



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть четвертый член арифметической прогрессии равен  $a$ , а разность арифметической прогрессии равна  $k$ , тогда четвертый член равен  $a$ , шестой член арифметической прогрессии равен  $a+2k$ , и десятый член арифметической прогрессии равен  $a+6k$ . Тогда есть система:

$$\begin{cases} a = 6 - 9x \\ a + 2k = (x^2 - 2x)^2 \\ a + 6k = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 6 - 9x = x^4 + 4x^2 - 4x^3 \\ 6k + 6 - 9x = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \\ 2k = 3x^2 + 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2 + 3x - 2$$

$$(x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$(x-1)^2 (x^2 - dx - 4) = 0$$

$$x=1 \quad D = 4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{D}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

2) ~~другой способ~~  
 ~~$(a+dk) = (x^2 - 2x)^2$~~

1 способ:  $x=1$

$$\text{Тогда } \begin{cases} a = 6 - 9 \\ a + dk = (1-2)^2 \\ a + 6k = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a + dk = 1 \\ a + 6k = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3 \quad k = 2$  Число арифм.

последовательность:  $-9, -7, -5, \textcircled{-3}, -1, \textcircled{1}, 3, 5, 7, \textcircled{9}$

$x=1 \quad \checkmark$

д) считая  $x = 1 + \sqrt{5}$

$$\begin{cases} a = 6 - 9 - 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 9 \cdot 6 + 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 + 18\sqrt{5} \end{cases} \begin{cases} \frac{(a+dk)-a}{2} \\ \Rightarrow k = 9.5 + 4.5\sqrt{5} \end{cases}$$

$$+ 6(9.5 + 4.5\sqrt{5}) = -3 - 9\sqrt{5} + 57 + 27\sqrt{5} = 54 + 18\sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}$$

Также проверит

$$3. \begin{cases} a = 6 - 9 + 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 - 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 + 9\sqrt{5} \\ a + dk = 16 \\ a + 6k = 54 - 18\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{16 + 3 - 9\sqrt{5}}{2} = 9.5 - 4.5\sqrt{5}$$

и  $(a, k) = (-3 + 9\sqrt{5}, 9.5 - 4.5\sqrt{5})$  тоже решение  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Ответ:  $1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дд.

Найти max. знач.  $3y+6x$  при условии  $\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$

Ответ: 13

Пример:  $x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$   
 $|x-2y| = |\frac{4}{3} - \frac{10}{3}| = |-\frac{6}{3}| = 2 \leq 2 \checkmark$   
 $|2x-y| = |\frac{8}{3} - \frac{5}{3}| = |1| = 1 \leq 1 \checkmark$

Решение: Рассмотрим 4 случая.

①  $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases}$  тогда по усл.  $\begin{cases} x-2y \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2+2y \\ 2x \leq y+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq \frac{y+1}{2}$ , но м.к.  $x-2y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2y \Rightarrow \frac{y+1}{2} \geq 2y \quad / \cdot 2$   
 $y+1 \geq 4y$   
 $1 \geq 3y$   
 $\frac{1}{3} \geq y$

$3y+6x \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 6 = 5$

Итак, в ① случае  $3y+6x \leq 5$ .

②  $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y \\ 2x \leq y \end{cases}$  но тогда  $2x \geq 4y$ , а  $2x \leq y \Rightarrow y \geq 4y \Rightarrow 0 \geq 3y \Rightarrow y \leq 0$ .  $y \geq 2x \Rightarrow x \leq 0$   
 $\frac{1}{3} + 1 \geq x$   
 $\frac{2}{3} \geq x$

$\Rightarrow 3y+6x \leq 0$ . Итак в ② случае  $3y+6x \leq 0$

③  $\begin{cases} x-2y \leq 0 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2x \geq y \end{cases}$  по условию:  $\begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \leq x+2 \\ 2x \leq y+1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4y \leq x+4 \stackrel{③^*}{=} y+5 \Rightarrow 3y \leq 5 \Rightarrow y \leq \frac{5}{3} \Rightarrow$  из ②\*  $2x = y+1 \leq \frac{5}{3} + 1 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$

