



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. м/у 3 и 4 значения - 2 разности прогрессии, а м/у 5 и 9 - 4 разности прогрессии,

$$\text{то } 4((x^2+2x)^2 - 3x - 3) = 2(3x^2 - (x^2+2x)^2) \quad | :2$$

$$2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3) = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 \text{ - корень, т.к. } (-1)^4 + 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 2 = 0$$

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0 \text{ - верно}$$

=> по следствию из т. Безу:

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ - корень } x^3 + 3x^2 - 2 = 0, \text{ т.к. } -1 + 3 - 2 = 0$$

=> по следствию из т. Безу:

$$(x^3 + 3x^2 - 2) = (x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Данное ур-е необход и дост. для такой прогрессии => $x = -1; x = -1 + \sqrt{3}; x = -1 - \sqrt{3}$ Ответ: $-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}; -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3; & \max(4y+8x) = ? \\ |3x-y| \leq 1. \end{cases}$$

• При $(x, y) = (\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$:

$$|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{3 \cdot 5}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = 3 \leq 3 - \text{Верно}$$

$$|3x-y| = \left| \frac{3 \cdot 3}{4} - \frac{5}{4} \right| = |1| = 1 \leq 1 - \text{Верно}$$

$$4y+8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

• Рассмотрим случаи:

1сл $\begin{cases} x \geq 3y; \\ 3x \geq y. \end{cases} \Rightarrow$ модуль $|3x-y|$ и $|x-3y|$ раскрываются без изменений:

$$\begin{cases} x-3y \leq 3. (1) & x \geq 3y \geq 3(3x-1) \\ 3x-y \leq 1. (2) & x \geq 9x-3 \end{cases}$$

$$8x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{8} \Rightarrow \text{из (1): } 3y \leq x-3$$

$$y \leq 3x \leq \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow 4y+8x \leq 4 \cdot \frac{9}{8} + 8 \cdot \frac{3}{8} = \Rightarrow 4y+8x \leq 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 8 \cdot \frac{3}{8} = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} < 11.$$

2сл $\begin{cases} x \geq 3y; \\ 3x \leq y. \end{cases} \Rightarrow x \geq 3y \geq 9x$

$8x \leq 0$ $x \leq 0$, тогда $0 \geq x \geq 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq 0$, но тогда $4y+8x \leq 0$ и значит $4y+8x < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2 \text{ сл}) \quad B = 13p^2 \quad \text{и} \quad A = 75q^2$$

$$\cancel{m+n(m+n-3) = 13p^2}$$

$$\cancel{1.2 \equiv 2, \text{ т.к. } 3 \nmid 13}$$

$$(m+n)(m+n-9) = 75q^2$$

1.2 \equiv 2, т.к. $(m+n)$ и $(m+n-9)$ — целые чис-

ла разной четности

$$\Rightarrow 75q^2 \equiv 2 \Rightarrow q \equiv 2 \Rightarrow q = 2, \text{ т.к. } q \text{ — чп.}$$

Пусть $m+n = k$, тогда

$$k(k-9) = 300$$

$$k^2 - 9k - 300 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 300 = 1281 \neq s^2, \text{ где } s \in \mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$, но $k \in \mathbb{N}$ — противоречие

\Rightarrow решений нет

Ответ: $(10; 3); (3; 10)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

(1с) $A = 13p^2$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

Л.з. $\equiv 2$, т.к. г.в.а. у целых числа отл. не $9 \Rightarrow 9 \equiv 1$

но из $mn \equiv 2 \Rightarrow 13p^2 \equiv 2 \Rightarrow p \equiv 2 \Rightarrow p = 2$, т.к. p -пр.

$$(m+n)(m+n-9) = 52$$

Пусть $m+n=k$, тогда $k^2 - 9k - 52 = 0$

$D > 0$, но т.к. D не целая

$k_1 = 13$; $k_2 = -4$ - не удовл. цел

$\Rightarrow m+n=13$

$$B = 75q^2$$

$$mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$10mn = 75q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

Л.з. $\equiv 2 \Rightarrow 15q^2 \equiv 2 \Rightarrow q \equiv 2$, т.к. q -пр.

$$2mn = 60$$

$$mn = 30$$

$\Rightarrow \begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \Rightarrow m \wedge n = (10; 3) \text{ и } (3; 10)$ - решения

Из вышесказанного ясно, что оба решения удовлетв. условию.

