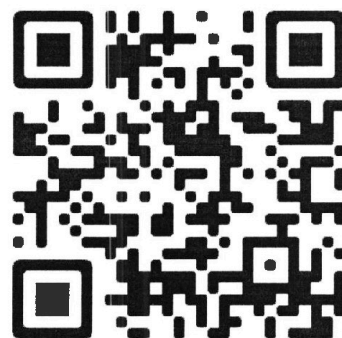




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



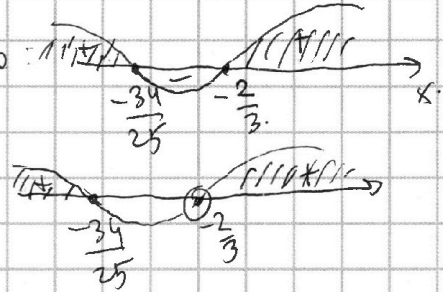
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала найдем ОДЗ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \rightarrow \text{метод интервалов} \\ 3x+2 \neq 0 \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

Теперь отметим монотонность, то $2-x \geq 0$, т.к. пусть q - знаменатель

$$\text{прописи, а } 2-x = x_{12}, \quad \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = x_{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{12} = q^2 x_{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} q^2 \geq 0 - \text{т.к. это квадрат} \\ x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \text{ т.к. это корень.} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 x_{10} = x_{12} = 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\text{Теперь мы получаем, что } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$$

Затем теперь найдем, что т.к. $2-x$ - 12-й член прописи,

$$\text{а } \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - 10\text{-й, то то } \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = q^2$$

$$(\text{наше отменили, то } x \neq 2, \text{ иначе } 2-x=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = 0, \text{ но}$$

$$\text{тогда } x = -\frac{34}{25}). \text{ Аналогично: } \frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3} = q^6, \text{ т.к. это } 18\text{-й}$$

и 10-й 12-й члены соответственно

$$\text{Отсюда следует, что } \left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \right)^3 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{2-x} \Leftrightarrow$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^4 = (25x+34)(3x+2) \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

$$\text{т.к. у нас } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2], \text{ то } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$$

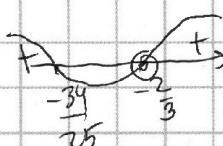
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из метода интервалов для выражения $\frac{25x+34}{3x+2}$: 
 Это прикинем неотрицательные значения на
 множестве чисел x , которое мы рассматриваем \Rightarrow

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2} = \frac{25x+34}{3x+2}$$

Тогда $(2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)(3x+2) - \frac{25x+34}{3x+2} \Leftrightarrow (2-x)^4 = \left(\frac{25x+34}{3x+2}\right)^2$

Значит, $\begin{cases} 25x+34 = (2-x)^2 \\ 25x+34 = -(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1): $D = 29^2 + 120 = 841 + 120 = 961 = 31^2$ (2) $D = 441 - 38 \cdot 4 = 289 = 17^2$

$x_1 = \frac{29+31}{2} = 30 \notin \text{ОДЗ}$

$x_1 = \frac{-21+17}{2} = -2 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

$x_2 = \frac{29-31}{2} = -1 \notin \text{ОДЗ}, \text{ м.к.}$

$x_2 = \frac{-21-17}{2} = -19 \in \text{ОДЗ}, \text{ м.к. } < \frac{34}{25}$

находятся между $-\frac{34}{25}$ и $-\frac{2}{3}$.

Теперь заметим, что все $x \in$ нашему ОДЗ и являющиеся решениями данного уравнения обязательно найдутся, т.к. все члены уравнения при $x = -2$ и $x = -19$ будут ≥ 0

и будет выполнено: $\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^3 = \frac{\sqrt{(25x+34)}}{(3x+2)^{3/2}}$ тогда в

числителе q можно будет взять число $\sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}}$, а

в числителе $x_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

В таком случае $2-x$ выразится, как $x_{10} \cdot q^2$, т.е. как x_{12} ,

а $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$, как $x_{12} \cdot q^6$, т.е. как $x_{18} \Rightarrow -2$ и -19 негодны.