Итак:  $3y+6x \leq 5 + \frac{4}{3} \cdot 6 = 5 + 8 = 13$

④  $\begin{cases} x-2y \leq 0 \\ 2x-y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2y \\ 2x \leq y \end{cases}$  по усл.  $\begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ y-2x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y \leq 2+x \\ y-1 \leq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \leq x+2 \\ y \leq 2x+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{2} \geq 2x \Rightarrow x+2 \geq 4x$   
 $2 \geq 3x$   
 $\frac{2}{3} \geq x$

$3y+6x \leq 2 + 6 \cdot \frac{2}{3} = 10$

Итак  $3y+6x$  всегда  $\leq 13$  м.к. каждая пара  $(x, y)$  попадает под 1 из случаев, а на 13 есть пример.

$2y \leq x+2$   
 $2y \leq \frac{2}{3} + 2$   
 $y \leq 1 + \frac{1}{3}$   
 $y \leq \frac{4}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m + 2n)(m + 2n - 7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

1 случай:  $B = 11p^2, A = 75q^2$

$$11p^2 = mn(m + 2n + 9) \Rightarrow \text{если } m, n > 1. \text{ То } \text{пропуска}$$

$$\text{либо } m = 11 \text{ и } n = m + 2n + 9 = p \quad 1.1$$

$$\text{либо } n = 11 \text{ и } m = m + 2n + 9 = p \quad 1.2$$

$$\text{либо } n = m = p \text{ и } m + 2n + 9 = 11 \quad 1.3$$

1.1 тогда  $n = 11 + 2n + 9 \Rightarrow n = -20$ ,  $n$ -натур противоречие.

1.2 тогда  $2n + 9 = 0$ , но  $n = 11$  противоречие.

1.3 тогда  $m + 2n + 9 = 3p + 9 = 11$  но  $11 \not\equiv 3$  противоречие (а  $3p + 9 \equiv 3$ )

$\Rightarrow$  либо  $m = 1$  либо  $n = 1$ .

1.4  $m = 1$  тогда  $11p^2 = n(10 + 2n) \Rightarrow m$  и  $10 + 2n$  - чет.  $\Rightarrow 11p^2$  - чет.

а значит  $p = 2$  тогда  $11 \cdot 4 = n(10 + 2n) \Rightarrow 2n^2 + 10n - 44 = 0$

$$n^2 + 5n - 22 = 0 \quad D = 25 + 4 \cdot 22 = 113, \Rightarrow n_1 = \frac{-5 + \sqrt{113}}{2} \quad n_2 = \frac{-5 - \sqrt{113}}{2}$$

$n_1, n_2$  - нецелые  $\Rightarrow$  не натур противоречие.

1.5  $n = 1$  тогда  $11p^2 = m(m + 11)$ , заметим что  $m, m + 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow m$  и  $m(m + 11) \equiv 11$  и  $11$  - простое  $\Rightarrow m \equiv 11$  и  $m + 11 \equiv 11$

$$\Rightarrow 11p^2 \equiv 11^2 \Rightarrow p = 11 \quad 11^3 = m^2 + 11m \quad m^2 + 11m - 11^3 = 0$$

$$D = 11^2 + 4 \cdot 11^3 = 11^2 \cdot (4 + 44) = 11^2 \cdot 48 \Rightarrow m_1 = \frac{-11 + 11\sqrt{48}}{2}; m_2 = \frac{-11 - 11\sqrt{48}}{2}$$

$m_1, m_2$  - нецелые противоречие.

