МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x-4z}+4=2\sqrt{y-4x-x^2+z},\\ |y+4|+4|y-5|=\sqrt{81-z^2}.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$p\cos 3x+3(p+4)\cos x=6\cos 2x+10$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2:5$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за q знаменатель геометрической прогрессии, a_i – i-й член прогрессии. Условие записывается в виде системы

$$\begin{cases} a_7 = \sqrt{(25x-9)\cdot(x-6)} \\ a_9 = x+3 \\ a_{15} = \sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_9 = x+3 \\ \dfrac{a_9}{a_7} = \dfrac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} & (1) \\ \dfrac{a_{15}}{a_7} = \sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} & (2) \end{cases}$$

можно делить одно уравнение на другое, так как члены геометрической прогрессии не равны нулю.

Так как $\frac{a_i}{a_j} = q^{i-j}$, то преобразуем уравнения (1) и (2):

(1): $q^2 = \dfrac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$

(2): $q^8 = \sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{(25x-9)(x-6)}}$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

Из уравнения (1) $q^8 = \dfrac{(x+3)^4}{(25x-9)^2\cdot(x-6)^2}$ из этого следует, что

$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1$$

$$\left(\frac{(x+3)^2}{25x-9}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{25x-9} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{(x+3)^2}{25x-9} = -1$$

$$x^2+6x+9 = 25x-9 \qquad x^2+6x+9 = -25x+9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2-19x+18=0$

$D=19^2-4\cdot18=361-72=289$

$\sqrt{D}=17$

$x_1=\frac{19-17}{2}=2 \quad x_2=\frac{19+17}{2}=18$

$x^2+31x=0$

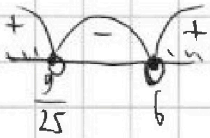
$x(x+31)=0$

$x=0$ или $x=-31$

Теперь рассмотрим необходимость подкоренных выражений быть ~~неотрицательными~~ положительными (так как $a_i\neq0$)

$(25x-9)(x-6)>0$ и $\frac{25x-9}{(x-6)^3}>0$

метод интервалов



Итак $x<\frac{9}{25}$ или $x>6$, поэтому из 4 полученных ранее значений x $x=2$ не подходит.

~~Для $x=18$ $a_7=\sqrt{(25\cdot18-9)}$~~ Для $x=18$ $a_7=\sqrt{(25\cdot18-9)(18-6)}=$ ~~выражение~~ $=\sqrt{9(50-1)\cdot12}=21\cdot\sqrt{12}=42\sqrt3$; $a_9=21$ и

$a_{15}=\sqrt{\frac{25\cdot18-9}{(18-6)^3}}=\sqrt{\frac{9\cdot49}{12^3}}=\frac{3\cdot7}{12}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{21}{12\cdot2}\cdot\frac{1}{\sqrt3}$. Подходит прогрессия с $q=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt3}}$, первый член равен $\frac{a_7}{q^6}$.

Для $x=0$ $a_7=\sqrt{(-9)\cdot(-6)}=3\sqrt6$, $a_9=3$, $a_{15}=\sqrt{\frac{-9}{(-6)^3}}=$

$=\sqrt{\frac{9}{6^3}}=\frac{3}{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2\sqrt6}$. Подходит прогрессия с $q=\sqrt{\frac{1}{\sqrt6}}$,

$a_1=\frac{a_7}{q^6}$. Для $x=-31$ $a_7=\sqrt{(-31\cdot25-9)\cdot(-31-6)}=$

$=\sqrt{784\cdot37}=2\cdot14\cdot\sqrt{37}$, $a_9=-28$; $a_{15}=\sqrt{\frac{-784}{(-37)^3}}=\sqrt{\frac{784}{37^3}}=$

$a_{15} = \sqrt{\frac{784}{37^3}} = \frac{2 \cdot 14}{37} \cdot \sqrt{\frac{1}{37}}$. ~~Подходит прогрессия с $q =$~~

Так как $\frac{a_9}{a_7} < 0$, то $q^2 < 0$, что невозможно.

Ответ: 0; 18.

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \quad (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

Раскроем модули ~~во~~ в выражениях в уравнении (2) в трёх случаях.