Ответ: $x_1 = -2$.

$x_2 = -19$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Замена: $t = \cos x \Rightarrow$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$ тогда уравнение имеет решение, нужно, чтобы для корня $t \in [-1; 1]$.

$$p(4t^3 - 3t) + 12t^2 + 12t + 3(p+4)t + 10 = 0.$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0.$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0.$$

$$(t+1)^3 = -(p-1)t^3$$

$$t+1 = -\sqrt[3]{p-1} t$$

$$t(1 + \sqrt[3]{p-1}) = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

Если опустим, то $\sqrt[3]{p-1} \neq -1$, иначе

$(1 + \sqrt[3]{p-1}) = 0 \Rightarrow$ уравнение не имеет корней,

т.е. справа не найд.

тогда $p-1 \neq -1 \Rightarrow p \neq 0.$

Итак, $t = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

Мы хотим, чтобы $-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}} \in [-1; 1]$

Пусть $\sqrt[3]{p-1} = k \Rightarrow -\frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+k} \in [-1; 1] \Rightarrow 1+k \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \quad \text{м.к. } p$$

$$\sqrt[3]{p-1} \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Решением для каждого p системы:

$$\cos x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑
Ответ.

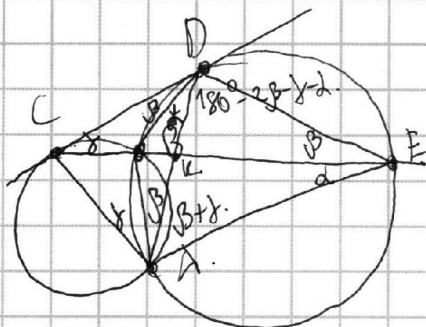
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$.

Тогда из условия: $\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$

Пусть $\angle AEC = \delta$; $\angle CED = \beta$; $\angle CAB = \gamma$. Тогда заметим, что из вписанности $\angle BAD = \angle CED = \beta$. Аналогично $\angle BDK = \delta$.

Теперь заметим, что $\angle CDB = \beta$ — т.к. это угол между касательной CD и хордой BD , на которую опирается вписанный $\angle CED = \beta$. Также, заметим $\angle CAB = \angle DCE = \gamma$. Т.к. DK — высота в $\triangle CDE$, то $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. С другой стороны, по

формуле площади треугольника δ -ка: $\frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDK}{\frac{1}{2} DE \cdot DK \cdot \sin \angle EDK} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$. Тут имеем, $\angle CDK = \delta + \beta$ (как сумма $\angle CDB$ и $\angle BDK$).

Также $\angle EDK = 180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta = 180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta$ (по сумме углов $\triangle CDE$).

$\Rightarrow \sin \angle EDK = \sin(180^\circ - \gamma - \beta - \delta - \beta) = \sin(2\beta + \gamma + \delta)$

$\sin \angle CDK = \sin(\delta + \beta) \Rightarrow \frac{S_{\triangle CDK}}{S_{\triangle DEK}} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$

Тогда $\frac{CD}{DE} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)}$

Теперь найдем, что $\angle DAE = 180^\circ - \delta - \beta - (180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta) = 180^\circ - \delta - \beta - 180^\circ + \gamma + \delta + 2\beta = \beta + \gamma$ (по сумме углов $\triangle DAE$).

По т. синусов для $\triangle ADE$: $\frac{AE}{\sin(180^\circ - 2\beta - \gamma - \delta)} = \frac{AD}{\sin(\delta + \beta)} \Rightarrow \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(2\beta + \gamma + \delta)} = \frac{AD}{AE}$

Тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE}$. Также мы знаем, что $\angle DAE = \beta + \gamma$. Также, $\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \beta + \gamma \Rightarrow AK$ — биссектриса в $\triangle CAE$.