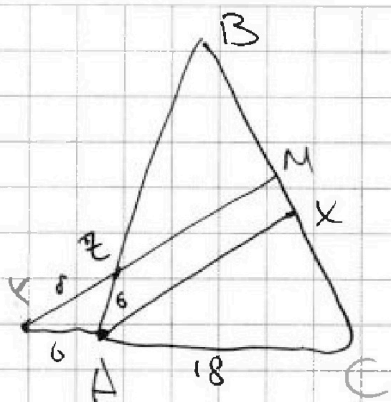
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AC = 18$; $AZ = 6$; $YZ = 8$.

$BC = ?$ Решение

1) По т. Фалеса: $\angle BAX = \angle XAC$, т.к. AX - медиана

$\angle BAX = \angle YZA$, т.к. $YM \parallel AX$

$\angle XAC = \angle MXC$, т.к. $YM \parallel AX$

$\Rightarrow \triangle YZA$ - равнобедрен $\Rightarrow AZ = AY = 6$.

2) По т. Фалеса; т.к. $AX \parallel XM$: $\frac{AC}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{18}{6} = 3$.

Пусть $CX = 3a \Rightarrow XM = a$.

$BM = MC = 4a$, т.к. M - серед. BC

По т. Фалеса, т.к. $ZM \parallel AX$: $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{MX}$
 $\frac{BZ}{6} = \frac{4a}{a} \Rightarrow BZ = 24$. $\Rightarrow AB = 30$.

3) По т. синусов в $\triangle AZY$: $\frac{6}{\sin \angle ZYA} = \frac{8}{\sin \angle ZYA} \Rightarrow 6 \cdot 2 \cdot \cos \angle ZYA = 8$
 $\cos \angle ZYA = \frac{2}{3}$.

По ранее доказанному: $\angle BAC = 2 \angle ZYA$

$\Rightarrow \cos \angle BAC = \cos(2 \angle ZYA) = \cos^2 \angle ZYA - \sin^2 \angle ZYA =$
 $= 2 \cos^2 \angle ZYA - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{900 + 324 + 120} =$$

$$= \sqrt{1344} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: ~~$4\sqrt{84}$~~ . $8\sqrt{21}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \end{cases} \quad \begin{matrix} 043 \\ x+1 \geq 0 \\ 6-y \geq 0 \\ 6+5x-y^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

Пусть $x > y$, тогда $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ и $x^4 + 5x^2 > y^4 + 5y^2$,
zero быть не может. Аналогично, если $y > x$.

$$\Rightarrow x = y.$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 \quad \forall 0 \leq x \leq 6:$$

$$x+1 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 6-x = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$4(x+1)(6-x) - 18\sqrt{(x+1)(6-x)} + 18 = 0$$

Пусть $\sqrt{(x+1)(6-x)} = t$, тогда

$$4t^2 - 18t + 18 = 0 \quad | :2$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$t = \frac{9 \pm 3}{4}. \quad t_1 = \frac{9+3}{4} = 3, \quad t_2 = \frac{9-3}{4} = 1,5.$$

сл $t = 3 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$

$$(x+1)(6-x) = 9$$

$$6+5x-x^2 = 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{— оба значения удовл. ОДЗ}$$

2011 $t = \frac{3}{2}$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2}$$

$$6 + 5x - x^2 = \frac{9}{4} \quad | \cdot 4$$

$$24 + 20x - 4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$D = 20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 400 + 240 = 640 > 0 \Rightarrow$$

2 корня

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{640}}{8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{10}$$

$$\frac{5}{2} - \sqrt{10} < 0 \Rightarrow \text{не удовл. ОДЗ}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right); \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right); \left(\frac{5}{2+\sqrt{10}}; \frac{5}{2+\sqrt{10}}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разобьем все способы раскраски на 2 случая: 2 белые симм. отн. центр. узла и остальные.