1) Если $y \in (-\infty; -4]$, то ~~уп~~ $-y-4 - 4y + 20 = \sqrt{81-z^2}$

$-5y + 16 = \sqrt{81-z^2}$

так как $0 \le \sqrt{81-z^2} \le 9$, то $0 \le -5y + 16 \le 9$

$-16 \le -5y \le -7$

$\frac{16}{5} \ge y \ge \frac{7}{5}$

Тогда y не принадлежит $(-\infty; -4]$ и ~~тогда~~ в этом случае ~~решений~~ ~~уравнение~~ решений не имеет уравнение и система

2) $y \in [-4; 5]$, то $y+4 - 4y + 20 = \sqrt{81-z^2}$

$0 \le -3y + 24 \le 9$

$-24 \le -3y \le -15$

$8 \ge y \ge 5$

Единственное решение в этом случае при $y = 5$. Тогда

$|5+4| + 4|5-5| = \sqrt{81-z^2}$

$9 = \sqrt{81-z^2}$

$z = 0$

3) $y \in [5; +\infty)$ $\quad y+4 + 4y - 20 = \sqrt{81-z^2}$

$0 \le 5y - 16 \le 9$

$0 \le 5y - 16 \le 9$

$16 \le 5y \le 25$

$\frac{16}{5} \le y \le 5$

Решение ~~единственное~~ только при $y=5$. Уже рассмотрели.

Итак, уравнение (2) имеет 1 решение: $y=5$, $z=0$.

Подставим это в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4\cdot 0} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2-4x+5}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$ ~~возведем~~

Так как по ОДЗ $x+5 \ge 0$ и $1-x \ge 0$, то $\sqrt{(1-x)(x+5)} = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+5}$

$$\sqrt{x+5} - 2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 4$$

~~$\sqrt{x+5} = \frac{\sqrt{1-x}-4}{1-2\sqrt{1-x}}$~~ ~~Возведем в квадрат, в конце проверим подставив все полученные значения x~~

~~$x+5 = \frac{1-x+16-8\sqrt{1-x}}{1+4(1-x)-4\sqrt{1-x}}$~~

Замена $\sqrt{1-x} = t$. Тогда $1-x = t^2$, $5+x = -t^2+6$

$$\sqrt{-t^2+6} - 2t\sqrt{-t^2+6} = t-4$$

$$\sqrt{-t^2+6} = \frac{t-4}{1-2t}$$

$$\begin{cases} \frac{t-4}{1-2t} \ge 0 \\ \frac{(t-4)^2}{(1-2t)^2} = -t^2+6 \quad (3) \end{cases}$$

Решим уравнение (3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(t-4)^2}{(1-2t)^2} = -t^2+6$$

$$\frac{t^2-8t+16}{1+4t^2-4t} = -t^2+6$$

$$\frac{t^2-8t+16}{4t^2-4t+1} + \frac{(t^2-6)(4t^2-4t+1)}{4t^2-4t+1} = 0$$

$$\frac{t^2-8t+16+4t^4-4t^3+t^2-24t^2+24t-6}{4t^2-4t+1} = 0$$

$$\frac{4t^4-4t^3-18t^2+16t+10}{\quad}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Вернёмся от k к p: $k \ge 0$ $\qquad$ $k \le -2$

$\sqrt[3]{p-1} \ge 0$ $\qquad$ $\sqrt[3]{p-1} \le -2$

$p-1 \ge 0$ $\qquad$ $p-1 \le -8$

$p \ge 1$ $\qquad$ $p \le -7$

$k=0 \iff \sqrt[3]{p-1}=0 \iff p=1$

~~Ответ: Ответ: если $k=0$, то $x=2\pi n, n\in Z$~~

~~Если Если $p=1$, то $x=2\pi n, n \in Z$~~

Ответ: если $p=1$, то $x=2\pi n$, $n\in Z$

если $p\in(-\infty;-7]\cup(1;+\infty)$, то

$$x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}+2\pi n,\ n\in Z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\left(\sqrt[3]{p-1}\cdot\cos x\right)^3+(\cos x-1)^3=0$ Используем формулу суммы кубов

$\left(\sqrt[3]{p-1}\cdot\cos x+\cos x-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{p-1}\cdot\cos x\right)^2-\sqrt[3]{p-1}\cdot\cos x\cdot(\cos x-1)+\right.$

$\left.+(\cos x-1)^2\right)=0$

Обозначим $\sqrt[3]{p-1}$ ~~как~~ за k.