Тогда по свойству б-биссектрисы: $\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$. Пусть тогда $AC = 7x$; $AE = 20x$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь заметим, что $\triangle ADC \sim \triangle AED$ (м.к. $\angle CAD = \angle DAE = \beta + \gamma$ и $\angle CDA = \angle DEA = \alpha + \beta$). \Rightarrow из подобия: $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD^2 = 7x \cdot 20x = 7 \cdot 20x^2 \Rightarrow AD = x \cdot 2\sqrt{35}$$

Тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{20}{7} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{20}{7} \cdot \frac{x \cdot 2\sqrt{35}}{20x} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{35}}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если прямоугольник симметричен по одной средней линии, то он центрально-симметричен. Если он симметричен относительно центра и по одной из средних линий, то он также и симметричен и по второй средней линии. Отсюда следует, что либо все прямоугольники образуют великую группу симметрии, либо только одна из групп. Значит, давайте считать количество способов, как количество прямоугольников, симметричных по первой средней линии + количество прямоугольников, симметричных по 2-й средней линии + кол-во прямоугольников симметричных относительно центра - кол-во прямоугольников со всеми симметриями.

Заметим, что кол-во прямоугольников, симметричных относительно 1-й средней линии можно найти следующим образом. Пусть 1-я средняя линия - это верхняя средняя линия. Проведем её. Тогда прямоугольник разделим на 2 равные части, в каждой из которых находится половина всех клеток, т.е. $\frac{500 \cdot 120}{2} = 250 \cdot 120 = 500 \cdot 60 = 30\,000$ клеток. Поместим в левую половину 4 клетки. Тогда по симметрии одновременно заданы правая половина и подбора. 4 клетки размещены определяют собой левую половину, т.е. 4 клетки в ней \Rightarrow кол-во способов равно C_4^{30000} .

Аналогично и для 2-й средней линии кол-во способов равно C_4^{30000} . Заметим, что размещением с центральной симметрией определяются только по одной из половинок прямоугольников одновременно \Rightarrow и для центральной симметрии способов будет C_4^{30000} .

Теперь найдем кол-во способов построить прямоугольник



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

С тремя симметриями. Для этого достаточно

разделить квадрат на части 3 цвета!

т.е. для проверки обе средние линии.

1	2
3	4

Утверждается, что это по четверти

не с цветом и однозначно восстановится раскраска. Это действительно правда, т.к. по симметрии от вертикальной ср. линии заданы 2-я четверть

ка, по симметрии горизонтальной - 3-я четверть, а по центральной симметрии - 4-я четверть.

Для проверки, в соответствии с тремя симметриями

задаем цвета 1-ю четверть, где будет равно 2 цвета \rightarrow кол-во способов построения равно

с 3-ми симметриями равно C_{15000}

\rightarrow кол-во клеток в четверти

иначе кол-во способов равно: $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

и и
Ответ: $3 \cdot C_{30000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$

\rightarrow кол-во равно 2, т.к. восстановим с тремя симметриями мы начнем с роз.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны условия $a^2 + b = 1000$ и условие $a < b$.
Для начала найдем все возможные пары, где $a \geq 0$.

Возможные пары:

0) $a=0$ $b=1000$	11) $a=11$ $b=989$	21) $a=21$ $b=959$
1) $a=1$ $b=999$	12) $a=12$ $b=988$	22) $a=22$ $b=956$
2) $a=2$ $b=996$	13) $a=13$ $b=987$	23) $a=23$ $b=951$
3) $a=3$ $b=991$	14) $a=14$ $b=984$	24) $a=24$ $b=944$
4) $a=4$ $b=984$	15) $a=15$ $b=985$	25) $a=25$ $b=935$
5) $a=5$ $b=975$	16) $a=16$ $b=976$	26) $a=26$ $b=924$
6) $a=6$ $b=964$	17) $a=17$ $b=971$	27) $a=27$ $b=911$
7) $a=7$ $b=951$	18) $a=18$ $b=966$	28) $a=28$ $b=896$
8) $a=8$ $b=936$	19) $a=19$ $b=959$	29) $a=29$ $b=875$
9) $a=9$ $b=919$	20) $a=20$ $b=940$	30) $a=30$ $b=800$
10) $a=10$ $b=900$	31) $a=31$ $b=759$	

Команда $a=32$ b становится меньше чем a .

