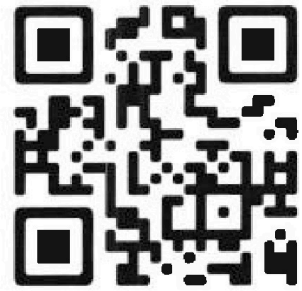




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



- [3 балла] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
- [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: B_1, B_2, \dots, B_{23} так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: A_1, A_2, \dots, A_{17} так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$?
- [4 балла] $АН$ – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB . Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $АН = МК$, и $AK = 5$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 240$.
- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O , а AA_1 , BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1 , если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

124

$$4x^2 - (4a + 8)x + (a^2 + 4a) = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a^2 + 4a \\ x_1 + x_2 = 4a + 8 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = a^2 + 4a \\ 6x_2 = 4a + 8 \Rightarrow a = 1,5x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x_2^2 &= (1,5x_2 - 2)^2 + 6x_2 - 8 \\ 5x_2^2 &= 2,25x_2^2 + 4 - 6x_2 + 6x_2 - 8 \\ 2,75x_2^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - (a + 2)x + \left(\frac{a^2}{4} + a\right) = 0$$

по Т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} + a \\ x_1 + x_2 = a + 2 \\ x_1 = 5x_2 \leftarrow \text{из условия} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2^2 = \frac{a^2}{4} + a \\ 6x_2 = a + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x_2^2 = a^2 + 4a \\ a = 6x_2 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x_2^2 = 36x_2^2 + 4 - 12x_2 + 24x_2 - 8 \\ 16x_2^2 + 12x_2 - 4 = 0 \\ 4x_2^2 + 3x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-3+5}{8} \\ x_2 = \frac{-3-5}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0,25 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0,25 \\ a = 6 \cdot 0,25 - 2 = -0,5 \\ x = -1 \\ a = -6 - 2 = -8 \end{cases}$$

Ответ: $-0,5$; -8 ;

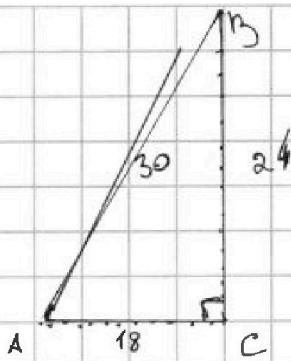
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

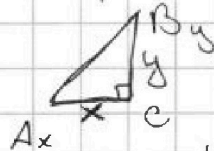
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $30^2 = 5.6$
 $24^2 = 4.6$
 $18^2 = 3.6$

и $5, 4, 3$ - Пифагорова тройка, то $\triangle ABC$ - прямоугольный

2) рассмотрим \triangle , ~~с вершиной~~
 одна вершина которого - C



$0 \leq x \leq 18$
 $0 < y \leq 24$

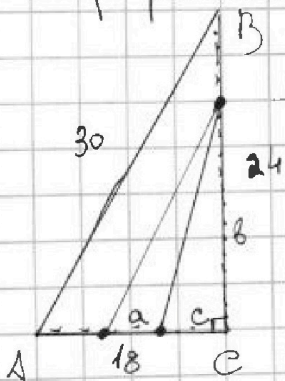
и $\frac{x^2 + y^2}{2} = 11$

$xy \leq 22$

Т.к. $22 : 2$
 $22 : 11$
 $22 : 1$
 $22 : 22$

то $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 11 \\ y \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 22 \end{cases}$ $x \neq 22$ т.к. $22 > 18$
 всего 3

3) теперь рассмотрим фигуру границами $\triangle ABC$ одной вершиной на отрезке BC



можно \triangle : $\frac{(a+c)b}{2} - \frac{bc}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{ab}{2}$

при этом $0 < a \leq 18$ и $\frac{ab}{2} = 11$
 $0 < b \leq 24$
 $ab = 22$

т.к. $22 : 1$; $22 : 22$; $22 : 2$; $22 : 11$

то $\begin{cases} a \leq 1 \\ b \leq 22 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 11 \\ b \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq 2 \\ b \leq 11 \end{cases}$