(1сл) 2 белые симм. отн. центр. узла, тогда способов: $\frac{81-1}{2} = 40$, т.к. всего узлов - 81, но ещё делим на 2, т.к. 40 способов разбиваются на 20 пар, где способы в паре отл. поворотом на 90° .
=> 20 способов.

(2сл) 2 белые клетки не симм. отн. центр. узла, способов влбрато: $(C_{81}^2 - 40)$, но ещё делим на 4, т.к. $(C_{81}^2 - 40)$ способов разб. на четверки, в каждой четверке и повороте, одного способа (т.к. клетки не симм. отн. центре, то все способы в четверках различны) => способов - $\frac{C_{81}^2 - 40}{4} = \frac{81 \cdot 80}{8} - \frac{40}{4} = 810 - 10 = 800$.

Всего способов: $800 + 20 = 820$ Ответ: 820.

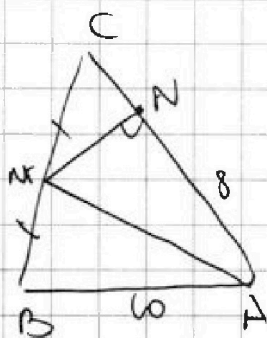
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle MNA - \text{пр}$, т.к. $AM - \text{диаметр } \Omega$.

Пусть $BM = MC = a$, тогда

$$CN = CA - AN = 2a - 8.$$

$$\bullet MN = \sqrt{MC^2 - CN^2} = \sqrt{a^2 - 4a^2 + 32a - 64} =$$

$$= \sqrt{-3a^2 + 32a - 64} \text{ по т. Пифагора в } \triangle CMN.$$

$$\bullet AM = \sqrt{\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{200 + 4a^2}{4}} = \sqrt{a^2 + 50}$$

по формуле медианы

• По т. Пифагора в $\triangle AMN$:

$$AN^2 + MN^2 = AM^2$$

$$64 + 3a^2 + 32a - 64 = a^2 + 50$$

$$4a^2 - 32a + 50 = 0 \quad |:2$$

$$2a^2 - 16a + 25 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25 = 256 - 200 = 56$$

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{56}}{4} = 4 \pm \sqrt{14}$$

Но если $a = 4 - \sqrt{14}$, то $BC + CA < AB$

А значит $a = 4 + \sqrt{14}$.

$$2(4 - \sqrt{14}) < 6$$

$$\Rightarrow BC = CA = 8 + 2\sqrt{14}$$

$6 < 4\sqrt{14}$ - верно, т.к.

$\sqrt{14} > 3 \Rightarrow a = 4 - \sqrt{14}$ не год.

Ответ: $BC = CA = 8 + 2\sqrt{14}$.

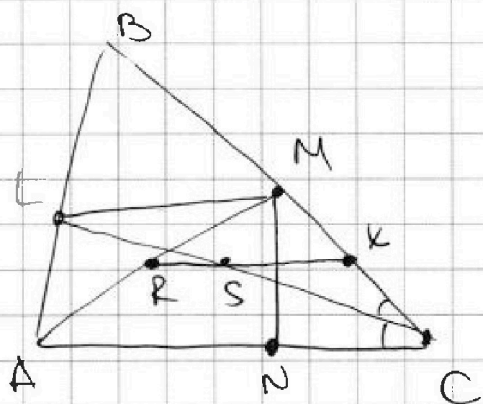
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AB=10; AN=8, AC=? BC=?$

Решение

1) Пусть R -сер $AM \Rightarrow R$ -центр Ω , пусть S -сер. $CL \Rightarrow S$ -центр ω .

$PQ \perp RS$, т.к. PQ -рад. ось ω и $SL \Rightarrow$ рад. ось перп. линии центров.