Проверим, когда $b-a \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow b-a \equiv 0 \pmod{3}$.

$$b = 1000 - a^2 \Rightarrow 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 1 \equiv \frac{a^2 + a}{3}$$

при $a \equiv 1 \pmod{3}$: $a^2 + a \equiv 2 \pmod{3}$ при $a \equiv 2 \pmod{3}$: $a^2 + a \equiv 4 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

при $a \equiv 0 \pmod{3}$: $a^2 + a \equiv 0 \pmod{3}$ \Rightarrow если $b = 1000 - a^2$, то $b-a$ обязательно $\not\equiv 0 \pmod{3}$

3) За этим условием уже можно не следовать.

Пусть теперь $(a-c)(b-c) = p^2$. Так p^2 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел лишь в 4-х случаях:

1) $p^2 = p \cdot p$ 2) $p^2 = (-p) \cdot (-p)$ 3) $p^2 = p^2 \cdot 1$ 4) $p^2 = (-p^2) \cdot (-1)$.

(1) и (2) случаи сразу отпадают, т.к. $a-c \neq b-c$, т.к. $a \neq b$

Потом, т.к. $a < b$, то $a-c < b-c$. \Rightarrow $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$

Найдем пары (a, b) такие, что:

$$a < b; a^2 + b = 1000 \text{ и } b-a = p^2-1.$$

т.к. $a^2 + b = 1000$, то $b = 1000 - a^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1000 - a^2 - a = p^2 - 1.$$

$$p^2 - 1 > 0 \Rightarrow 1000 - a^2 - a > 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 1000 < 0.$$

$$D = 1 + 1000 \cdot 4 = 4001 + 4001$$

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}; a_2 = \frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно из условия: $b > a \Rightarrow 1000 - a^2 > a$, т.е. $1000 - a^2 - a > 0$
Значит, рассматривая a на промежутке от $\frac{-1 - \sqrt{4001}}{2}$ до $\frac{-1 + \sqrt{4001}}{2}$
можно задать про условие $a < b$, ведь оно и так выполняется.

Максимальное значение функции $1000 - a^2 - a$ достигается в вершине, т.е. это параболы с ветвями в. Вершина находится в м. $(-\frac{1}{2}; 1000 + \frac{1}{4}) \Rightarrow p^2 - 1 \leq 1000 \Rightarrow p^2 \leq 1001$.

Тогда $p_{\max} = 31$, т.к. $32^2 = 1024 > 1001 \Rightarrow$ можем перебрать все p от 2 до 31.

- | | | |
|------------|---|-------------------------|
| 1) $p=2$ | $\Rightarrow 1000 - a - a^2 = 3 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 997 = 0$ | $D = 3989$ - не квадрат |
| 2) $p=3$ | $1000 - a - a^2 = 8 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0$ | $D = 3969$ - не квадрат |
| 3) $p=5$ | $1000 - a - a^2 = 24 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 976 = 0$ | $D = 3905$ - не квадрат |
| 4) $p=7$ | $1000 - a - a^2 = 48 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 952 = 0$ | $D = 3809$ - не квадрат |
| 5) $p=11$ | $1000 - a - a^2 = 120 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 880 = 0$ | $D = 3521$ - не квадрат |
| 6) $p=13$ | $1000 - a - a^2 = 168 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 832 = 0$ | $D = 3329$ - не квадрат |
| 7) $p=17$ | $1000 - a - a^2 = 288 \Rightarrow a^2 + a - 712 = 0$ | $D = 2849$ - не квадрат |
| 8) $p=19$ | $1000 - a - a^2 = 360 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 640 = 0$ | $D = 2561$ - не квадрат |
| 9) $p=23$ | $1000 - a - a^2 = 528 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 472 = 0$ | $D = 1889$ - не квадрат |
| 10) $p=29$ | $1000 - a - a^2 = 840 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 160 = 0$ | $D = 641$ - не квадрат |
| 11) $p=31$ | $1000 - a - a^2 = 960 \Rightarrow 3 \times a^2 + a - 40 = 0$ | $D = 161$ - не квадрат |

Ответ: ~~маленьких решений нет.~~

Тем, где разность кратна 3-м делению делимым не будет, т.е. мы знаем, что $b - a \div 3$.