2 случай:  $B = 75q^2, A = 11p^2$

$$11p^2 = (m + 2n)(m + 2n - 7) \Rightarrow \text{либо } m + 2n = 11 \text{ и } m + 2n - 7 = p^2$$

1) Заметим, что  $m + 2n > 0 \Rightarrow (m + 2n - 7) > 0$

Тогда случаи:

- 2.1  $m + 2n = 11$  и  $m + 2n - 7 = p^2$
- 2.2  $m + 2n = 1$  и  $m + 2n - 7 = 11p^2$
- 2.3  $m + 2n = p$  и  $m + 2n - 7 = 11p$
- 2.4  $m + 2n = p^2$  и  $m + 2n - 7 = 11$
- 2.5  $m + 2n = 11p^2$  и  $m + 2n - 7 = 1$
- 2.6  $m + 2n = 11p$  и  $m + 2n - 7 = p$

2.1 Тогда  $(m + 2n) - 7 = 11 - 7 = 4 \Rightarrow p = 2$  Тогда ~~два варианта~~  $n = 5$

но если  $n \geq 6$  то  $m + 2n \geq 12$  и  $m, n \geq 1, n = 1, m = 9$  тогда

$$A = 11 \cdot 4, B = 1 \cdot 9 \cdot 20 = 75q^2, \text{ но } 75 \cdot 13 \Rightarrow B = 13, \text{ но } 13 \neq 9 \cdot 20$$

след. случаи  $n = 2, m = 7 \quad A = 11 \cdot 4, B = 2 \cdot 7 \cdot 20 \Rightarrow B = mn \cdot 20, \text{ но}$

$$B = 75q^2 \Rightarrow m \text{ и } B \equiv 2 \quad (B = 20mn) \text{ значит } q = 2, \text{ тогда } mn \cdot 20 = 75q^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$mn \cdot 20 = 75q^2$$

$$mn \cdot 20 = 75 \cdot 4$$

$$mn = 13 \Rightarrow m, n \text{ и } m+2n = 11 \text{ и } m, n \text{ - натуральные противоречие}$$

$$(mn = 13 \Rightarrow m = 13 / n = 13 \Rightarrow m+2n \geq 13, \text{ но } m+2n = 11)$$

$$d. 2. m+2n = 1, \text{ но } m \geq 1 \text{ и } 2n \geq 2 \text{ (и.и. } n \geq 1)$$

$$\Rightarrow m+2n \geq 3 \text{ противоречие.}$$

$$d. 3. m+2n = p \text{ и } m+2n-7 = 11p \text{ } p \text{ - натуральное. } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11p > p$$

$$m+2n-7 > m+2n$$

$$-7 > 0 \text{ противоречие}$$

$$d. 4. m+2n = p^2 \text{ и } m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = m+2n-7+7 = 11+7 = 18, \text{ но } 18 \neq p^2 \text{ противоречие}$$

$$d. 5. m+2n = 11p^2; m+2n-7 = 1 \text{ тогда } m+2n = m+2n-7+7 = 1+7 = 8 \text{ но } 8 \neq 11p^2 \text{ и.и. } 8 \neq 11$$

$$d. 6. m+2n = 11p \text{ и } m+2n-7 = p \Rightarrow m+2n = p+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p+7 = 11p$$

$$7 = 10p, \text{ } p \text{ - натуральное противоречие.}$$

А значит таких пар  $(m, n)$  не существует.

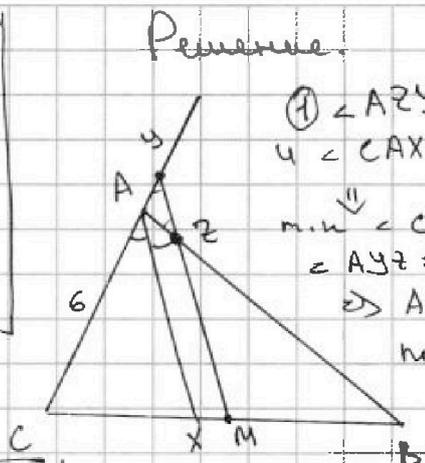


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4  
Дано:  
 $AC = 6$   
 $AZ = 3$   
 $YZ = 4$   
 $CM = MB$   
 $AX$  - биссектр.  $\angle BAC$   
 $BC = ?$



Решение.

