



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возьмем q^i уравнение геометрической прогрессии, a_i - i-й член прогрессии. Члены умножаются в единой системе

$$\left\{ \begin{array}{l} a_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ a_5 = x+3 \\ a_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_9 = x+3 \\ \frac{a_9}{a_7} = \sqrt{\frac{a_9}{a_7}} = \sqrt{\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}} \\ \frac{a_{15}}{a_9} = \sqrt{\frac{a_{15}}{a_9}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}}{x+3}} \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

можно умножить одно уравнение на другое, так как члены геометрической прогрессии не равны нулю.

Так как $\frac{a_i}{a_j} = q^{i-j}$, то преобразуем уравнения (1) и (2):

$$(1): q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$(2): q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{(25x-9)(x-6)}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

из уравнения (1) $q^8 = \frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2 \cdot (x-6)^2}$ из этого получим, что

$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1$$

$$\left(\frac{(x+3)^2}{25x-9} \right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{25x-9} = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$\text{или } \frac{(x+3)^2}{25x-9} = -1$$

$$x^2 + 6x + 9 = -25x + 9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 18 = 361 - 72 = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = 17$$

$$x_1 = \frac{19 - 17}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{19 + 17}{2} = 18$$

$$x^2 + 31x = 0$$

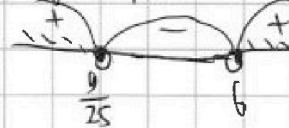
$$x(x + 31) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -31$$

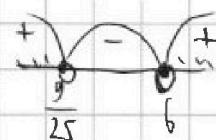
Теперь рассмотрим целочисленность полученных выражений для коэффициентов полиномиального (так как $a_i \neq 0$)

$$(25x - 9)(x - 6) \geq 0$$

наибольший интервал



$$\text{и } \frac{25x - 9}{(x - 6)^3} \geq 0$$



Учтем $x < \frac{9}{25}$ или $x > 6$, называем "ненулевые решения"

или $x = 2$ не подходят

$$\text{Для } x = 18 \quad a_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)} \quad \text{Для } x = 6 \quad a_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} =$$

$$= \sqrt{9(50 - 1) \cdot 12} = 21 \cdot \sqrt{12} = 42\sqrt{3} \quad a^5 = 21 \quad \text{и}$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{21}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}. \quad \text{Приходит тройка}$$

$$\text{и } q = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}, \text{ первый член равен } \frac{a_7}{q^6}.$$

$$\text{Для } x = 0 \quad a_7 = \sqrt{(-9) \cdot (-6)} = 3\sqrt{6} \quad ; \quad a_5 = 3 \quad ; \quad a_{15} = \sqrt{\frac{9}{(-6)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{3}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}. \quad \text{Последний прогрессия } (q = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}),$$

$$a_7 = \frac{a_5}{q^6}. \quad \text{Для } x = -31 \quad a_7 = \sqrt{(-31 \cdot 25 - 9) \cdot (-31 - 6)} = \sqrt{8285}$$

$$= \sqrt{784 \cdot 37} = 2 \cdot 14 \cdot \sqrt{37}, \quad a_5 = -28; \quad a_{15} = \sqrt{\frac{-784}{(-37)^3}} = \sqrt{\frac{784}{37^3}} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{15} = \sqrt{\frac{164}{37^3}} = \frac{2\sqrt{14}}{37} \cdot \sqrt{\frac{1}{37}} . \quad \text{Действия правильны с } q =$$

Мы же имеем $\frac{a_3}{q^2} < 0$, то $q^2 < 0$, что невозможно.

