



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p — некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0, \text{ где } x_1 \in \mathbb{R} \text{ и } x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$D > 0 \Rightarrow D = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 \Rightarrow 36 - 4t^2 > 0$$

$$36 > 4t^2 \Rightarrow t^2 < 9$$

При произв. параметре $t > 0 \Rightarrow$ по т. Виета

$$\text{произв. параметр} = \text{свободному члену} \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0$$

$$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow 1 < |t| < 3 \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

При таком t $D > 0$ и $9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$ уел. рад.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19\rho^4 =$$

$$= (a^2 + ab + 3a) + (b^2 + ab + 3b) = a(3 + a + b) + b(3 + a + b)$$

$$= (a + b)(3 + a + b) = 19\rho^4$$

$$\rho \text{ и } 19 - \text{прост. числа.} \Rightarrow a + b = 19^n \cdot \rho^{m'}$$

$$3 + a + b = 19^{n'} \cdot \rho^{m''} \Rightarrow n + m = 1; n' + m' = 4$$

$$\text{Если } n \neq 0 \text{ и } m \neq 0 \Rightarrow (3a + b) - (a + b) \mid \rho \Rightarrow 3 \mid \rho$$

$$\Rightarrow \rho = 3, \text{ но ни } 1 \text{ из свобод. членов } \neq 19 \text{ и } 3 \Rightarrow$$

$$\text{они } \neq 57 \Rightarrow \text{они } \geq 57 \Rightarrow \text{гр. свобод. член } \leq 3^3, \text{ или ост.}$$

$$\text{тогда } 3\rho, \text{ но } 57 - 3 > 22 \Rightarrow n = 0 \text{ или } m = 0$$

$$\Rightarrow \text{какая-то свобод. член } = \rho^4, \text{ а гр. } 19, \text{ так } 19\rho^4 > 113.$$

$$\text{Если } a + b = 19 \Rightarrow a + b + 3 = \rho^4 = 22, \text{ но } \sqrt[4]{22} \notin \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a + b = \rho^4 \Rightarrow a + b + 3 = 19 \Rightarrow a + b = 16, \Rightarrow \rho = 2.$$

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 12 \end{cases} \quad 2a = 28 \Rightarrow a = 14$$

$$b = 16 - a = 2. \quad \Rightarrow \underline{a = 14, b = 2}$$

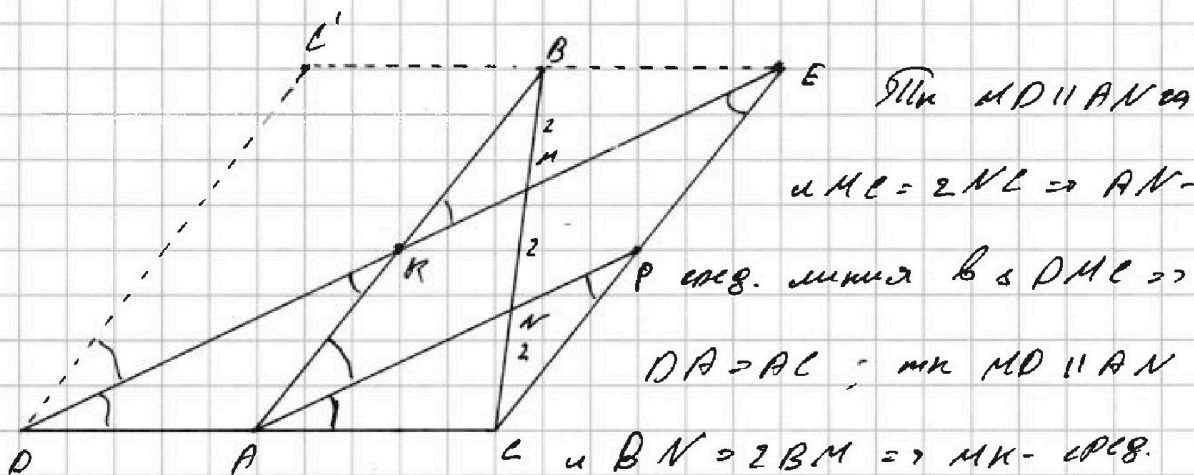
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ΔK медиана
 $\angle ME = 2\angle E \Rightarrow AN$
 серед. линия B в $DME \Rightarrow$
 $DA = AC$; $DK \parallel AN$
 и $BN = 2BM \Rightarrow MK$ - сред.
 лин. в $\triangle ANB \Rightarrow BK = KA$. ~~Доказано~~
~~линия CE параллельно перпендикуляр AB в $CE \Rightarrow$~~
 $AB \parallel CE$ и $AB = CE \Rightarrow$ $DK \parallel AB = DC = CE \Rightarrow$
 $\triangle DEC$ - равноб. \Rightarrow Если параллельно перпендикуляр
 AB в $DC' \Rightarrow DC'E$ - равнобедр. и $AB \parallel DC'$ и
 $DK \parallel AB \parallel DC'$
 $BE = DA = AC \Rightarrow \angle DEC = \angle BKE = \angle DKA = \angle BDC$
 $(K' - \text{месе. } DE \text{ и } AB; \text{ мы пока не знаем, что } K = K')$
 $\Rightarrow \triangle DKA = \triangle BKE$, по углам и стороне \Rightarrow
 $AK = BK \Rightarrow K' - \text{серед. } AB \Rightarrow K' = K \Rightarrow DK \parallel AN$
 $\Rightarrow \angle APC = \angle DEC \Rightarrow \angle PAC = \angle BKE \Rightarrow DK \parallel AB \parallel CE$
 $\angle BAP = \angle APE \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN \Rightarrow$ по т. косинусов
 $AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2$, $DK \parallel AB$, а $AC = \frac{DC}{2} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 2AC \Rightarrow 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 6^2$$