выполняет перес.

①  $\angle AZY = \angle XAZ$  (по  $\parallel AX$  и  $YZ$ )  
и  $\angle CAZ = \angle CBM$  (по  $\parallel AX$  и  $YM$ )

т.к.  $\angle CAZ = \angle XAZ$  известны,  
 $\angle AZY = \angle XAZ \Rightarrow \triangle AYZ$  - равноб.

$\Rightarrow AZ = AY = 3$ . Тогда  
по т. косинусов,  $\triangle AYZ$

$$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{где } \alpha = \angle YAZ$$

$$\cos \alpha = \frac{18 - 16}{18} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(180 - \alpha) = -\frac{1}{9}$$

$$\text{①}^* \cos(\angle CAB) = -\frac{1}{9}$$

② Заметим, что если  
 $AC = a$ ,  $AB = b$ ,  $CB = c$   
то  $CX = c \cdot \frac{a}{a+b}$  т.к.  
 $\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB}$ ,  $MB = \frac{c}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow XM = c - \frac{c}{2} - c \cdot \frac{a}{a+b} = c \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{a+b} \right) = c \cdot \frac{a+b-2a}{2(a+b)} = \frac{c}{2} \left( \frac{b-a}{a+b} \right)$$

~~с другой стороны~~ Также т.к.  $ZM \parallel AX \Rightarrow$  по обратной т. Талеса  
где  $YM$  и  $ZM \parallel AX$ :  $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{MX} \Leftrightarrow \frac{b-3}{3} = \frac{\frac{c}{2} \left( \frac{b-a}{a+b} \right)}{\frac{c}{2} \left( \frac{b-a}{a+b} \right)} \cdot 3 \cdot \frac{b-a}{a+b}$

$$\Leftrightarrow (b-3) \left( \frac{b-a}{a+b} \right) = 3, \quad a = AC = 6.$$

$$(b-3) \left( \frac{b-6}{b+6} \right) = 3 \quad / \cdot (b+6)$$

$$(b-3) \cdot (b-6) = 18 + 3b$$

$$b^2 - 9b + 18 = 18 + 3b$$

$$b^2 = 12b \Rightarrow b = 12 \quad (b > 0 \text{ т.к. это длина стороны})$$

$\Rightarrow$  по т. Косинусов:  $\triangle CAB$   $BC^2 = 6^2 + 12^2 + 12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}$   $\text{①}^*$

$$\Rightarrow BC^2 = 36 + 144 + 16 = 196 = 14^2 \Rightarrow BC = 14 \quad \text{т.к. } BC > 0$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} & (1) \\ x^3 + 3x - \sqrt{2x} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y & (2) \end{cases}$$

(2):  $x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2x}$  Заметим, что  $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$  - возрастающая м.к  $x^3$  возраст.  $3x$  возраст.  $\sqrt{2x}$  возраст.  $\Rightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x}$  возраст.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = y, x \geq 0$  м.к  $\sqrt{2x} \geq 0$

(1):  ~~$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2}$~~

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$  Т.е. если обозначить

$a = \sqrt{x+2}$   $b = \sqrt{7-x}$   $a - b + 7 = 2ab$

при этом

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$

$\Rightarrow x \in [0; 7]$

$2ab + b - a - 7 = 0, a; b > 0$

$2ab + b - a = 7$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 7 - \frac{1}{2}$

$(2b-1)(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

$a+\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2b-1 > 0$

$2b-1 = \frac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = 1 + \frac{6.5}{a+\frac{1}{2}}$

$2b = \frac{a+\frac{1}{2} + 6.5}{a+\frac{1}{2}} \Rightarrow 2b = \frac{a+7}{a+\frac{1}{2}}$