на отрезке AC, отрезки (а можно) разместим:
 17 вариантов 7 вариантов 16 вариантов

всего 40



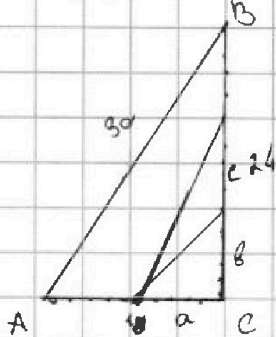
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12) продолжение.



рассматриваем Δ с вершиной B и основанием AC

$$S_{\Delta} = \frac{a(b+c)}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{ac}{2}$$

$$ac = 22$$

т.к. $22:1; 22:22; 22:2; 22:11$

$$\begin{cases} 0 < a < 18 \\ 0 < c \leq 24 \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} a \leq 1 & a \leq 2 & a \leq 11 \\ c \leq 22 & c \leq 11 & c \leq 2 \end{cases}$$

~~вариантов~~ вариантов

(размещений:)

2 варианта 13 вариантов 22 варианта

всего 37 вариантов

в итоге получается $37 + 3 + 40 = 80$

Ответ: 80

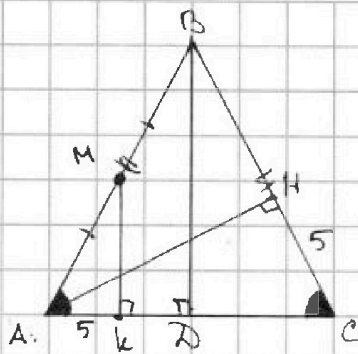


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) т.к. $\triangle ABC$ $AB=BC$, то $\angle A = \angle C$
 2) $\triangle AMK \cong \triangle CHH$ - прямоугольные,
 по углу α и катету $AK=HC=5$
 и $AM=AC$
 т.к. $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$, то
 $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$

2) ~~по теореме $\angle A = \angle C$~~

~~$\angle B = 90^\circ$ ($\triangle ABC$, $\triangle HAC = 90^\circ$)~~

~~$\triangle ABC$ $\angle HAC = 90^\circ - \alpha$; $\triangle ABC$, $\angle AHC = \alpha = 90^\circ + \alpha = 2\alpha - 90^\circ$;
 $\angle AHC$, $\angle B = 90^\circ - \angle BAH = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 180^\circ - 2\alpha$~~

3) проведем $BD \perp AC$

$\triangle AMK$ и $\triangle ABD$ по углу α (прямоугольные)

знаем $\frac{AK}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; $AD = 10$

т.к. $\triangle ABC$ $AB=BC$ то BD - высота, медиана и биссектриса

знаем $AC = 2AD = 20$

и $AB=BC=40$

4) $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 20 + 40 \cdot 2 = 100$

Ответ: 100



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

$$M = \{n; n+1; n+2; n+3; n+4\} \quad n \geq 0$$

Вариантов разложения этих чисел на катеты: 5
может быть 5 сумм: a, b, c, d, e:

$$a \leq n + n+1 + n+2 + n+3 = 4n+6$$

$$b \leq n + n+1 + n+2 + n+4 = 4n+7$$

$$c \leq n + n+2 + n+3 + n+4 = 4n+9$$

$$d \leq n + n+1 + n+3 + n+4 = 4n+9$$

$$e \leq n+1 + n+2 + n+3 + n+4 = 4n+10$$

или же из этих сумм - в порядке убывания

вариантов разложения по две суммы: 10

$$(4n+6)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+6)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+8)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+7)^2 \leq 240$$

$$(4n+9)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+9)^2 \leq 240$$

$$(4n+10)^2 - (4n+8)^2 \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+13) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+14) \leq 240$$

$$4 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+16) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+15) \leq 240$$