$$8AC^2 = 6^2 \Rightarrow 2AB^2 = 6^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

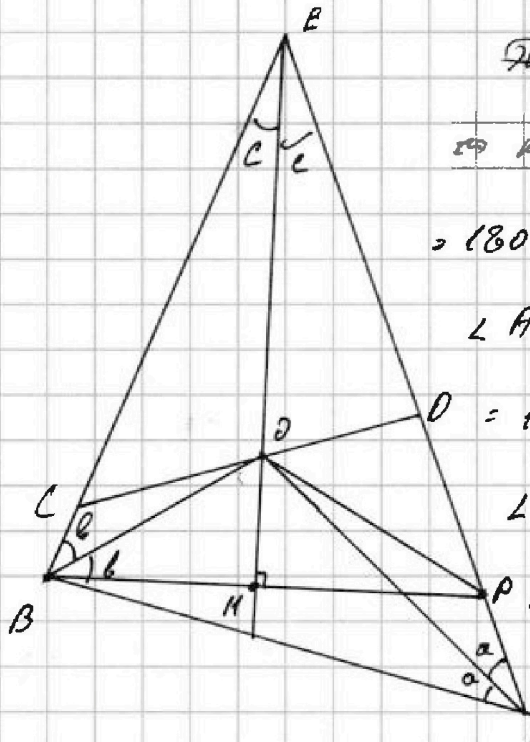


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Предполож., что $\angle FAB < \angle EBA$

т.к. $\triangle ABEP$ - равнос. $\Rightarrow \angle ABE = \angle AEP$

$= 180^\circ$; $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, т.к.

$\angle ADC + \angle CDE = 180^\circ$ и $\angle ECD + \angle BCD$

$= 180^\circ$, т.к. они смежные. \Rightarrow

$\angle EBA = \angle BDC$; $\angle ECD = \angle BAC$.

AO - биссектр. $\angle BAD$; BO - биссектр.

$\angle EBA$, т.к. O - центр впис.

Проведем $BP \perp EO$ $\Rightarrow \triangle BEP$ - равнос., т.к. EO - и бисс.

и высота $\Rightarrow \triangle BOP$ - равнос., т.к. для него EO -

и бисс. и BP - и высота. $\Rightarrow \angle OBP = \angle OPB$

$\angle BOH = \angle COH - \angle COB = \angle EOP - \angle ECD + \angle EBO =$

$= \angle BEO + \angle CBO + \angle EBO - \angle ECD = c + b = \angle POH$

$\Rightarrow \angle POD = \angle HOD - \angle POH = \angle EDC + \angle EDO - \angle POH =$

$= 2b - b - c + c = b \Rightarrow \angle EDO = \angle DOC + \angle OPD \Rightarrow$

$\angle OPD = 2b - b = b \Rightarrow OP = DP$. т.к. $\triangle BEP$ - равнос.