Тогда возможны 2 случая: $\begin{cases} 1000 - a - a^2 = 8 \\ 1000 - a - a^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 992 = 0 \\ a^2 + a - 832 = 0 \end{cases}$

1) $D = 1 + 992 \cdot 4 = 3969 = 63^2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1 + 63}{2} = 31; a_2 = -32$

2) $D = 1 + 832 \cdot 4 = 3329$ - не квадрат. $b_1 = 39; b_2 = -24$

Тогда 1) $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = 30$ Треугола: $(31; 39; 40)$ и $(31; 39; 30)$
 $(a-c)(b-c) = 3^2 \quad (a-c)(b-c) = 3^2$
 2) $a - c = -9 \Rightarrow C_2 = 40$ Треугола: $(-32; -24; -33)$ и $(-32; -24; -23)$
 $(a-c)(b-c) = 3^2 \quad (a-c)(b-c) = 3^2$
 3) $a - c = 1 \Rightarrow C_1 = -33$
 4) $a - c = -9 \Rightarrow C_2 = -23$
 Ответ: $(31; 39; 40); (31; 39; 30); (-32; -24; -33); (-32; -24; -23)$

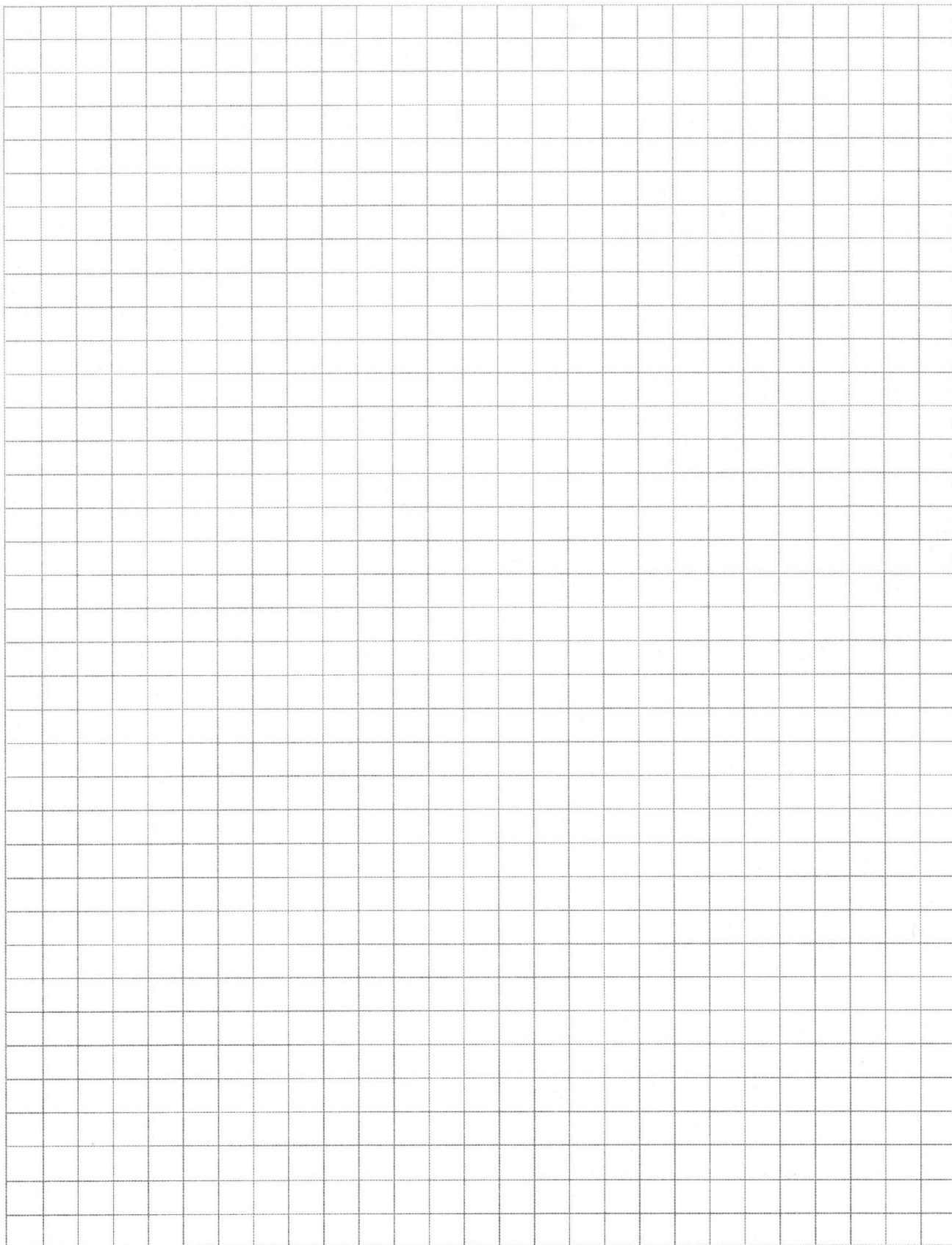


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

003: $\sqrt{(25x+34)} \cdot \sqrt{3x+2} = p^2 - 1$

$1000 - a^2 = a = 1000 - 529 = 471$

$(25x+34)(3x+2) \geq 0$

$25x+34 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{34}{25}$

$3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{3x+2} \sqrt{\frac{1}{3x+2}}$

$a < b$

$b - a \geq 3$

$a^2 + b = 1000$

$(2-x)^3 = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$(2-x)(3x+2) = (25x+34)\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$-3x^2 + 6x - 2x + 4 = -3x^2 + 4x + 4$

$(2-x)\sqrt{3x+2} = (25x+34)\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$-\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$

$x > -\frac{2}{3}$