Высота из B в $\triangle ABC \perp AC$ и $\parallel PQ$
 $\Rightarrow PQ \perp AC \Rightarrow RS \parallel AC$.

2) Пусть $RS \cap BC = X$ ($RS \parallel AC \Rightarrow RS \parallel BC$)

т.к. $RS \parallel AC$, то X -сер MC .

RX -ср. линия $\triangle AMC \Rightarrow \angle MXS = \angle MCA =$
 $= 2 \angle XCS$.

$\Rightarrow \angle XSC = \angle MXS - \angle XRS = \angle XCS$

т.к. SX -ср. линия $\triangle MNC$, то $\angle XSC = \angle MLC =$
 $= \angle MCL \Rightarrow LM = MC = BM$, а значит $LC \perp AB$

$\Rightarrow \triangle ABC$ -равнобедрн с $BC = AC$.

3) Перерисуем картинку:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3сл $\begin{cases} x \leq 3y; \\ 3x \leq y. \end{cases}$ Оба модуля раскрываются с "-":

$$\begin{cases} 3y - x \leq 3; & (1) \\ y - 3x \leq 1. & (2) \end{cases}$$

11): ~~$y \leq 3x + 1 \leq 9y + 1$~~

р. $x \geq 3y - 3 \geq 3 \cdot 3x - 3 = 9x - 3$

$$8x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{8} \Rightarrow 3y \leq x + 3$$

$$y \leq \frac{x}{3} + 1 = \frac{9}{8}$$

$$4y + 8x \leq 4 \cdot \frac{9}{8} + 8 \cdot \frac{3}{8} = 7,5 < 11$$

4сл $\begin{cases} x \leq 3y; \\ 3x \geq y. \end{cases}$ $|x - 3y|$ раскрывается с "-"
 $|3x - y|$ раскрывается без изм.

$$\begin{cases} 3y - x \leq 3 & (1) \\ 3x - y \leq 1 & (2) \end{cases}$$

$$y \leq \frac{x+3}{3}$$

(1): ~~$3y - x \geq 3y$~~

4ху

(2): ~~$y \geq 3x + 1$~~

$$\frac{x+3}{3} \geq 3x + 1$$

$$1+3 \geq 9x+3$$

$$8x \leq 6$$

$$x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow y \leq \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

~~$$4y + 8x \leq 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 11$$~~

~~$$\Rightarrow 4y + 8x \leq 11 \text{ и при } (x, y) =$$~~

~~$$= \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) : 4y + 8x = 11$$~~

Ответ = 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 & \max(4y+8x)? \\ |3x-y| \leq 1 & 3x-y \leq 1, \quad 3x \geq y \end{cases}$$

1сл $x \geq 3y \Rightarrow x-3y \leq 3 \Rightarrow x \leq 3y+3$
 $3x \geq y \Rightarrow y \geq 3x-1$
 $y \geq \frac{x-3}{3}$
 $y \geq 3x+1$

2сл $x \leq 3y \Rightarrow 3x \geq y \Rightarrow 3x \geq 3y-1 \Rightarrow 3x+1 \geq 3y$
 $3x \leq y$
 $4y+8x \leq 28y+24$

$x \geq 3y \Rightarrow 8x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$
 $x \geq 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \Rightarrow 4y+8x = \frac{4x}{3} + 8x = \frac{28x}{3} \leq 24 \Rightarrow x \leq \frac{24 \cdot 3}{28} = \frac{18}{7}$
 $y = \frac{x}{3} \leq \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
 $8x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{8}$
 $4 \cdot \frac{3}{8} + 3 = \frac{9}{2} + 3 = 7,5$
 Равенство при $x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}$