$\Rightarrow EB = EP = ED + DP = 12 \Rightarrow b$ в любом случае $ED + DP = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если в каждую деревню из любой можно попасть
из любой. \Rightarrow это граф с 1 или 2 циклами и
без циклов, т.е. можно получить различные
циклы несколько раз и поочередно новые маршруты
 \Rightarrow это дерево. В дереве на n верш. ровно
 $n-1$ дорога, т.е. дорог будут. Верш. с степ.
Верш. $= 1$ и можно её уда и соедин. с ост. верш.
и дорог. на 1 \Rightarrow в конце мы придем к графу
 \Rightarrow пусть есть n городов. \Rightarrow число дорог
 $= n-1$ и $2 \frac{5+6+7+8+(n-4)}{2} =$
 $2n-2 = 23+n \Rightarrow \boxed{n=25}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{|x - y - 1|} = 2$$

$$\text{Или } \sqrt{-101} = \emptyset \Rightarrow |x - y - 1| \leq 1, \text{ т.к. } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{целым. } \Rightarrow |x - y - 1| = 0 \text{ или } |x - y - 1| = 1.$$

$$\text{Если } |x - y - 1| = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y + 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y + 2 - 2y - y^2 + 2y - 1 - y^2} + \sqrt{1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2y^2 - 2y + 1} = 1 \Rightarrow -2y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow -2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ или } -2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

~~$$\text{Или } x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0$$~~

~~$$\text{Если } \Rightarrow x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0$$~~

$$\text{Если } |x - y - 1| = 1 \Rightarrow |x - y - 1| = \pm 1$$

$$\text{Если } x - y - 1 = -1 \Rightarrow x = y, \text{ но тогда}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = -2x^2 < 0 \Rightarrow \text{какого-либо значения. Сумма}$$

$$\Rightarrow x - y - 1 = +1 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2y + 4 - 2y - y^2 - 4y - 4 - y^2} + \sqrt{1 - 1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2 - 4y} = 2 \Rightarrow -2y^2 - 4y = 4$$

$$y^2 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow \text{по н. формуле } y = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i \Rightarrow$$

$$y = \emptyset \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ и } y = -1; x = 1 \text{ и } y = 0}$$