$(2-x)^3 = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$(2-x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Algebraic equations: $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)$, $(2-x)^4 = (25x+34)(3x+2)^2$, $25x+34 = (2-x)^2$, $25x+34 = -(2-x)^2$, $25x+34 = 4+x^2-4x$, $x^2-29x-30=0$, $25x+34 = -x^2-4+4x$, $x^2+21x+38=0$.
- Quadratic equations: $x^2-29x-30=0$, $x^2+21x+38=0$.
- Linear equations: $2x-7=0$, $2x-17=0$.
- Systems of equations: $\begin{cases} x < 2 \\ (-\frac{2}{3}, 2) \end{cases}$.
- Number theory: $26^2 - 25^2 = 1$.
- Diophantine equations: $|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-23}$.
- Diagrams: A number line showing the interval $(-\frac{2}{3}, 2)$.
- Arithmetic: Long division problems like $1000 \div 24$, $1000 \div 29$, $1000 \div 58$, $1000 \div 84$, $1000 \div 121$, $1000 \div 144$, $1000 \div 169$, $1000 \div 221$, $1000 \div 229$, $1000 \div 261$, $1000 \div 271$, $1000 \div 289$, $1000 \div 31$, $1000 \div 38$, $1000 \div 45$, $1000 \div 51$, $1000 \div 57$, $1000 \div 59$, $1000 \div 67$, $1000 \div 71$, $1000 \div 79$, $1000 \div 81$, $1000 \div 89$, $1000 \div 91$, $1000 \div 93$, $1000 \div 99$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving two intersecting circles and a chain of points A, B, C, D, E, F.

At the top left, there are calculations: $\frac{32+9}{-23}$ and a vertical sum $33+33=66$, $66+99=165$, $165+99=264$.

The diagram shows two circles, w_1 and w_2 , intersecting at points A and B. Point C is on the left side of w_1 , D is on the right side of w_1 , and E is on the right side of w_2 . A chain of points A, B, C, D, E, F is shown with various arcs and angles marked. A smaller diagram to the right shows a similar construction with points B, X, D, E.

