x - 2\cos x), \cos x = t$$

$$p - 1 = t(3 - 4t^2 - 2t)$$

$$-4t^3 - 2t^2 + 3t - p + 1 = 0$$

При каких p есть решение?



$$f(t) = -4t^3 - 2t^2 + 3t - p + 1$$

$$f'(t) = -12t^2 - 4t + 3 \quad D = 16 + 12 \cdot 3 \cdot 4 = 16 + 144 = 160$$

$$t_1, t_2 = \frac{4 \pm \sqrt{160}}{-24}$$



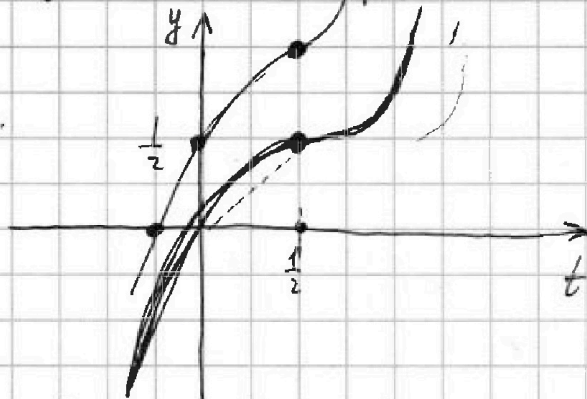
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t - p + 3 = 0. \text{ если кет } -p+3, \text{ то.}$$



$$\frac{4 \cdot 1}{8} - \frac{6 \cdot 1}{4} + \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

корни ур-я ≤ -1 , а корни то будет один.

кра и касан.

$$-4 - 6 - 3 - p + 3 = 0. \quad 3 - p = \frac{1}{2}.$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + \frac{1}{2} = p - \frac{5}{2}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 = p - \frac{5}{2}.$$

$$t - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}}.$$

$p <$

$$t = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$\cos x = \sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$x = \arccos \left(\sqrt[3]{p - \frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^3 b = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$q^2 b = x+4$$

$$q^4 b = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^8 \pm (x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2 \text{ со знаком „+“ т.к. } q^8 \geq 0$$

$$q^8 = (x-3)^2$$

$$q^4 b = q^3 b \cdot q^8 = (x-3)^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} =$$

$$= \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^2 b = \frac{q^4 b}{q^2} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \text{ т.к. } q^2 b \geq 0$$

$$q^4 b^2 = \sqrt{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^2}} = \pm \frac{15x+6}{x-3}$$

$$q^2 b = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{(x-3)^2} \Rightarrow q = \frac{1}{x-3}$$

$$a > b, a - b \neq 3$$

$$q = \pm \sqrt[8]{(x-3)^2} =$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow a \text{ т.к. } a > b$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \text{ - нет, т.к. } a > b$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=-p \end{cases}$$

$$\pm b^8 \sqrt{(x-3)^6} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$\pm b =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = p - \text{кет.}, \text{ т.к. } a > c \\ a-c = p, b-c = -p - \text{кет.}, \text{ т.к. } -p^2 \\ a-c = 1, b-c = p^2 - \text{кет.}, \text{ т.к. } a > c. \\ a-c = -p, b-c = -p - \text{кет. т.к. } a > c \\ a-c = p^2, b-c = 1 \\ a-c = -p^2, b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$1) a-c = p^2, b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

$$\text{Пучок } p \equiv 1 \Rightarrow p-1: 3, p \equiv 2 \Rightarrow p+1: 3 \Rightarrow p: 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow a-c=9, b-c=1 \Rightarrow \cancel{b=c} + c = b-1$$

$$a-b+1=9 \Rightarrow \boxed{a-b=8}$$

$$a+b = 820 \Rightarrow \cancel{a} b^2 + b + 8 = 820 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0.$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249 = \boxed{57^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 57 \\ 57 \\ + 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow \boxed{b = -29} \\ \boxed{b = 28}$$

$$1) a = -29 + 8 = -21 \\ a = \cancel{-29} + 8 = -21$$

$$a-c=1 \\ a=c-1 \Rightarrow b+9-1 = b+8$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p.$$

$$\cos 2x = 1 - \cancel{2 \sin^2 x} \\ \cos^2 x$$

$$p \leq 10$$

$$p \geq -10$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \cos x$$

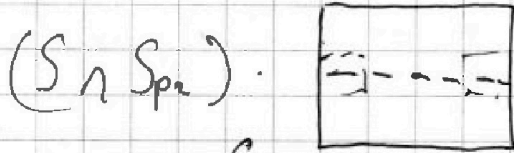


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

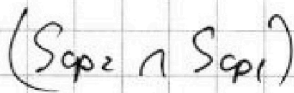
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

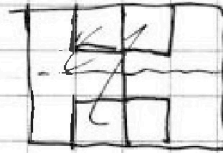
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



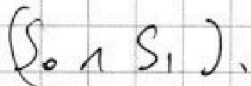
$$C_{\frac{150 \cdot 200 - 200}{2}}^1 = C_{100 \cdot 149}^1 + C_{100 \cdot 149}^4 + C_{100 \cdot 149}^2 \cdot C_{200}^2 + C_{200}^4$$