$$3 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+17) \leq 240$$

$$1 \cdot (8n+19) \leq 240$$

$$2 \cdot (8n+18) \leq 240$$

$$8n = 227$$

$$8n = 65$$

$$8n = 106$$

$$8n = 44$$

$$8n = 104$$

$$8n = 137$$

$$8n = 63$$

$$8n = 223$$

$$8n = 222$$

$$8n = 102$$

$$n \leq 28,5$$

$$n \leq 8,125$$

$$n \leq 23,25$$

$$n \leq 5,5$$

$$n \leq 13$$

$$n \leq 17,1$$

$$n \leq 7,875$$

$$n \leq 27,8$$

$$n \leq 27,75$$

$$n \leq 12,75$$

Т.к. n - натуральное, то оно должно быть целым
поэтому $n \leq 13$

$$\text{может } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



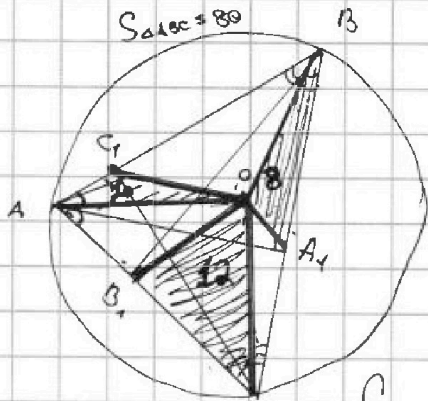
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№51



1) $OA = OB = OC = R$ \wedge AA_1, BB_1, CC_1 — высоты,
~~но $\triangle A_1OC = \triangle C_1OA$~~
 но $\triangle A_1OC = \triangle C_1OA$
 $\triangle B_1OC = \triangle C_1OB$
 $\triangle A_1OB = \triangle B_1OA$

поэтому

$$S_{\triangle A_1OC} + S_{\triangle C_1OA} + S_{\triangle B_1OC} + S_{\triangle C_1OB} + S_{\triangle A_1OB} + S_{\triangle B_1OA} = S_{\triangle ABC}$$

$$2S_{\triangle A_1OB} + 2S_{\triangle B_1OC} + 2S_{\triangle C_1OA} = S_{\triangle ABC}$$

$$80 = 2S_{\triangle A_1OB} + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 12$$

$$S_{\triangle A_1OB} + 20 + 12 = 40$$

$$S_{\triangle A_1OB} = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
14 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 & (1) \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 2ab^2 - 4 = 0 \\ b^3 - 3a^2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 2ab^2 - 4 = 0 \\ b^3 - 3a^2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{a^3 - 4}{2a}$$

$$b^2 = \frac{a^3 - 4}{2a}$$

$$b = \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}}$$

$$\frac{a^3 - 4}{2a} \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} - 3a^2 \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} = 8$$

$$\sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (a^3 - 6a^2) = 16a$$

$$-4 - 5a^3 = 16a \sqrt{\frac{2a}{a^3 - 4}}$$

возведем (2) на (1)

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8 + 3ab}{4 + 2ab}$$

$$4b^2 + 2ab^3 = 8a^2 + 3a^3b$$

$$4(b^2 - 2a^2) = ab(3a^2 - 2b^2)$$

возведем в

$$4\left(\frac{a^3 - 4}{2a} - 2a^2\right) = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (3a^2 - \frac{a^3 - 4}{a})$$

$$-6a^3 - 8 = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2a^3 - 4)$$

$$3a^3 + 4 = a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)$$

$$\frac{a \sqrt{\frac{a^3 - 4}{2a}} (2 - a^3)}{3a^3 + 4} = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \\ a^3 = 4 \\ a^3 = 2 \\ 3a^3 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ a = \sqrt[3]{2} \\ a \neq \sqrt[3]{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = 0 \\ a = \sqrt[3]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

I $2q^2 = a$

II $2q^2 + 2q = b$ т.к. $q \geq 0$, то $\Rightarrow c \leq a \leq b \leq 100$

III $2q^2 - q = c$ и $q \leq 100$

значит для минимальных затрат надо, чтобы III выполнялся как можно меньше, а I — как можно больше.