Key equations and derivations:

- $\frac{AD}{AE} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x+y)}$
- $\frac{CD}{\sin d} = \frac{CK}{\sin(x+y)}$
- $\frac{KE}{\sin(x+y)} = \frac{DE}{\sin d}$
- $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin(x+y)}$
- $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{AD}{AE}$
- $\frac{DE}{CD} = \frac{KE}{CK} \cdot \frac{\sin d+y}{\sin(d+y)}$
- $\frac{DE}{\sin(d+y)} = \frac{KE}{\sin(d+y)}$
- $\frac{DE}{\sin(d+y)} = \frac{KE}{\sin(d+y)}$

Other notes include: $1+3-3+1$, $7x$, $20x$, and a small table with m, m_1 in the middle.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a=1 \quad b=999$
 $a=2 \quad b=996$
 $a=3 \quad b=991$
 $a=4 \quad b=984$
 $a=5 \quad b=979$
 \vdots
 $a=31 \quad b=971$

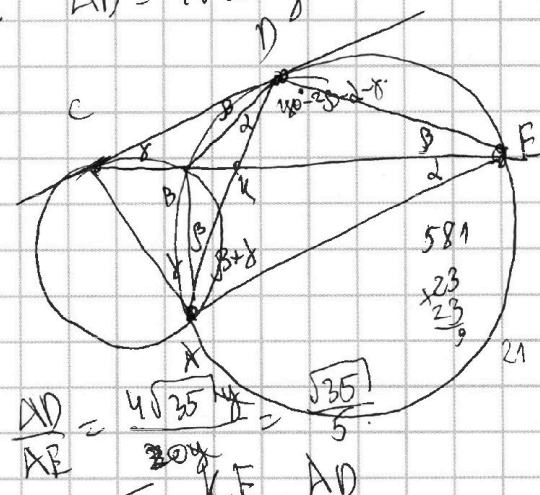
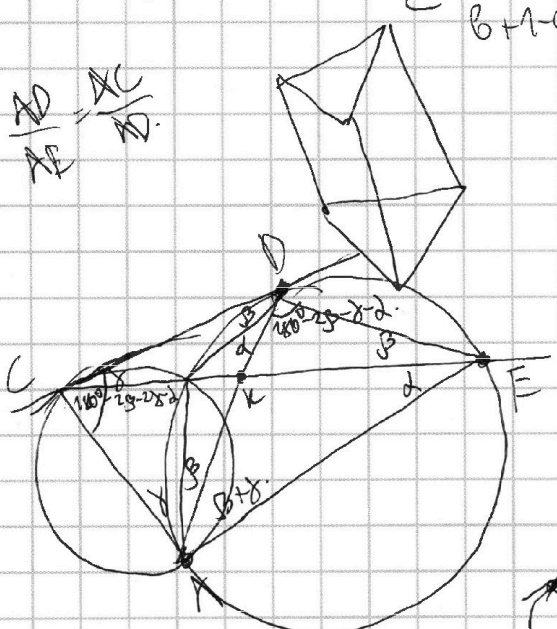
$a=30 \quad b=999$
 $a=31 \quad b=995$
 $a=32 \quad b=989$
 $a=33 \quad b=981$
 $a=34 \quad b=971$
 $a=35 \quad b=959$

$1000 - a^2$
 $1000 - 168$
 832
 $1000 - a^2$
 $1000 - 332$
 668
 $b - a \div 3$

$b = 1000 - a^2$
 $b - a = 1000 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3}$
 $1 - a^2 - a \equiv 0 \pmod{3}$
 $1 - a^2 + a \equiv 0 \pmod{3}$
 $AD = AE \cdot AC = 70y^2$
 $AD = 4\sqrt{35}y$

$(a-c)(b-c)$ - квадрат целого

$a-c=1 \quad a < b \Rightarrow a$
 $a-c=1 \quad a < b \Rightarrow a$
 $b-c=1 \quad c = a-1$
 $b+1=a$



$\cos(x+2x) =$
 $= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
 $\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \cos x \sin x$

$\frac{AD}{AE} = \frac{4\sqrt{35}y}{70y} = \frac{\sqrt{35}}{5}$
 $\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AE}$
 $\frac{\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{4\sqrt{35}}{7}$

$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$