



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Дано:

$$a_3 = 3x+3$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$\{a_n\}$  - ариф. прогрессия

$x = ?$

Решение

$$\left. \begin{array}{l} 1) a_3 = a_1 + 2d \\ a_3 = 3x+3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x+3 = a_1 + 2d \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 = 3x+3-2d \quad (*) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) a_5 = a_1 + 4d \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 4d = (x^2+2x)^2 \quad (**) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) a_9 = a_1 + 8d \\ a_9 = 3x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 8d = 3x^2 \quad (***) \end{array}$$

4) Из н. 1, 2, 3 (\*) найдем  $d$  (\*)

$$3x+3-2d+8d = 3x^2$$

$$3x+3+6d = 3x^2 \quad | :3$$

$$2d = x^2 - x - 1 \quad | \cdot 2$$

$$4d = 2x^2 - 2x - 2$$

5) Из н. 4 и н. 1

$$a_1 = 3x+3 - (x^2-x-1) = 3x+3-x^2+x+1 = -x^2+4x+4$$

6) Из н. 2 и н. 5 найдем  $b$  (\*\*)

$$\frac{-x^2+4x+4 + 2x^2-2x-2}{x^2+2x+2} = (x^2+2x)^2$$

6.1) Замена  $t = x^2+2x$

$$t+2 = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = 1+8=9 > 0 \Rightarrow 2 \text{ действ. корня}$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

6.2) Обратная замена:

Если  $t = 2$ , то  $x^2+2x=2$

$$x^2+2x-2=0$$

$$D = 4+8=12 > 0 \Rightarrow 2 \text{ действ. корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

Если  $t = -1$ , то  $x^2+2x = -1$

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0$$

$$|x = -1|$$

Ответ:  $\{-1; -1 \pm \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

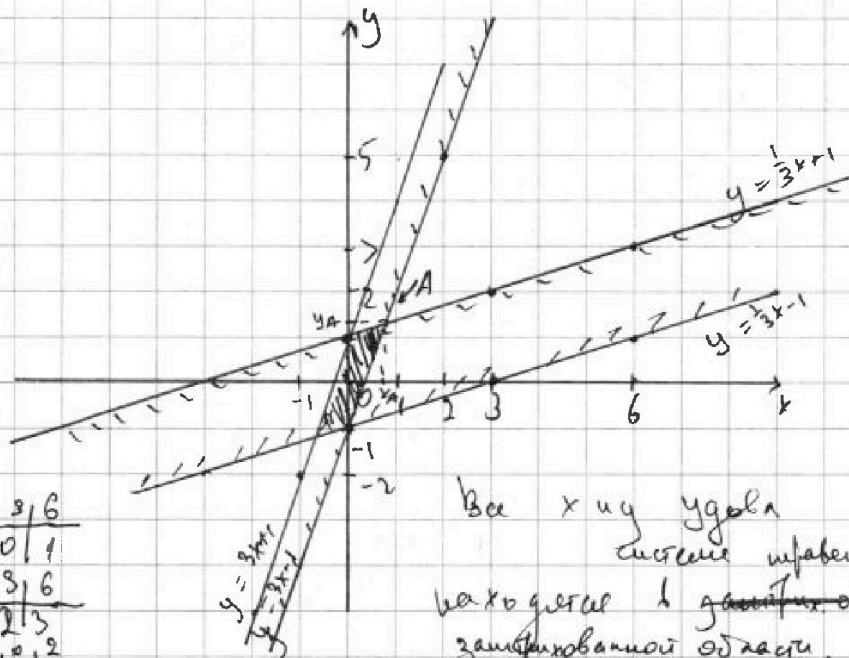
$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ x-y \leq 1 \\ x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 \leq 3y \\ x+3 \geq 3y \\ y \geq x-1 \\ y \leq x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq x - 1 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x & 3/6 \\ y & 0/1 \\ \hline x & 3/6 \\ y & 2/3 \\ \hline x & 0/2 \\ y & -1/5 \\ \hline x & 0/-1 \\ y & 1/-2 \end{array}$$



Все  $x$  и  $y$  углов  
системы неравенств  
находятся в границах  
затененной области.