Ответ: 0; 18.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 4z + 4 = 2\sqrt{y-4x-4z+2} & |1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{1-z^2} & |2) \end{cases}$$

Изолируем модули в первом в уравнении (2) и решаем

1) при $y \in (-\infty; -4]$, то $y+4 \leq -4$ и $-4y+20 = \sqrt{81-z^2}$

$$-5y+16 = \sqrt{81-z^2}$$

$$\text{тогда } \sqrt{81-z^2} \leq 9, \text{ то } 0 \leq -5y+16 \leq 9$$

$$-16 \leq -5y \leq -7$$

$$\frac{16}{5} \geq y, y \geq \frac{7}{5}$$

Тогда $y \in [-\infty; -4] \cap [\frac{7}{5}; \infty)$

Этих чисел решений уравнения нет и не имеем
решений в системе

2) $y \in [-4; 5]$, то $y+4 \geq -4$ и $-4y+20 = \sqrt{81-z^2}$

$$0 \leq -3y+24 \leq 9$$

$$-24 \leq -3y \leq -15$$

$$8 \geq y \geq 5$$

единственное решение в этих числах при $y=5$. Тогда

$$|y+4| + 4|5-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$9 = \sqrt{81-z^2}$$

$$z=0$$

3) $y \in [5; +\infty)$ $y+4 + 4y-20 = \sqrt{81-z^2}$

$$0 \leq 5y-16 \leq 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq 5y - 16 \leq 9$$

$$16 \leq 5y \leq 25$$

$$\frac{16}{5} \leq y \leq 5$$

Заметим единственное значение при $y = 5$. Уравнение не проверяется.

Измак, уравнение (2) имеет 1 решение: $y = 5, z = 0$.

Проверка это в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 4 \cdot 0 + 4 = 2\sqrt{5 - 4x - x^2} + 0$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2 - 4x + 5}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)} \quad \text{также}$$

При таком же 0 из $x+5 \geq 0$ и $1-x \geq 0$, то $\sqrt{(1-x)(x+5)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{2+x}$

$$\sqrt{x+5} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 4$$

~~$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 4$$~~

важно! Убедиться в корректности полученных выражений

~~$$x+5 = \sqrt{1-x} - 4$$~~

замена $\sqrt{1-x} = t$ тогда $1-x = t^2$, $x+5 = -t^2 + 6$

$$\sqrt{-t^2 + 6} - 2t \sqrt{-t^2 + 6} = t - 4$$

$$\sqrt{-t^2 + 6} = \frac{t - 4}{1 - 2t}$$

$$\begin{cases} \frac{t - 4}{1 - 2t} \geq 0 \\ \frac{(t - 4)^2}{(1 - 2t)^2} = -t^2 + 6 \end{cases}$$

решим уравнение (3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(t-4)^2}{(1-2t)^2} = -t^2 + 6$$

$$\frac{t^2 - 8t + 16}{1 + 4t^2 - 4t} = -t^2 + 6$$

$$\frac{t^2 - 8t + 16}{4t^2 - 4t + 1} + \frac{(t^2 - 6)(4t^2 - 4t + 1)}{4t^2 - 4t + 1} = 0$$

$$\frac{t^3 - 8t + 16 + 4t^4 - 4t^3 + t^2 - 24t^2 + 24t - 6}{4t^2 - 4t + 1} = 0$$

$$\underline{4t^4 - 4t^3 - 18t^2 + 16t + 10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Неравенство от k и p : $k \geq 0$

$$\sqrt[3]{p-1} \geq 0$$

$$p-1 \geq 0$$

$$p \geq 1$$

$$k \leq -2$$

$$\sqrt[3]{p-1} \leq -2$$

$$p-1 \leq -8$$

$$p \leq -7$$

$$k=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{p-1} = 0 \Leftrightarrow p=1$$

Система неравенств: $\begin{cases} k \geq 0 \\ p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -8 \end{cases}$

$$\text{решение: } p=1, \text{ при } x=2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Система неравенств:

Условие: если $p=1$, то $x=2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

если $p \in (-\infty; -7] \cup (1; +\infty)$, то $x \neq 0$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x\right)^3 + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x + \cos x - 1\right) \left(\left(\sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x\right)^2 - \sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x \cdot (\cos x - 1) + (\cos x - 1)^2\right) = 0$$

Используем формулу суммы кубов

Убираем $\sqrt[3]{p-1}$ как за k.

$$k \cdot \cos x + \cos x - 1 = 0 \quad \text{или } (k \cdot \cos x)^2 - k \cdot \cos x \cdot (\cos x - 1) + (\cos x - 1)^2 = 0$$