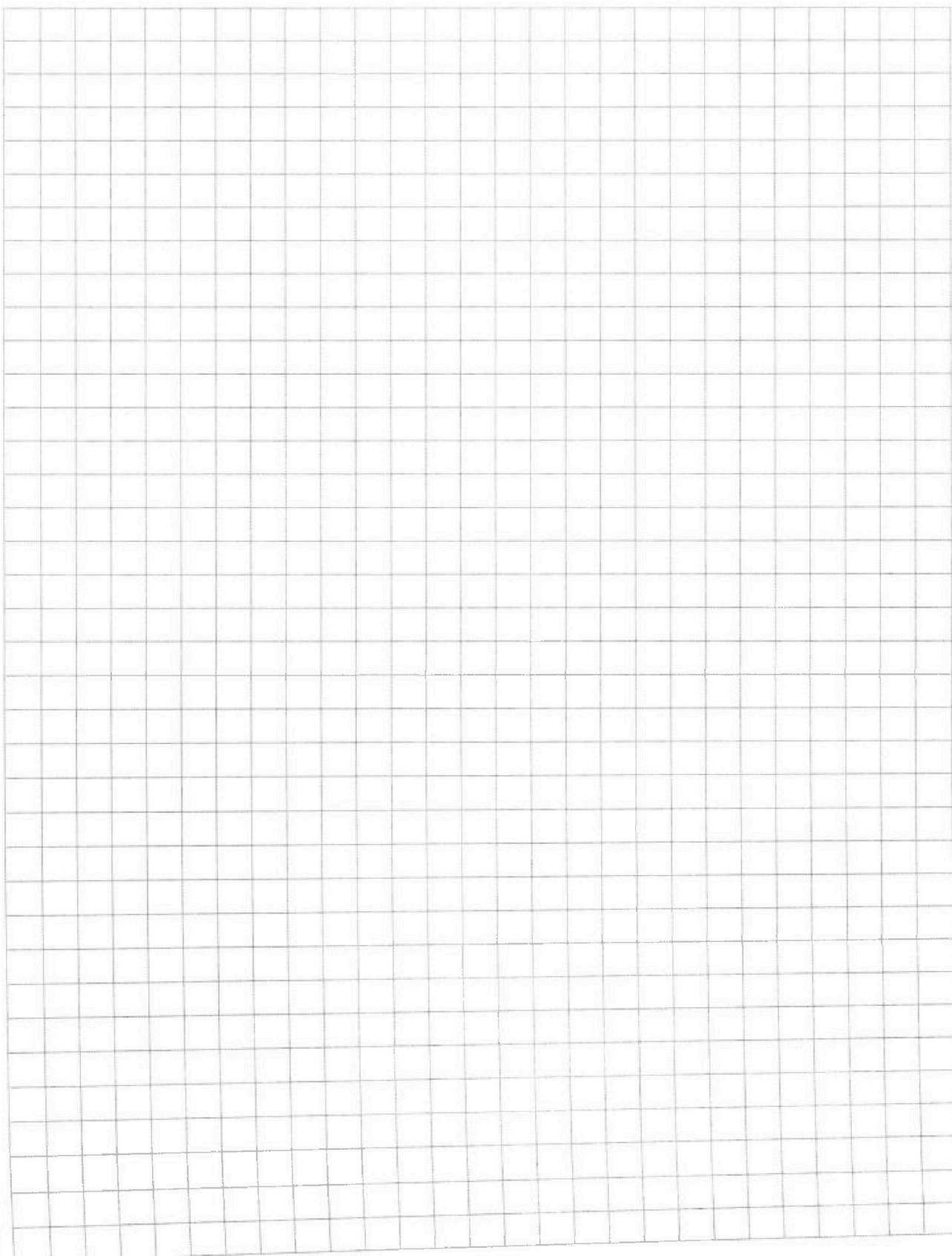


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





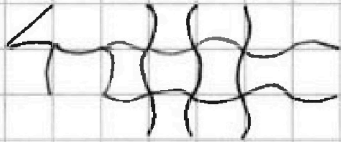
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пл-17