3сл $x \leq 3y \Rightarrow 3y \leq 3+x \Rightarrow y \leq 1 + \frac{x}{3}$
 $3x \geq y \Rightarrow y \geq 3x-1$
 $3x-1 \leq 1 + \frac{x}{3} \Rightarrow 3x-3 \leq 1 + \frac{x}{3} \Rightarrow 9x-9 \leq 3+x \Rightarrow 8x \leq 12 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$
 $y \geq 3x-1 \Rightarrow y \geq \frac{9}{2}-1 = \frac{7}{2}$
 $4y+8x \leq 14+12 = 26$
 $4 \cdot \frac{7}{2} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 14 + 12 = 26$
 $5+6=11$

4сл $x \leq 3y \Rightarrow 3y \leq x+3 \Rightarrow y \leq \frac{x+3}{3}$
 $3x \geq y \Rightarrow y \geq 3x-1$
 $3x-1 \leq \frac{x+3}{3} \Rightarrow 9x-3 \leq x+3 \Rightarrow 8x \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{3}{4}$
 $y \geq 3x-1 \Rightarrow y \geq \frac{9}{4}-1 = \frac{5}{4}$
 $4y+8x \leq 5+6 = 11$
 $18+12 = 30!!!$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + 2d = 3x + 3$$

$$a + 2d = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a + 6d = 3x^2$$

$$\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \cdot 6 + 3\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a = 3\sqrt{3} \quad \checkmark$$

$$a + 2d = 4$$

$$a + 6d = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\frac{((\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1))^2}{3 - 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} - 2}$$

$$1 \rightarrow 2 \quad 3x + 3 + 2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad (*)$$

$$7 \rightarrow 3 \quad 3x + 3 + 7d = 3x^2$$

$$d = \frac{3x^2 - 3x - 3}{7} \Rightarrow (*)$$

$$3x + 3 + \frac{6x^2 - 6x - 6}{7} = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$2(x+2) + 6x^2 - 6x - 6 = 7x^4 + 28x^3 + 28x^2$$

$$7x^4 + 28x^3 + 22x^2 - 15x - 15 = 0 \quad \text{al'5'}$$

$$\frac{28 \cdot 4 + 22 \cdot 2 - 15 \cdot 2 - 27}{-28 \cdot 4 + 22 \cdot 4} = \frac{0}{-24} = 0$$

$$7((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3) = 2(3x^2 - 3x - 3)$$

$$7x^4 + 28x^3 + 22x^2 - 15x - 15 = 0$$

$$6x^4 + 24x^3 + 18x^2 - 6x^2 - 6 = 0$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x^2 - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 : (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$



$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 (m, n) - ?

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13p$$

$$m^2n + mn^2 - 3mn = 75q^2$$

$$m(m+n-3) = 75q^2$$

$$mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$(m+n-\frac{3}{2})^2 + \frac{81}{4} = 75q^2 \cdot 4$$

$$(2m+2n-9)^2 + 81 = 300q^2$$

$$(2m+2n-9)^2 + 81 = 4 \cdot 13p^2$$

$$m^2 + n^2 + 2mn - 9m - 9n = A$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases}$$

$$4A = 4m^2 + 4n^2 + 8mn - 36m - 36n =$$

$$= (2m+2n-9)^2 - 81$$

$$(m+n-\frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4} = 13p^2 \quad | \cdot 4$$

$$(2m+2n-9)^2 - 81 = 52p^2$$

$$(2m+2n-18)(2m+2n)$$

$$(m+n-9)(m+n) = 13p^2$$

Одно = $13p^2$
другое = $75q^2$
где $p, q \in \mathbb{P}$.

$(8-2\sqrt{13}) < 10-4\sqrt{13} < 0$
 $(8+2\sqrt{13}) > 10+4\sqrt{13} > 0$

$$(m+n-\frac{9}{2})^2 + \frac{81}{4} = 13p^2$$

$$13p^2 - \frac{81}{4} = (s+\frac{1}{2})^2 = s^2 + 2s + \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow q=2$

$$m+n=13$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \\ p=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$$

$$p^2 = 22 - \text{нет}$$

$$m+n \Rightarrow m+n-9$$

$$\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases} - \text{нет}$$

$$\begin{cases} mn=13p \\ m+n-9=p \end{cases} - \text{нет}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