Чтобы  $y+8x$  будет максимум  
при максимальных  $x$  и  $y$ .  
→ т. А  $(x_A, y_A)$  на графике.  
 $x_{\max} = x_A$   
 $y_{\max} = y_A$

т. А - точка пересечения

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 / \cdot 3$$

$$9x - 3 = x + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow x_A = \frac{3}{4}$$

$$y_A = \frac{1}{3}x_A + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{т. А} \left( \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 8x = y_A + 8x_A = \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

Ответ: **11**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходно  $\begin{cases} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13b^2 & (*) \\ m^2n + mn^2 - 3mn = 759^2 & (**) \end{cases}$   $p, q$  - простые  $m, n \in \mathbb{N}$

1) Решим  $(m+n)^2 - 9(m+n) = 13b^2$   
 $(m+n)(m+n-9) = 13b^2 = 13 \cdot b \cdot b$

- $\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=b^2 \end{cases}$  ①
- $\begin{cases} m+n=13b \\ m+n-9=b \end{cases}$  ②
- $\begin{cases} m+n=b^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$  ③
- $\begin{cases} m+n=13b^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$  ④
- $\begin{cases} m+n=b \\ m+n-9=13b \end{cases}$  ⑤
- $\begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13b^2 \end{cases}$  ⑥

2) Решим  $(*)$

$m^2n + mn^2 - 3mn = 759^2$   
 $mn(m+n-3) = 759^2$

3)  $u_3$  и 1 и 2

$\begin{cases} m=13-n \\ b=2 \\ mn(m+n-3) = 759^2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ b=2 \\ (13-n)n(m+n-3) = 759^2 \\ (13-n) \cdot n \cdot 10 = 759^2 \end{cases}$

Значит  $n \cdot 10 \Rightarrow$

$\rightarrow 759^2$  тоже  $2 \cdot 10 \cdot 10 = 20$

1.1) Решим ①

$\begin{cases} m=13-n \\ 13-n+n-9=b^2 \\ m=13-n \\ b^2=4 \\ m=13-n \\ b=2 \end{cases}$

1.2) Решим ②

$\begin{cases} m=13b-n \\ 13b-n-9=b \\ m=13b-n \\ 12b=9b \\ m=13b-n \\ b=\frac{3}{4} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.3) Решим ③

$\begin{cases} m=b^2-n \\ b^2-n-9=13 \\ m=b^2-n \\ b^2=22 \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.4) Решим ④

$\begin{cases} m=13b^2-n \\ 13b^2-n-9=1 \\ m=13b^2-n \\ b^2=\frac{10}{13} \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.5) Решим ⑤

$\begin{cases} m=b-n \\ b-n-9=13b \\ m=b-n \\ -9=12b \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

1.6) Решим ⑥

$\begin{cases} m=1-n \\ 1-n-9=13b^2 \\ m=1-n \\ 13b^2=-8 \Rightarrow b \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{нет.реш.} \end{cases}$

3)

$1 \Rightarrow q^2$  - четное  $\Rightarrow q$  - четное и простое  $\Rightarrow q=2 \Rightarrow$

$\begin{cases} b=2 \\ q=2 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ -n^2+13n=20 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} n=10 \text{ (по т. Виета)} \\ n=3 \\ m=13-n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=10 \\ m=3 \end{cases}$

$\begin{cases} m=13-n \\ (13-n) \cdot n \cdot 10 = 759^2 / 10 \end{cases}$  ⑦



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II случай

$$\begin{cases} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 75p^2 & \text{#1} \\ m^2n + mn^2 - 3mn = 13p^2 & \text{#1} \end{cases} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч. у обеих уравнений}$$

1) Ресш. #1

$$\begin{cases} mn(m+n-3) = 13p^2 \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p & \text{#1} \\ mn = p^2 & \text{#2} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p & \text{#2} \\ mn = p & \text{#3} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = 13p^2 & \text{#3} \\ mn = 1 & \text{#4} \end{cases} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч. (из п.1.1:1.6)} \\ \begin{cases} m+n-3 = p & \text{#5} \\ mn = 13p & \text{#6} \end{cases} \\ \begin{cases} m+n-3 = p & \text{#6} \\ mn = 13p^2 & \text{#7} \end{cases} \end{cases}$$