$b = \frac{a+7}{2a+1} = 0.5 + \frac{6.5}{2a+1}$

$\neq 1 \Rightarrow (\sqrt{9-a^2-1})(a+\frac{1}{2}) = 6.5$

~~$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2 + \sqrt{x+2} + b}$~~

~~$2-x = 0.5 + \frac{6.5}{2a+1}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{9-a^2} - 1) \left(a + \frac{1}{2}\right) = 6.5$$

$$\left(\frac{1}{2} + a\right) \sqrt{9-a^2} - a - \frac{1}{2} = 6.5$$

$$\left(\frac{1}{2} + a\right) \sqrt{9-a^2} = 7 + a \quad \text{возведем в кв.}$$

$$(9-a^2) \left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) = 49 + a^2 + 14a$$

$$9a^2 + 9a + \frac{9}{4} - a^4 - a^3 - \frac{a^2}{4} = 49 + a^2 + 14a$$

$$a^4 + a^3 + a^2 \left(1 - 9 + \frac{1}{4}\right) + a(14 - 9) - \frac{9}{4} = 0$$

$$a^4 + a^3 + a^2 \cdot \frac{31}{4} + a \cdot 5 - \frac{9}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$4a^4 + 4a^3 + 31a^2 + 20a - 9 = 0$$

$$(4a^4 + 4a^3 - 9) + (31a^2 + 20a) = 0$$

решив это уравнение, мы найдем  $a$ , а дальше найдем  $x$  так как  $a^2 = 2$ ,  $x = y$ , и нужно проверить все ограничения.

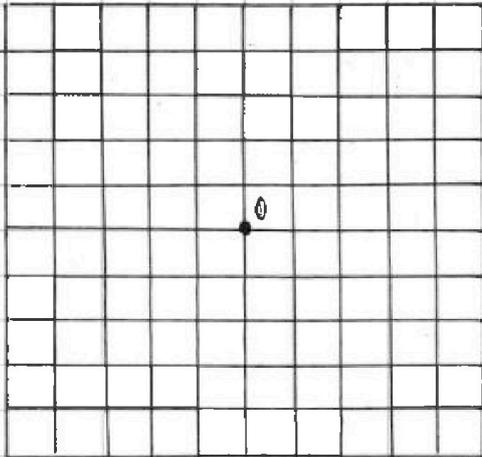


1  2  3  4  5  6  7

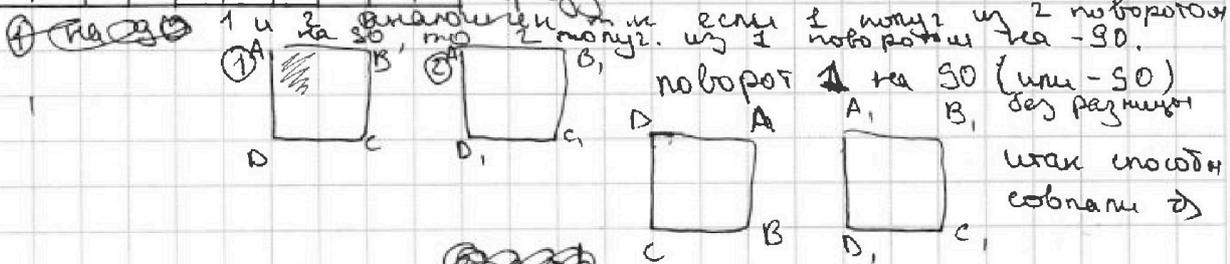
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.



Итак было 121 узел. Выбрать 2 и перекрасить из  $C_{121}^2$  способами, но некоторые из них получаются поворотом. Рассмотрим 2 таких способа. Рассмотрим 2 способа. Пусть в 1 способе выбраны точки  $a$  и  $b$  а во 2  $c$  и  $d$ . при повороте на ①  $90^\circ$ , ②  $-90^\circ$ , ③  $180^\circ$  углов они совпали:



① ~~на 90~~

①  $(a, b) \rightarrow (c, d)$

параметры в пары точки.