Делим на 2 случая:

$$1) \cos x (k+1) = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{k+1}$$

рассмотрим когда в матче когда $|k+1| \geq 1$, т.е.
тогда $|\cos x| \leq 1$, то есть когда $\begin{cases} k+1 \geq 1 \\ k+1 \leq -1 \end{cases} \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq -2 \end{cases}$

$$2) \text{Матче } x = \pm \arccos \frac{1}{k+1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) k^2 \cdot \cos^2 x - k \cdot \cos^2 x + k \cdot \cos x + \cos^3 x - 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x \cdot (k^2 - k + 1) + \cos x \cdot (k - 2) + 1 = 0$$

$$D = (k-2)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^2 - 4k + 4 - 4k^2 + 4k - 4 =$$

$$= -3k^2 \quad \text{также } k \neq 0, \text{ т.е. } D < 0 \text{ и решений нет.}$$

$$\text{таким } k=0, \text{ т.е. } D=0$$

$$\cos x = \frac{2-k}{2k^2 - 2k + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

таким, что для этого $k=0$ существует
матче решить в первом случае. Для решения
 $\cos x = 1$ т.е. $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1$
матче не име
второй



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \cos x - \\ &- 2 \sin x \cdot \cos x = 4 \cos x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - 4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = \\ &= \cos x - 4 \cos x + 4 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3 \cdot p \cos x + 12 \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x + 6 - 10 = 0$$

~~$$4(p \cos^3 x - 1) + 12 \cos x (1 - \cos x) = 0$$~~

~~$$= 4(\cos^3 x + (p-1)\cos^3 x - 1) - 12 \cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$$~~

~~$$p \cos^3 x + 3 \cos x - 3 \cos^2 x - 1 = 0$$~~

~~$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$~~

Замена переменной: $\cos x = t$

~~$$(3\sqrt[3]{p} \cdot t)^3 - 1^3 + 3 \cos x (1 - \cos x)$$~~

~~$$(p-1) \cdot \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$~~

~~$$(p-1) \cdot \cos^3 x + \cos^3 x - 1 + 3 \cos x (1 - \cos x) = 0$$~~

~~$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1) - 3 \cos x (\cos x - 1) = 0$$~~

~~$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0$$~~

~~$$(p-1) \cdot \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\text{m}\angle \text{AEC} = \angle \text{EBA}$, при этом углы сумма 180° (степени) \Rightarrow
 $\Rightarrow \text{AB} \parallel \text{EC}$

I-

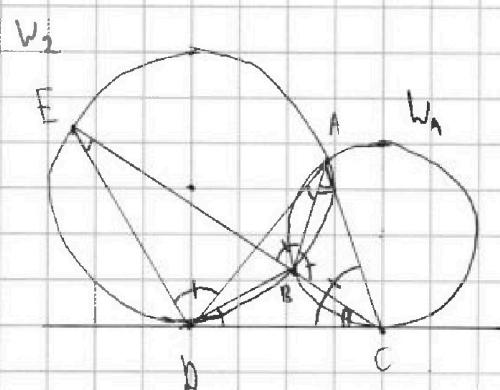
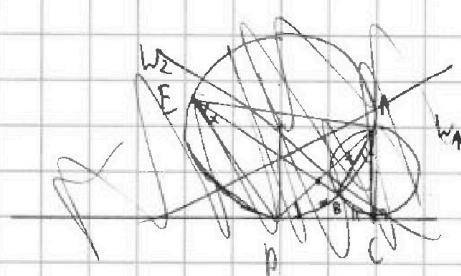
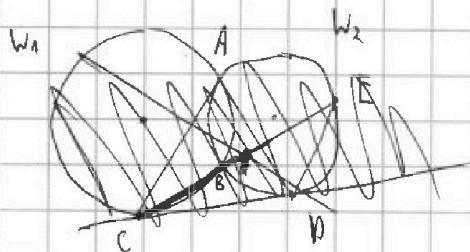