$$|x - y - 1| = 0$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$$

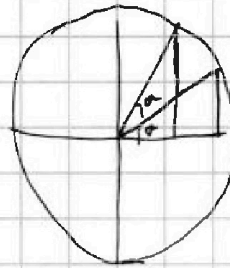
$$x = y + 1$$

$$2y + 2 - 2y - y^2 + 2y + 1 - y^2 = 1$$

$$2y = 2y^2 \quad y = y^2$$

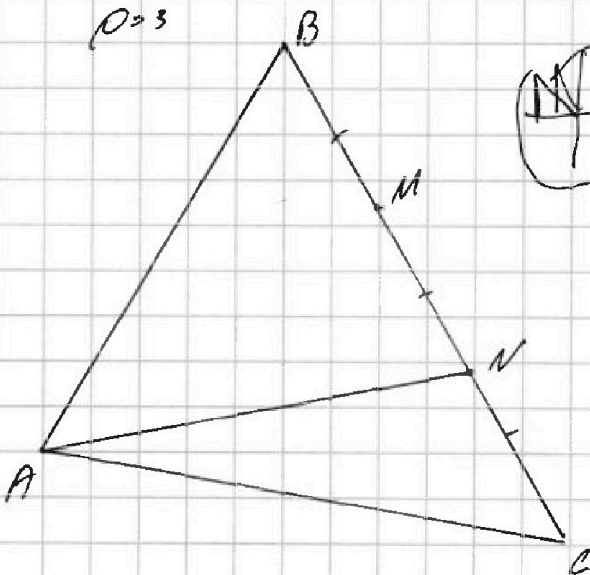
$$(x_1 - x)(x_2 - x) = 0$$

$$x_1 x_2 - x(x_1 + x_2) + x^2$$



САН

$p = 3$



$$(a - b)^2 + 4ab + 3a + 3b$$

$$4ab + 3a + 3b + 12^2$$

$$a(4b + 3) + 3b + 12^2$$

2

$$a(3 + a + b) + b(3 + a + b)$$

$$(a + b)(3 + a + b) = p \cdot p$$

$12^2 \quad p^2$

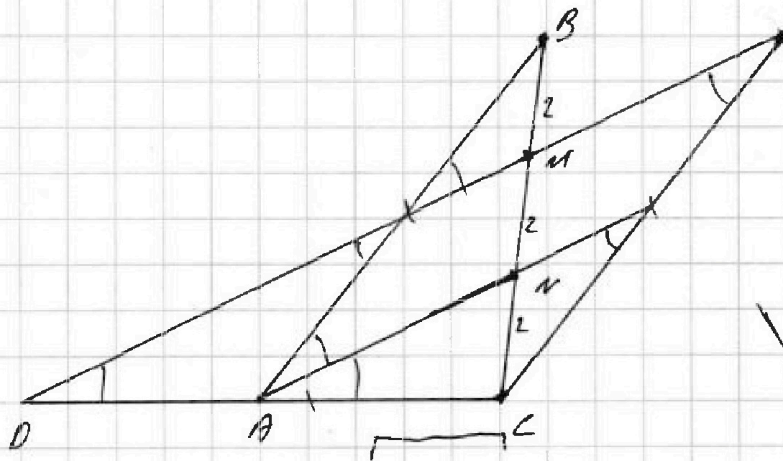
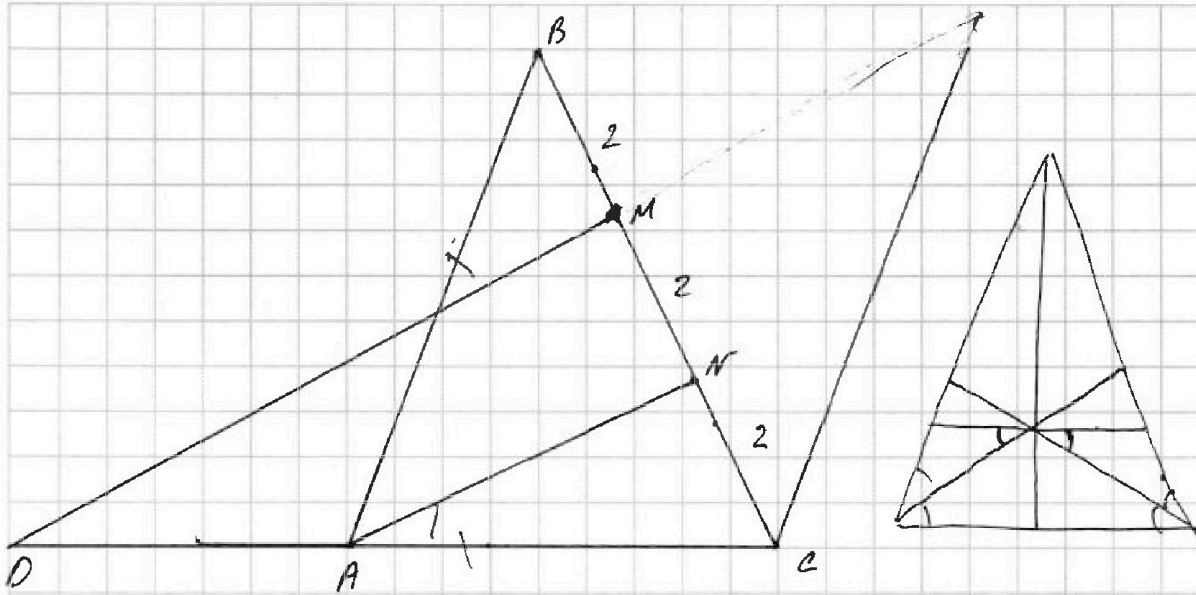