$a \rightarrow c$   
 $b \rightarrow d$

т.е. совп. при повороте

повороте точки  $a$  на  $90^\circ$ , аналогично  $d$  поворачивается на  $90^\circ$ . Такая пара ровно 1. т.к.

1	2
4	3

при повороте 1 кв. переходит во 2, 2 в 3, 3 в 4, 4 в 1.  $\Rightarrow$  Выбраны точки  $a$  и  $b$  а

или наоборот. отрез. точки  $c$  и  $d$  так. ~~Решение~~

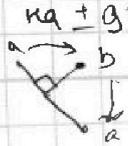
Каждому способу соответствует 1 способ поворота на  $+90^\circ$ , и 1 совпадающий на  $-90^\circ$ .

③ поворот на  $180^\circ$  аналогично  $(a, b) \rightarrow (c, d) \Rightarrow a \rightarrow c, b \rightarrow d$  и т.д. операции поворота на  $+180^\circ$  и на  $-180^\circ$  совпадают по  $(a, b)$  совп. ровно 1 пара совпадающих при повороте на  $\pm 180^\circ$  отнесит. 0. Также стоит отметить что пара

$(a, b) \rightarrow (a, b)$  при повороте

①  $a \rightarrow a \Rightarrow a, b = 0$  - центр  
 $b \rightarrow b \Rightarrow$   $\times a, b$  - разн.

либо  $a \rightarrow b$   
 $b \rightarrow a$



на  $\pm 90^\circ$  т.д. тогда противоречие и.и. точки  $a$  и  $b$  совпадают  $\Rightarrow a = b = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но при повороте на  $\pm 180^\circ$  они совпасть могут а это случится когда  $a$  и  $b$  шир. Относите 0.

Итак.

Каждому из способов  $(C_{121}^2 - C_{61}^2) = \#$  способов где  $a$  и  $b$  не шир. Относите 0 сопоставляем 3 группы разн. способа которые совпадают при наложении, а остальные

$C_{61}^2$  только 2 (без способа поворота на  $180^\circ$ )

Итак ответ:  $\frac{C_{121}^2 - C_{61}^2}{3} + \frac{C_{61}^2}{2}$  т.к. у шир. при повороте на  $90^\circ$  совпадают

$$C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60$$

$$C_{61}^2 = \frac{61 \cdot 60}{2} = 61 \cdot 30$$

~~2725~~ 2725

$$\frac{121 \cdot 60 - 61 \cdot 30}{3} + \frac{61 \cdot 30}{2} = \frac{121 \cdot 20 - 61 \cdot 10 + 61 \cdot 15}{1} =$$

$$= 242 \cdot 10 + 61 \cdot 5 = 2420 + 305 = 2725$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 5 \\ \hline 305 \end{array}$$

Ответ: 2725, 2725

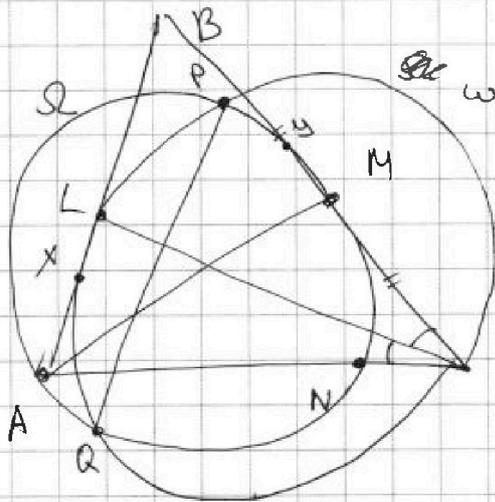


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$PQ \perp AC$

1)  $CX$  - высота к  $AB$

$\angle LXC = 90^\circ$  ( $LC$  - диаметр  
г $\omega$ )