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \angle DEB = \alpha.$$

$$\angle EDC: \angle EDC = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle EDA = 180^\circ - \alpha - \beta - \angle ADC = 180^\circ - \alpha - \beta - (180^\circ - \alpha - \beta - \angle ACD) =$$

$$= \angle ACD$$

$$\angle EPA = \angle EBA \text{ (вписанные в } W_2).$$

$$\angle ACD \text{ - угол между вспомогательной и круговой} \Rightarrow \angle ACD = \angle ABC.$$

угл ABC
↓

~~$$\angle DBC < \angle BCA$$~~

~~$$\angle DBC$$~~

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 + \beta + 180^\circ - \alpha - 2\beta =$$

$$= 180^\circ - \alpha - \beta$$

~~$$\angle PBF + \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta - \delta$$~~

~~$$\angle APB = \angle ACP = \alpha + \beta - \gamma$$~~

~~$$\angle EBC = \angle A$$~~

Таким $\angle DAB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$.

Тогда $\angle BDC = \alpha$ как угол между вспомогательной и круговой,

$\angle BCD = \beta$ (также угол между вспомогательной и круговой).

$\angle DEB = \angle BAD$ (вписанные) \Rightarrow

угл ABC
↓

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

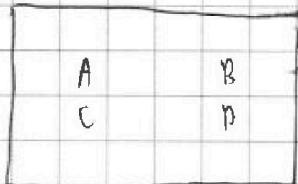
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого из трех видов империй имелось
разделение на $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$ пар, каждая из которых
пары симметричны друг другу. Поэтому, судя по имеющимся
номерам из видов империй (4 ⁴ ~~империя~~
 20000 , то есть из 20000 пар
выбрано 4 пары симметричные.

Значит, что если имеется однажды империя с четырьмя
империями, то одна из которых из средних четырех, то в этом
империи все четные разделяются на 2 группы по 4 пар-



и, следовательно 2 симметричные
империи из которых каждая из которых
имеет пару, которая однажды подразумевает

получение четвертой промежуточной симметрии в четырех
противоположных. Например, если в четырех парах
империи A, то пары пары в империи B, а также пары
империи в империи B и (также империи B) избрана из средних
четырех пар империй A и B (не изображены симметрические)

Таким образом имеется империя и противоположная империя



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, если множество симметрично относительно двух средних линий, то симметрично и относительно четырех (две верхней вершины $A \Rightarrow$ группировка R_A (\Rightarrow группировка R) и разбивается на 2 группы по 4 членам.

Итак, если множество однажды имеет две группы симметрии, то однажды и третью. Третья группа симметрии обозначим C_{10000}^2 множеством, так как она наименее возможного множества подгрупп содержит 2 из существующих 10000 групп по 4 членам.

При симметризации способов составления множества с четырьмя симметриями, мы учитываем множества с тремя симметриями 3 ряда, а не второго! Третий ряд способов $3C_{20000}^4$

$$3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2 = 80000! / (4!)^3 \quad 10000! / (2!)^4$$

$$\Leftrightarrow 3 \text{ видим: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + b = 710$$

$$710 \equiv 2 \pmod{3}$$

так как $a \equiv 1 \pmod{3}$, то $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (b-a) : 3$, что невозможно. Тогда $a \equiv 0 \pmod{3}$ или $a \equiv 2 \pmod{3}$
 $(a-c)|(b-c)$ - квадрат простого числа p , тогда $a-c=p$ и
 $b-c=p$; или $a-c=-p$ и $b-c=-p$; или $a-c=1$ и $b-c=p^2$;
или $a-c=p^2$ и $b-c=1$; или $a-c=-p^2$ и $b-c=-1$; или
 $a-c=-1$ и $b-c=-p^2$. Первые 2 случая не подходят, так
как $a+b$ не четные. Рассмотрим оставшиеся 4 случая:

$$1) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} a=c+1 \\ a-b=1-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=c+1 \\ b-a=p^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=a-1 \\ b-a+1=p^2 \end{cases}$$

ищем чётные решения этого и только этого, когда $b-a+1$ - квадрат
числа

$$2) \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a=1-p^2 \\ c=b-1 \end{cases}$$

$b-a < 0$, что противоречит условию $a > b$

$$3) \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a=p^2-1 \\ c=b+1 \end{cases}$$