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$8 + 4 + 5 + 8$$

21

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | |
| ^ | ^ | ^ | | |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 11-10 |
| ^ | ^ | ^ | ^ | |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | |
| 3-2-1 | 6-5-4 | 2-8-7 | | |

$$11 \cdot 10 \cdot$$

$$11! = 8$$

$$11 - 4$$

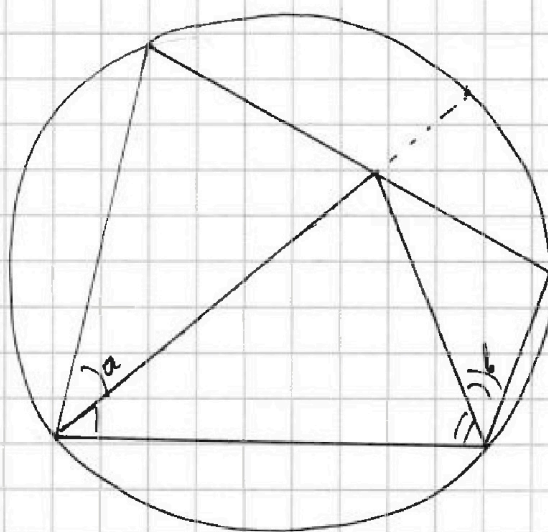
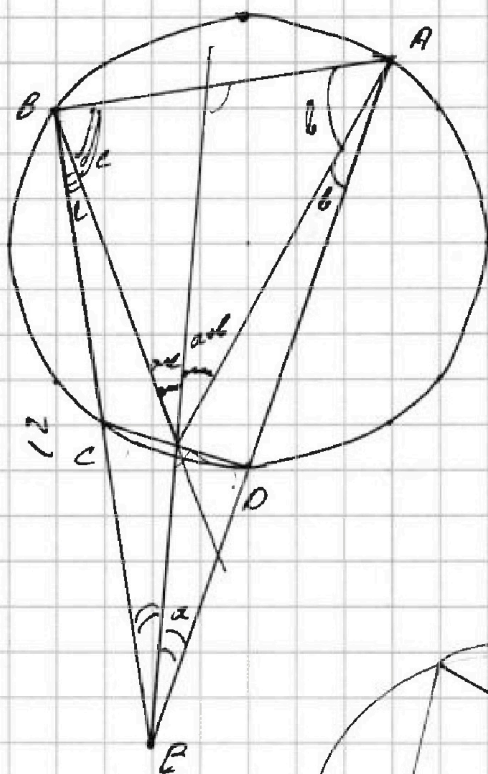


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



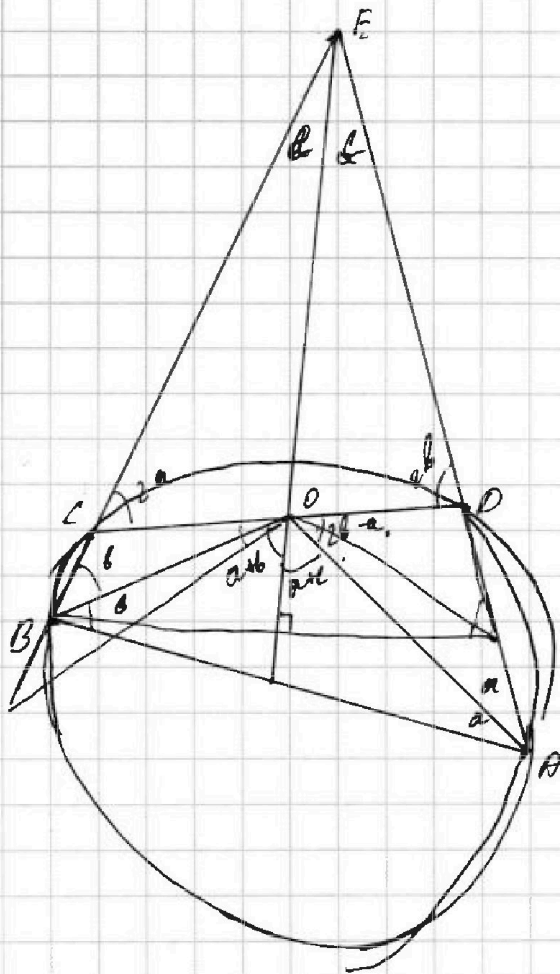


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$360 - (90 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 180 - \alpha)$$

$$b + c - a$$

$$b + a - c$$

$$2b + a + c$$