1.1) Ресш. #1

$$\begin{cases} mn = p^2 \\ m+n-3 = 13p \\ \begin{cases} m = p^2 \\ n = 1 \\ m = p \\ n = b \\ m = p^2 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = p^2 \\ p^2 = 15 \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ n = b \\ m = p \\ 2p = 16 \Rightarrow p = 8 - \text{н.ч. п.ч.} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ n = p^2 \\ m = 1 \\ p^2 = 15 - \text{н.ч. п.ч.} \end{cases}$$

1.2) Ресш. #2

$$\begin{cases} mn = p \\ m+n-3 = 13p \\ \begin{cases} m = p \\ n = 1 \\ m = 1 \\ n = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p \\ n = 1 \\ -2 = 12p \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ m = 1 \\ n = p \end{cases} \text{аналогично н.ч. п.ч.}$$

1.4) Ресш. #4

$$\begin{cases} m \cdot n = 13 \\ m+n-3 = p^2 \\ \begin{cases} m = 13 \\ n = 1 \\ m = 1 \\ n = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 1 \\ p^2 = 11 \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \\ m = 1 \\ n = 13 \end{cases} \text{аналогично н.ч. п.ч.}$$

1.3) Ресш. #3

$$\begin{cases} m \cdot n = 1 \\ m+n-3 = 13p^2 \\ \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ -1 = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.}$$

1.5) Ресш. #5

$$\begin{cases} m \cdot n = 13p \\ m+n-3 = p \\ \begin{cases} m = 13p \\ n = 1 \\ m = 13 \\ n = p \\ m = 1 \\ n = 13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13p \\ n = 1 \\ 13p = 2 \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \\ m = 13 \\ n = p \\ 13 = 0 - \text{н.ч. п.ч.} \Rightarrow \text{н.ч. п.ч.} \end{cases} \text{аналогично в других вариантах}$$

Ресш. #6

1.6)  $\begin{cases} m \cdot n = 13p^2 \\ m+n-3 = 4 \end{cases} \Rightarrow$  ~~н.ч. п.ч.~~  
~~н.ч. п.ч.~~  
~~н.ч. п.ч.~~  
 Если б было из натур. чисел  $13$ , то это было больше либо равно  $13$ . Будет такое число с натуральными  $m, n$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  будет больше  $13 \Rightarrow$  2 равенства не выполняются  $\Rightarrow$  н.ч. п.ч.  
 Ответ: ~~н.ч. п.ч.~~ (10; 3); (3; 10)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

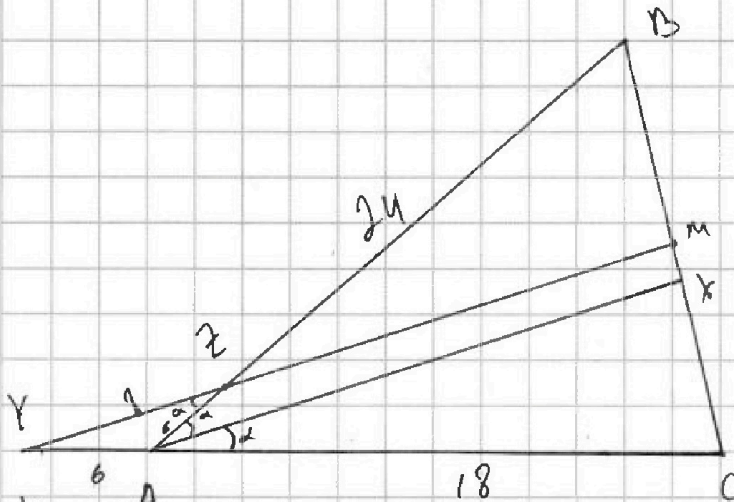


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ ч.



Дано:

$\triangle ABC$   
 AX-биссектриса  $\triangle ABC$   
 Г.М-середина BC  
 $MY \parallel AX$   
 $MY \perp AB = Z$   
 $MY \perp AC = Y$   
 $AC = 18$   
 $AZ = 6$   
 $YZ = 8$   
 $BC = ?$

Решение:

- 1) AX-биссектриса  $\triangle ABC$  (по ус.)  $\Rightarrow \angle BAX = \angle XAC = \alpha$  (по опр. биссектрисы)
- 2)  $AX \parallel MY$  (по ус.)  
 AB - секущая  
 $\angle BAX$  и  $\angle YZA$  - накрест лежащие  $\Rightarrow \angle BAX = \angle YZA = \alpha$  (по св-ву паралл. прямых)
- 3) Рассмотрим  $\triangle YAZ$   
 $\angle BAC$  - внешний угол  $\triangle YAZ$  (по опр.)  $\Rightarrow \angle BAC = \angle YZA + \angle ZYA$  (по св-ву внешнего угла)  
 $2\alpha = \alpha + \angle ZYA \Rightarrow \angle ZYA = \alpha \Rightarrow \triangle YAZ$  - р/б (по двум углам по окружности р/б (теор.))  $\Rightarrow$

$\Rightarrow YA = ZA = 6$   
 (по опр. р/б треуго.)