Центр 4 раз.
Центр 2 раза



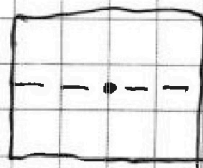
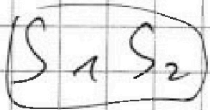
полюс
4 раза - всегда
2 раза - центр на ср. линии той, что 2-3. $\frac{1}{2}$



$$C_{100 \cdot 150}^2 + C_{100 \cdot 150}^1$$

$$C_{100 \cdot 150 - 150}^2 + C_{150}^2 \cdot C_{100 \cdot 150 - 150}^1 + C_{150}^4$$

~~200 \cdot 150 - 200~~



$$C_{100 \cdot 149}^2 + C_{200}^2 \cdot C_{100 \cdot 149}^1 + C_{200}^4$$



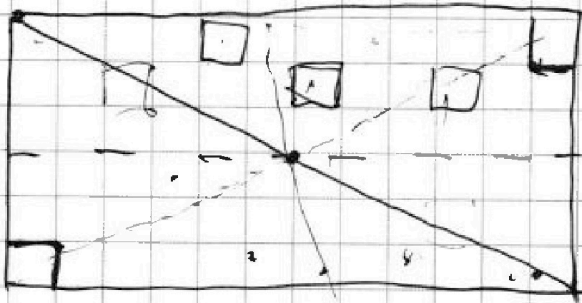
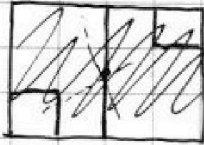
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

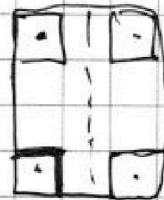
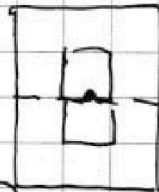
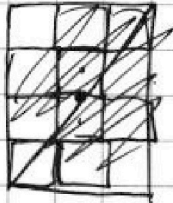
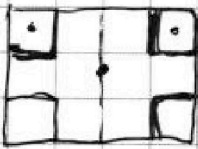
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 клетки → 8 клеток,
если нет симметрии



$$C_{150 \cdot 100}^4 - \frac{C_{150 \cdot 100}^1}{2} = C_{150 \cdot 100}^4 - \frac{1}{2} C_{150 \cdot 100}^1$$

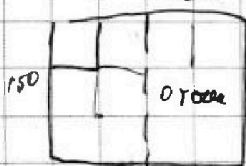


$$C_{150 \cdot 100}^4 = S_{cp2}$$

$$+ C_{150 \cdot 100}^4 -$$

$$C_{150 \cdot 100 \cdot 100}^4 = C_{200 \cdot 150 \cdot 200}^4 = C_{200}^2 \cdot C_{150 \cdot 199}^2 + C_{200}^3 \cdot C_{150 \cdot 199}^1 + C_{200}^4 \cdot C_{150 \cdot 199}^0$$

$$S_0 + S_{cp1} + S_{cp2} -$$



$$(S_0 + S_{cp1}) = C_{150 \cdot 150}^2 - C_{150 \cdot 100 \cdot 150}^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$z^2 \leq 225, \Rightarrow |z| \leq 15.$$

$$y - 20 < 0 \Rightarrow y - 35 < 0.$$

$$20 - y + 70 - 2y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$90 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$$

~~$$8100 - 540y + 9y^2 = 225 - z^2$$~~

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} \leq \sqrt{2x+3z+2}$$

$$\sqrt{2x+3z+2} + 6 \geq 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

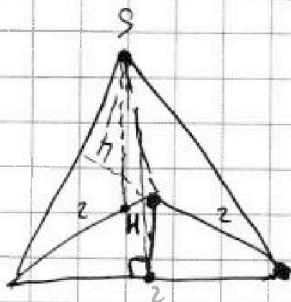
$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} - \sqrt{4y-8x-4x^2+4z} = -6$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \leq \sqrt{a-b} - \sqrt{c} \leq \sqrt{a-b-c}$$

~~$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} - \sqrt{4y-8x-4x^2+4z} \geq -6$$~~

~~$$\sqrt{10x+2-4y+4x^2-z} \geq 6$$~~

~~$$\sqrt{10x+2-4y+4x^2-z} \geq 36$$~~



$$SH_1 = 4$$

$$SH_2 = \frac{5}{2}$$

$$SH_3 = \frac{5}{2}$$

4 высоты в равной высоте, одна
внутри и одна - высота
сторона

\Rightarrow они равны.

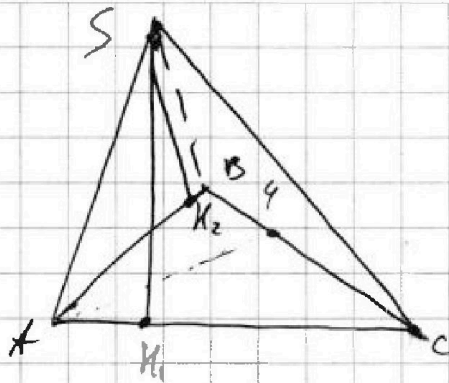


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow \\ \Rightarrow SB = SC \Rightarrow$$

ΔSBC - равнобедр \Rightarrow
 \Rightarrow высота \perp медиана