$AY$  - высота к  $BC$

$\angle MYA = 90^\circ$  ( $AM$  диаметр  
г $\omega$ )

$X$  - пересек.  $CX$  с  $AB$ ,  $Y$  пересек.  $AY$  с  $BC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$f(1) = 1 - 4 + 1 - 6 - 4 < 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 16 - 32 + 4 - 12 - 4 < 0$$

$$f(4) = 256 - 64 \cdot 4 + 16 - 24 - 4 = 16 - 24 - 4 = -12 < 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

~~$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$~~

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 + 1 - x) + x^3$$

$$-4x^3 - 4 = -4(x^3 + 1) = -4(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 6x = x(x^2 - 6)$$

$$(x^2 - 1 - x)(x^2 - 4x - 4) + x(x^2 - 6)$$

$$x = 5$$

$$16 + 4 = 20$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$81 - 4 \cdot 27$$

$$-27 + 9 - 18 - 4 < 0$$

$$x = d + a$$

$$\begin{cases} x + a = d + a \\ 2x + 2a = 2d + 2a \\ 3x + 3a = 3d + 3a \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - dy| \leq d \\ |2x - y| = 1 \end{cases}$$

$$y + dx$$

$$\begin{cases} x \geq dy \\ 2x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - dy \leq d \\ 0 \leq 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq dy \\ 2x \geq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - dy < d \\ 2x - y < 1 \end{cases}$$

$$y \geq 2x \geq 4y \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq dy \\ 2x \geq y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq dy \\ 2x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = d + x \\ 4y = d + 2x = y + 3 \\ 4y = y + 3 \\ y \leq 1 \\ 2x \leq d \\ x \leq 1 \end{cases}$$

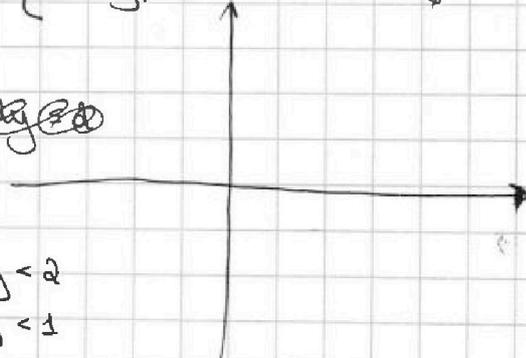
$$\begin{cases} x < dy + d \\ 2x < y + 1 \\ x < \frac{y + 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y + 1}{2} > dy \\ y + 1 > 4y \\ 1 > 3y \\ \frac{1}{3} > y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} + 2 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y + 2x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} > y \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$



$y \geq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_4 &= a \\ a_5 &= a + b \\ a_6 &= a + 2b \\ a_9 &= a + 6b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 6 - 9x \\ (x^2 - 2x)^2 = a + 2b \\ 9x^2 = a + 4b \end{cases} \begin{cases} x^4 + 4x^2 - 4x^3 = 6 - 9x + 2b \\ 9x^2 = 6 - 9x + 4b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4b &= 9x^2 + 9x - 6 \\ 2b &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \end{aligned}$$

$$9x^2 + 9x - 6 = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$2x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$$

$$\sqrt{56} = 7.8$$

$$x^2(2x^2 - 4x - 5) = 0$$

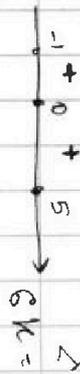
$$D = 16 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 16 + 40 = 56$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \quad x_3 = \frac{4 - \sqrt{56}}{4}$$

$$x_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \quad x_3 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$7.5 =$$

$$\frac{\sqrt{56}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$



$$\begin{aligned} a &= 6 \\ 6 &= 6 + 2b \Rightarrow b = -3 \\ 6 &= 6 + \end{aligned}$$

$$6k = 9x^2 + 9x - 6 = 3(3x^2 + 3x - 2)$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$36 + 4 \cdot 4 \cdot 3 =$$