$k\cdot\cos x+\cos x-1=0$ или $(k\cdot\cos x)^2-k\cdot\cos x\cdot(\cos x-1)+(\cos x-1)^2=0$

Рассматриваем эти 2 случая:

1) $\cos x(k+1)=1$

$\cos x=\frac{1}{k+1}$

решение существует тогда и только тогда, когда $|k+1|\geq 1$, так как $|\cos x|\leq 1$, то есть когда $\left[\begin{array}{l}k+1\geq 1\\k+1\leq -1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}k\geq 0\\k\leq -2\end{array}\right.$

Тогда решение $x=\pm\arccos\frac{1}{k+1}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $k^2\cdot\cos^2x-k\cdot\cos^2x+k\cdot\cos x+\cos^2x-2\cos x+1=0$

$\cos^2x\cdot(k^2-k+1)+\cos x\cdot(k-2)+1=0$

$D=(k-2)^2-4(k^2-k+1)=k^2-4k+4-4k^2+4k-4=$

$=-3k^2$ Если $k\neq 0$, то $D<0$ и решений нет.

Если $k=0$, то $D=0$ Заметим, что ~~вдо~~ при $k=0$ существуют такие решения в первом случае. Это решение

$\cos x=\frac{2-k}{2k^2-2k+2}=\frac{2}{2}=1$ $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\cos x\cdot(0+1)=1$

$\cos x=1$

такое же как и в случае 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p\cos 3x + 3(p+4)\cos x = 6\cos 2x + 10$

$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x = (1-2\sin^2 x)\cdot\cos x -$

$- 2\sin^2 x\cdot\cos x = \cos x - 4\sin^2 x\cdot\cos x = \cos x - 4(1-\cos^2 x)\cdot\cos x =$

$= \cos x - 4\cos x + 4\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$p\cdot(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3\cdot p\cdot\cos x + 12\cos x = 6\cos 2x + 10$

$4p\cdot\cos^3 x + 12\cos x = 6\cdot(2\cos^2 x - 1) + 10$

$4p\cdot\cos^3 x + 12\cos x - 12\cos^2 x + 6 - 10 = 0$

$\cancel{4\cdot(p\cdot\cos^3 x - 1) + 12\cos x(1-\cos x) = 0}$

$\cancel{= 4(\cos^3 x + (p-1)\cos^3 x - 1) - 12\cos x\cdot(\cos x - 1) = 0}$

$\cancel{p\cdot\cos^3 x + 3\cos x - 3\cos^2 x - 1 = 0}$

$p\cdot\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

~~Замена переменной: $\cos x = t$~~

$\cancel{(\sqrt[3]{p}\cdot t)^3 - 1^3 + 3\cos x(1-\cos x)}$

$(p-1)\cdot\cos^3 x + \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

$(p-1)\cdot\cos^3 x + \cos^3 x - 1 + 3\cos x(1-\cos x) = 0$

$(p-1)\cdot\cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1) - 3\cos x(\cos x - 1) = 0$

$(p-1)\cdot\cos^3 x + (\cos x - 1)(\cos^2 x - 2\cos x + 1) = 0$

$(p-1)\cdot\cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$

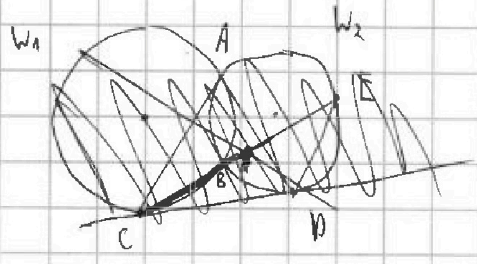
Тогда $\angle ABC = \angle EBA$, при этом их сумма 180° (смежные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp EC$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