4) Рассмотрим  $\triangle ABC$  и секущую YM : По Г. Менелай

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

5) Г.М-середина BC (по ус.)  $\Rightarrow BM = MC$  (по опр. середины отрезка)

$$6) \text{ и } \text{н. } 3 \Rightarrow 5 \quad \frac{BM}{BM} \cdot \frac{CA + AY}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$1 \cdot \frac{18 + 6}{6} \cdot \frac{6}{ZB} = 1$$

$$ZB = 24$$

7) Рассмотрим  $\triangle YZA$  : по Г. косинусов

$$YA^2 = YZ^2 + AZ^2 - 2 \cdot YZ \cdot AZ \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{YZ^2 + AZ^2 - YA^2}{2 \cdot YZ \cdot AZ} = \frac{8^2 + 6^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч б) раскл.  $\triangle ABC$ : по ф. косинусов

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha$$

8.1) ~~AC~~  $AB^2 = (AP + PB)^2 = (6 + 24)^2 = 30^2 = 900$

8.2)  $AB = 30$

8.3)  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

8.4) ЧЗ и. 8.1 ÷ 8.3

$$BC^2 = 18^2 + 900 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 324 + 900 + 120 = 1344 \rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{1344} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{21} = 12\sqrt{21}$$

Ответ:  $12\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x^2 + 5y} \cdot \sqrt{x} \end{cases}$$

1) 2) 3)

~~Handwritten work for problem 1, including domain analysis and algebraic manipulations. The work is heavily crossed out with large scribbles.~~

2)

Рассм. №1

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \quad - \text{симметрично} \Rightarrow \begin{cases} x=y & \text{возможное решение} \\ x, y > 0 \end{cases}$$

~~Handwritten work for problem 2, including a note about the origin (0,0) and further algebraic steps.~~

3)

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \end{cases} \quad (1) \quad (4)$$

3.1)

Рассм. №1  $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

3.1.1) Замена

$$t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \quad | \uparrow \text{ } ^2$$

$$t^2 = x+1 - 2\sqrt{-x^2+6x-x+6} + 6-x = 7-2\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$t^2 - 7 = -2\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$2\sqrt{-x^2+5x+6} = -t^2 + 7$$

$$t+5 = -t^2 + 7$$

$$t^2 + t + 5 - 7 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1+8=9 > 0 \Rightarrow \text{два действительных}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

3.1.2)

Итак замена

Если  $t=1$ , то  $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$   
 $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{6-x} \quad | \uparrow \text{ } ^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5  $x+y \in [4, 2\sqrt{6-x} + 6-x]$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x} \quad | :2$$

$$x-3 = \sqrt{6-x} \quad | \wedge^2$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-6x+9 = 6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-5x+3=0 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$x^2-5x+3=0$$

$$D = 25-12=13 > 0 \rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

Оценим  $3 < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4$  / +5

а)  $-4 < -\sqrt{13} < -2$  / +3

$8 < 5 + \sqrt{13} < 9$  / :2

$1 < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 2$  / :2

$4 < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4,5$

$\frac{1}{2} < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 1$

Если  $t = -2$ , то  $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$

$$\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x} \quad | \wedge^2$$

$$x+1 + 4\sqrt{x+1} + 4 = 6-x$$

$$4\sqrt{x+1} = -2x+1 \quad | \wedge^2$$

$$1-2x+1 \geq 0$$

$$16(x+1) \leq 1-4x+4x^2$$

$$| 2x \leq 1$$

$$| 16x+16-1+4x-4x^2 \geq 0$$

$$| x \leq \frac{1}{2}$$

$$-4x^2 + 20x + 15 \geq 0$$

$$D = 400 + 240 = 640 > 0 \rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{640}}{-8} = \frac{-20 \pm 8\sqrt{10}}{-8} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