ищем решения этого и только этого, когда $b-a+1$ - квадрат
числа, когда $b-a+1$ - квадрат простоделитель

$$4) \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a=-p^2+1 \\ c=b+p^2 \end{cases}$$

$b-a < 0$, что противоречит условию $a > b$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чёрновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число, удовл. $(a-1)(b-1) = p^2$ ~~некоторым~~ удовл.

$$b-a+1 = p^2$$

Если $a \equiv 2 \pmod{3}$, то $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $b \equiv 1 \pmod{3}$

$b-a+1 \equiv 1-2+1 \equiv 0 \pmod{3}$. Тогда $p^2 \mid 3$, что ~~невозможно~~

Число, удовл. ~~или~~ $a \equiv 1 \pmod{3}$ ~~некоторым~~, тогда $p \mid 3$.

Такое n — простое число, то $p=3$. Если $a \equiv 0 \pmod{3}$, то $b \equiv 2 \pmod{3}$, $b-a+1 \equiv 2-0+1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$,

$$\begin{cases} b-a+1=9 \\ a^2+b=710 \end{cases} \quad \begin{cases} b=8+a \\ a^2+8=710 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): a^2+a-702=0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809 \quad \sqrt{D} = 53$$

$$a = \frac{-1-53}{2} = -27 \quad \text{или} \quad a = \frac{-1+53}{2} = 26$$

$$b = -27+8 = -19$$

$$b = 26+8 = 34$$

$$c = a-1 = -28 \quad \text{или} \quad c = b+1 = -18 \quad (2) \quad c = a-1 = 25 \quad \text{или} \quad c = b+1 = 35$$

$$\text{Проверка: } (-27-(-28)) \cdot (-19-(-28)) = 9 = 3^2$$

$$(-27-(-18)) \cdot (-19-(-18)) = 9 = 3^2$$

$$(26-25) \cdot (34-25) = 9 = 3^2$$

$$\text{Все решения отвечают и на 3 неравенства рассмотрения}$$

(решения: все пары $(-27; -19; -28); (-27; -19; -18); (26; 34; 25); (26; 34; 35)$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 + 25 \\
 \hline
 62 \\
 + 155 \\
 \hline
 217 \\
 + 775 \\
 \hline
 992 \\
 - 787 \\
 \hline
 215 \\
 - 38 \\
 \hline
 177 \\
 - 36 \\
 \hline
 141 \\
 - 24 \\
 \hline
 117
 \end{array}$$

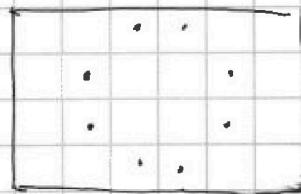
$$\begin{aligned}
 & 2x - 5 & & \begin{array}{r}
 53 \\
 + 53 \\
 \hline
 106
 \end{array} \\
 & 1 - x - 4z \geq 0 & & + 265 \\
 & x + 4z \leq 1 & & \hline
 & 81 - z^2 \geq 0 & & 2819 \\
 & (5-z)(9+z) \geq 0 & & \\
 & \begin{array}{c} \nearrow \\ -y \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ y \end{array} & & z \in [-9, 5]
 \end{aligned}$$

Если $y \in (-\infty, -4]$, то

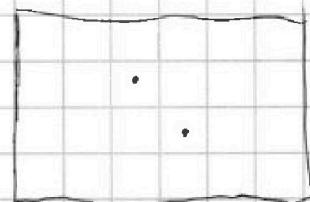
$$4000 \cdot 100 = 400000$$

200000 мэр

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 20000 + 20000 + 20000 \\
 3 \cdot 20000 - 25000.9999 \\
 \hline
 20000
 \end{array}$$



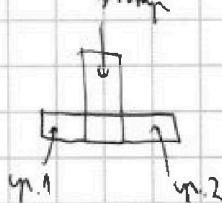
(2)
8



$$20000 \cdot 19998$$

20000 · 19999

$$\begin{array}{r}
 20000 \cdot 19999 \\
 40000 \cdot 39996 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 10000 \cdot 19999 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 = 5000 \cdot 9999 - \text{бездолг}$$

- 25000.9999