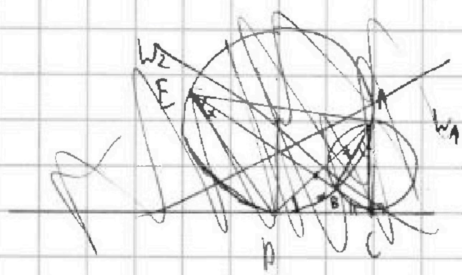


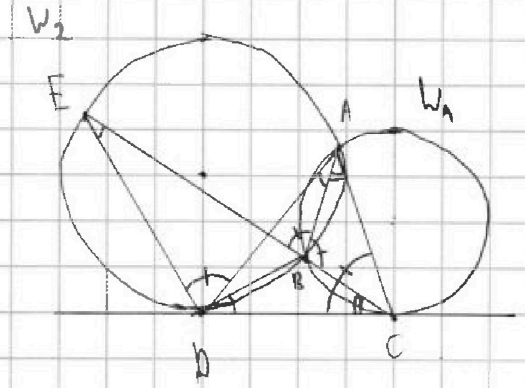
~~$CD^2 = CB \cdot CE$~~

~~$CD^2 =$~~

~~$\alpha + . + \beta + .. = \alpha + \beta + 180 - 2\alpha - 2\beta =$~~

~~$= 180 - \alpha - \beta$~~





Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$.

Тогда $\angle BDC = \alpha$ как угол между касательной и хордой,

$\angle BCD = \beta$ (также угол между касательной и хордой).

$\angle DEB = \angle BAD$ (вписанные) =>

=> $\angle DEB = \alpha$

$\triangle EDC$: $\angle EDC = 180^\circ - \alpha - \beta$

из $\triangle ADC$

$\angle EDA = 180^\circ - \alpha - \beta - \angle ADC = 180^\circ - \alpha - \beta - (180^\circ - \alpha - \beta - \angle ACD) =$

$= \angle ACD$

$\angle EDA = \angle EBA$ (вписанные в W_2).

$\angle ACD$ – угол между касательной и хордой => $\angle ACD = \angle ABC$

Для каждого из трёх видов ~~симметрии~~ симметрии клетки разбиваются на $\frac{100\cdot 400}{2} = 20000$ пар, ~~все~~ клетки каждой пары симметричны друг другу. Поэтому создать множество с каждым из видов симметрии C_{20000}^{4} способов, так как из 20000 пар выбираются 4 закрашенные.

Заметим, что если множество обладает симметрией относительно центра и одной из средних линий, то в этом множестве все клетки разбиваются на 2 группы по 4 клетки, ~~для которых любые 2 симметричны~~

~~например если для каждых каждой из~~ ~~клеток~~ которые ~~образуют прямоугольник~~ углы являются вершинами прямоугольника с центром в центре прямоугольника. Например, если ~~во множестве~~ закрашена вершина A, то закрашена и вершина D, а значит закрашены и вершины B и C (относительно ~~другой~~ любой из средних линий они симметричны A и D) (не обязательно соответственно). Тогда множество симметрично и относительно второй средней линии.

Аналогично, если множество симметрично относительно двух средних линий, то симметрично и относительно центра (закрашена вершина A => закрашены B и C => закрашена D) и разбивается на 2 группы по 4 клетки.

Итак, если множество обладает хотя бы 2 видами симметрии, то обладает и третьим. Тремя видами симметрии обладают C^2_{10000} множеств, так как для получения такого множества необходимо выбрать 2 из существующих 10000 групп по 4 клетки.

При суммировании способов составить множество с ~~одной~~ конкретной симметрией, мы учли множества с тремя симметриями 3 раза, а необходимо 1. Поэтому всего способов ~~$3C^4_{20000}-2$~~

$$3\cdot C^4_{20000} - 2\cdot C^2_{10000} = \cancel{3\cdot\frac{20000!}{19996!\cdot 4!} - 2\cdot\frac{10000!}{9998!\cdot 2!}}$$

Ответ: $3\cdot C^4_{20000} - 2\cdot C^2_{10000}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a^2+b=710$ $\quad 710 \equiv 2 \pmod 3$

Если $a \equiv 1 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, то $b \equiv 1 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow (b-a) \vdots 3$, что невозможно. Поэтому $a \equiv 0 \pmod 3$ или $a \equiv 2 \pmod 3$

$(a-c)(b-c)$ – квадрат простого числа p, тогда $a-c=p$ и $b-c=p$; или $a-c=-p$ и $b-c=-p$; или $a-c=1$ и $b-c=p^2$; или $a-c=p^2$ и $b-c=1$; или $a-c=-p^2$ и $b-c=-1$; или $a-c=-1$ и $b-c=-p^2$. Первые 2 случая не реализуются, так как $a \neq b$ по условию. Рассмотрим остальные 4 случая:

1) $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=c+1 \\ a-b=1-p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=c+1 \\ b-a=p^2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} c=a-1 \\ b-a+1=p^2 \end{cases}$