Сравним

а)  $\frac{5+2\sqrt{10}}{2} > \frac{1}{2}$  / :2

$$5+2\sqrt{10} > 1$$

$$2\sqrt{10} > 1-4$$

б)  $\frac{5-2\sqrt{10}}{2} < \frac{1}{2}$  / :2

$$-2\sqrt{10} < -4$$

$$4 < 2\sqrt{10} \quad | :2$$

$$2 < \sqrt{10} \quad | \wedge^2$$

$$4 < 10$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 15 \\ \hline 160 \\ \times 16 \\ \hline 240 \end{array}$$

3.2) Вспомогательная

$$\begin{cases} x=9 \\ y = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{5-2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Сравним

а)  $\frac{5-2\sqrt{10}}{2} < 0$  / :2

$$5-2\sqrt{10} < 0$$

$$5 < 2\sqrt{10} \quad | \wedge^2$$

$$25 < 4 \cdot 10$$

$$25 < 40$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а)

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2} > 0/2$$

$$5+\sqrt{13} > 0$$

$$\sqrt{13} > -5$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $\left( \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right)$

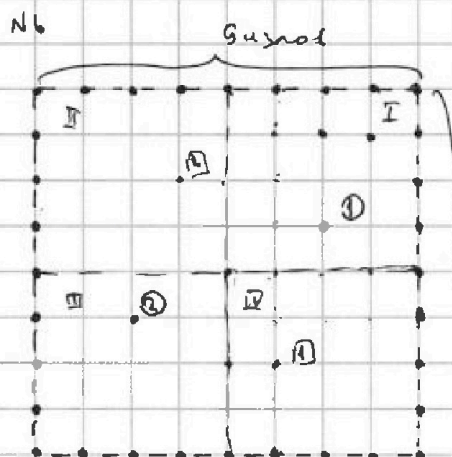


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$9 \times 9 = 81$  узлов

1) A-выбор 2 узла из 81  
 $N(A) = C_{81}^2 = \frac{81!}{2! \cdot 79!} = \frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40$

2) Выберем два произвольных узла ~~каждые~~  $\text{I}$  и  $\text{II}$ .  
 При повороте этих двух узлов соответствуют ~~каждому~~  $3$  поворота "распаки"

III и IV

2) Выберем два произвольных узла, лежащих

в соседних или одной стороне ( $\text{I}$  и  $\text{II}$ ). При повороте получим, что ~~каждому~~ этим двум узлам соответствуют 3 поворота "распаки".  $\Rightarrow$  Двум узлам из одной ~~или~~ соседних вершин соответствует по  $4$  "распаки".

3) Выберем два узла из противоположных вершин ( $\text{I}$  и  $\text{III}$ ). При повороте получим, что ~~каждому~~ двум таким узлам соответствуют 2 "распаки".

4) B-выбор 2 узла из ~~всех узлов~~ I, II и III вершин: ~~с III вершины~~  $9 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 36 + 20 = 56$

B-выбор 1 узла из I вершин 4, узла из соседней вершин.

$N(B) = 25 \cdot 20 = 250$

5) C-выбор 2 узла из противоположных вершин:

$N(C) = 24 \cdot 24$

6)  $N = 4N(B) + N(C) = 250 + 24^2 = 250 + 576 = 826$  способов

Ответ: 826 способов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13+9=22 \frac{BM}{MC} = \frac{eY}{AY} = \frac{AZ}{EB} = 1 \quad 13p+1-3=p \quad 12p=2$$

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BM}{BM} = \frac{13+AY}{AY} = \frac{6}{AB-6} = 1 \quad p=6$$

$$YA^2 = 64 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$CB^2 = AB^2 + 16^2 - 2 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{Y^2}{2M} = \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} = 1$$

$$m=13p-4 \quad \frac{Bx}{AC} = \frac{AB}{AC} \quad \frac{BM}{Bx} = \frac{3z}{AZ}$$

$$13p-4+x-y=6 \quad \frac{BM}{Bx} = \frac{AB-6}{6}$$

$$13-11+x \rightarrow = 10$$

$$\frac{8}{2M} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{AY} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - 4y^4 = y^4 - \sqrt{x^2 + 5y^2}$$