I можно выполнить только 100

значит, чтобы для III осталось как можно меньше, II можно выполнить максимальное количество, т.е. 100.

тогда для III осталось 50.

Ответ:
1: 100
2: 100
3: 50



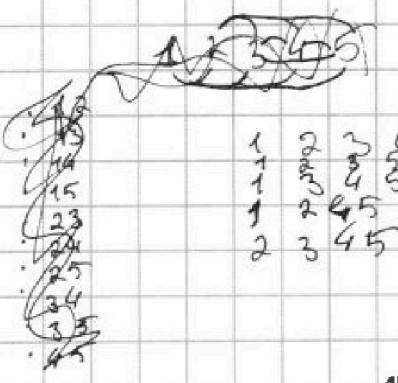
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 170 \overline{) 31} \\ 155 \quad 0,54838 \\ \hline 150 \\ 124 \\ \hline -260 \\ \quad 248 \\ \hline \quad 120 \\ \quad \quad 93 \\ \quad \quad \quad 270 \\ \quad \quad \quad \quad 848 \end{array}$$



(1 2 3 4 5)

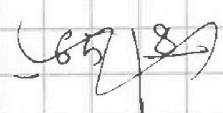
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	3	4	5	

$$\begin{array}{r} 12 \quad 23 \quad 34 \quad 45 \\ 13 \quad 24 \quad 35 \\ 14 \quad 25 \\ 15 \\ \hline 27 \quad 31 \\ 186 \quad 0,677 \\ \hline 240 \\ 214 \\ \hline 230 \\ 217 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 227 \overline{) 8} \\ 16 \quad 28,47 \\ \hline 67 \\ 64 \\ \hline 30 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -57 \end{array}$$

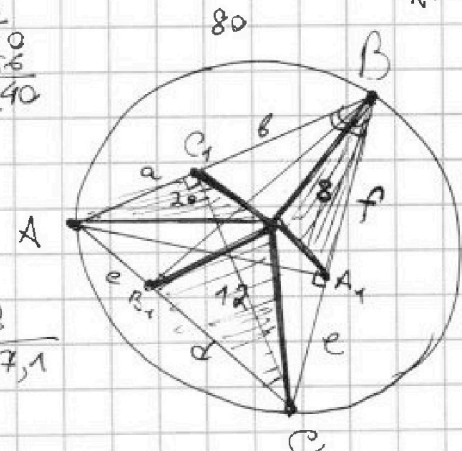
8,125

$$\begin{array}{r} 222 \overline{) 8} \\ 16 \quad 27,75 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \end{array}$$



1, 2, 3, 7, 4, 5

$$\begin{array}{r} 106 \overline{) 8} \\ 8 \quad 23,25 \\ \hline 26 \\ 20 \\ \hline 16 \\ -10 \\ \hline 40 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 104 \overline{) 8} \\ 8 \quad 13 \\ \hline 24 \\ \hline 223 \overline{) 8} \\ 16 \quad 27,8 \\ \hline 63 \\ -56 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \overline{) 8} \\ 8 \quad 17,1 \\ \hline 57 \\ -56 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \overline{) 8} \\ 8 \quad 12,75 \\ \hline 22 \\ 16 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} a^3 - 4a^2 + a^3 \\ \hline 2a^2 \\ \hline -6a^2 - 8 \\ \hline a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a^3 - a^2 + 4 \\ \hline 2a^3 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 260 \overline{) 31} \\ 248 \quad 0,838709 \\ \hline 120 \\ 93 \\ \hline 270 \\ -248 \\ \hline 220 \\ 217 \\ \hline 200 \\ 217 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \times (9a^6 + 16 + 4a^3) = a^3 (a^3 - 4)(4 + a^6 - 4a^3)$$

$$\begin{array}{r} 4 - 4 \\ \hline 2 \quad 356 \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \quad 352 \end{array}$$