Система имеет 1 решение тогда и только тогда, когда $b-a+1$ – $\overbrace{\text{простого}}^{\text{квадрат}}$ числа

2) $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b-a=1-p^2 \\ c=b-1 \end{cases}$ $b-a<0$, что противоречит условию $a<b$

3) $\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} b-a=p^2-1 \\ \cancel{c=a+p^2} \\ c=b+1 \end{cases}$ Имеет решение тогда и только тогда, когда $b-a+1$ – $\overbrace{\text{простого числа}}^{\text{квадрат}}$

4) $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} b-a=-p^2+1 \\ c=b+p^2 \end{cases}$ $b-a<0$, что противоречит условию $a<b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итак, условие $(a-c)(b-c)=p^2$ эквивалентно условию

$b-a+1=p^2$

Если $a\equiv 2 \pmod 3$, то $a^2\equiv 1 \pmod 3$, $b\equiv 1 \pmod 3$

$b-a+1\equiv 1-2+1=0 \pmod 3$ ~~Тогда~~ $p^2 \vdots 3$, что ~~невозможно~~

~~Итак, обязательно для $a \vdots 3$~~ ~~Возможно, только~~, тогда $p \vdots 3$.

Если $a\equiv 0 \pmod 3$, то $b\equiv 2 \pmod 3$,
$b-a+1\equiv 2-0+1=3\equiv 0 \pmod 3$,
$p=3$

Так как p — простое число, то $p=3$.

$$\begin{cases} b-a+1=9 \\ a^2+b=710 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=8+a \\ a^2+a+8=710 \quad (1) \end{cases}$$

(1): $a^2+a-702=0$

$D=1+4\cdot 702=2809 \qquad \sqrt{D}=53$

$a=\dfrac{-1-53}{2}=-27$ или $a=\dfrac{-1+53}{2}=26$

$b=-27+8=-19 \qquad b=26+8=34$

$c=a-1=-28$ или $c=b+1=-18 \qquad c=a-1=25$ или $c=b+1=35$

Действительно, $(-27-(-28))\cdot(-19-(-28))=9=3^2$

$(-27-(-18))(-19-(-18))=9=3^2$

$(26-25)(34-25)=9=3^2$

$(26-35)(34-35)=9=3^2$

Все случаи остатка от деления a на 3 полностью рассмотрены

Ответ: ~~все тройки~~ $(-27;-19;-28)$, $(-27;-19;-18)$, $(26;34;25)$, $(26;34;35)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$31 \cdot 25$: 155, 62, 775, + 5, 784

$784 : 4 = 196$

$x \geq -5$

$1 - x - 4z \geq 0$

$x + 4z \leq 1$

$81 - z^2 \geq 0$

$(9 - z)(9 + z) \geq 0$

$-9 \quad 9$

$z \in [-9; 9]$

$53 \cdot 53$: 159, 265, 2809

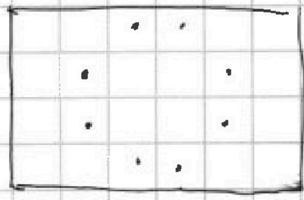
Если при $y \in [-\infty; -4]$, то

$400 \cdot 100 = 40000$ 20000 пар

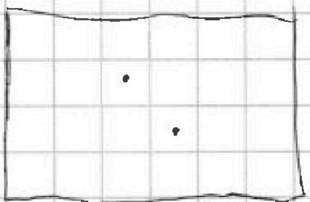
$C^4_{20000} + C^4_{20000} + C^4_{20000}$

$3 \cdot C^4_{20000} - 2 \cdot 5000 \cdot 9999$

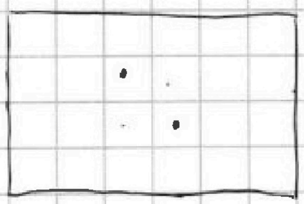
C^4_{20000}



C^2_8



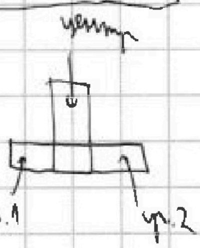
$20000 \cdot 19999$



$20000 \cdot \cancel{19999}\ 19998$

~~$20000 \cdot 199$~~

$\frac{40000 \cdot 39996}{2}$



$\frac{10000 \cdot 9999}{2} = 5000 \cdot 9999$ – вычитать

$-2 \cdot 5000 \cdot 9999$