$$\begin{aligned} 2k &= 3x^2 + 3x - 2 \\ 4k &= 6x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

$$4k = 6 \cdot \left(x + \frac{3 - \sqrt{33}}{6}\right) \left(x + \frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} 4k &= (5x - x^2)(x^2 + x) \\ 4k &= (3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x) \\ 4k &= (x^2 - 2x)(x + 1) \\ 2k &= (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x \\ 2k &= x^4 + 4x^2 - 4x^3 + 9x - 6 \end{aligned}$$

$$4k = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$16 - 4 \cdot 8 + 4 = 12 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-6 + 2\sqrt{33}}{12} \\ x_2 &= \frac{-6 - 2\sqrt{33}}{12} \end{aligned}$$

$$a = 6 - 9x$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 1)(x^2 - 4x) = 2x^2 + 4 \\ &= (6 - 9x) \cdot x \\ &= 4x^2(x^2 + 1) - 4x^3(x^2 + 1) + 2x - 4 \end{aligned}$$

$$9x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4$$

$$a =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and equations, including:

- Top left:** A diagram of a triangle with vertices labeled 1, 2, 3 and points x, y, z. Equations include  $x=4$ ,  $4+1+6=4$ ,  $4 \cdot 16 - 31 \cdot 4 - 9 + 4 \cdot 8 + 20 \cdot 2$ , and  $(x-y)(z+y) = 2x+4-2y$ .
- Middle left:** Algebraic manipulations involving  $b$  and  $g$ , such as  $b^2 - 9b + 18 = 18 + 3b$  leading to  $b = 12$ . It also shows  $BC^2 = 6^2 + 12^2 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$ .
- Middle right:** A diagram of a triangle with side lengths 18 and 9. Equations include  $16 = 18 - 18 \cos \alpha$  and  $\cos \alpha = \frac{1}{9}$ .
- Bottom left:** A diagram of a triangle with side lengths 19, 3, and 30. Equations include  $19 \cdot 3 - 30 \cdot 3 = 5\sqrt{5} - 5 + 1 = (5\sqrt{5} - 1)^2$ .
- Bottom right:** A diagram of a triangle with side lengths 13, 14, and 15. It includes a polynomial long division: 
$$\begin{array}{r} X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X - 4 \\ X-1 \phantom{+ 3X^2 + 3X^2} \\ \hline X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \\ X^3 - 3X^2 + 3X^2 \\ \hline -3X^3 + X^2 + 6X - 4 \\ -3X^3 + 3X^2 \\ \hline -2X^2 + 6X - 4 \\ -2X^2 + 2X + 4 \\ \hline 4X - 8 \\ 4X - 4 \\ \hline -4 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{9 - b^2} \cdot 4 + 5x - y^2 \geq 0$$

$$7 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 7$$

$$6 - 9x$$

$$a^2 = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$a^2 = \dots$$

$$x + 2 = \dots$$

$$a^2 = 9 - b^2$$

$$b^2 = 9$$

$$a^2 \geq dx$$

$$\frac{x+2}{2} \geq \frac{dx}{x+2} \Rightarrow y \geq dx \geq 0 \Rightarrow y - dx \geq 0$$

$$\frac{x+2}{2} \geq \frac{dx}{x+2}$$

$$\frac{x+2}{2} \geq 4x$$

$$2 \geq 3x$$

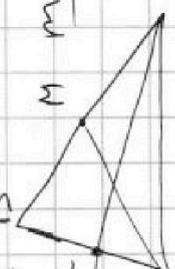
$$m, n > 1$$

$$y - dx \geq 0$$

$$y = \frac{x+2}{2}$$

$$y - dx \geq 0$$

$$y = \frac{x+2}{2}$$



$$(7 - m + n)(m + n) = (m^2 + n^2) + mn$$

$$m^2 + n^2 + mn = 32^2 = 1024$$

$$m^2 + n^2 + mn = 1024$$