$$(x+1)(6-y) = 6x - xy + 6 - y$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 + 2x^2 = y^4 + 5y^2 + 2x^2$$

$$x^4 + 5x^2 + 2x^2 = y^4 + 5y^2 + 2x^2$$

$$x^4 + 5x^2 + 2x^2 = y^4 + 5y^2 + 2x^2$$

$$x^4 + 5x^2 + 2x^2 = y^4 + 5y^2 + 2x^2$$

$$(x+1)(6-y) = 6$$

$$(x+1)(6-y) = 6x + 6 - xy - y$$

$$\sqrt{x+1} = 2\sqrt{6+5x-y^2} + \sqrt{6-y} / p^2$$

$$x+1 + 10\sqrt{x+1} + 25 = 4(6+5x-y^2) + 4\sqrt{6+5x-y^2} \cdot \sqrt{6-y} + 6-y$$

$$x + 26 + 10\sqrt{x+1} = 24 + 20x - 4y^2 + 6 - y + 4\sqrt{6+5x-y^2} \sqrt{6-y}$$

$$-19x + 10\sqrt{x+1} - 8 + 10\sqrt{x+1} = -4y^2 - y +$$

$$4y + 1 + 8y = 12y + 8$$

$$x - 3x + 1 = -3$$

$$-2x + 4 = 1 \Rightarrow x = 1.5$$

$$x \leq 2$$

$$x - y \geq -1$$

$$y \leq x + 1/4$$

$$4y \in 4x + 1$$

$$8x + 4 + 4x = 12x$$

$$12x + 4 = 12y + 1/4$$

$$3x + 1 = 3y + 1/4$$

$$3x = 3y + 1/4$$

$$x = y + 1/12$$

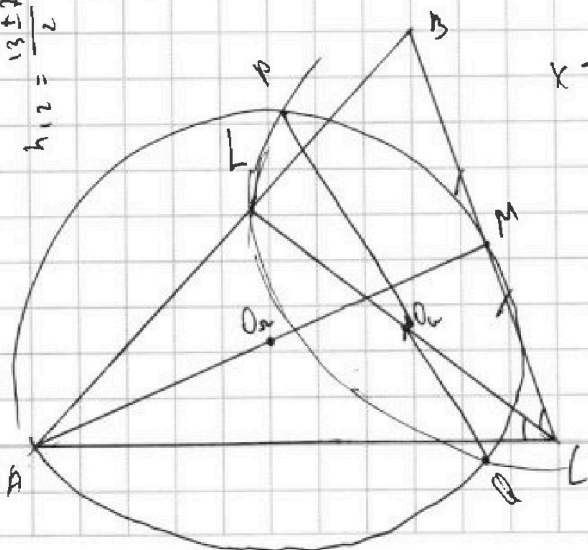
$$16 = 8 + \frac{40}{3} =$$

$$4 = \frac{40}{3} =$$

$$11^2 - 13x + 30 = 0$$

$$D = 169 - 120 = 49 > 0 \rightarrow y = 2$$

$$h_{12} = \frac{13 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} h_1 = 10 \\ h_2 = 3 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

max(4y + 8x) - ?  
 $|x - 3y| \leq 3$  / P2  
 $|3x - y| \leq 1$  / P2

(y + 2x) - ? Черновик

$x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 9$

$9x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 81$

$10x^2 - 12xy + 10y^2 \leq 10 \quad | : 2$

$5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 5$

$D = 36y^2 - 20y^2 = 16y^2 \geq 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$

$x_{1,2} = \frac{6y \pm 4y}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{5}y \end{cases}$

$5|x - y| / (x - 3y) \leq 5$   
 $|ky| / (5xy) \leq 5$

$(x - 2y)^2 - 1 \leq 9 - (3xy)^2$   
 $(x - 2y - 1)(x - 2y + 1) \leq 9 - (3xy)^2$

$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 3xy = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y + 3 \\ 9y + 9 - y = 1 \\ x = 3y + 3 \\ 8y = -8 \\ y = -1 \end{cases}$

$f(x) = 4y + 8x$

$4y + 8x = 0$

$y =$   
 $\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \\ 3x - y \leq 1 \\ 3xy \geq -1 \end{cases}$

$xy \geq \frac{1}{3}x - 1$   
 $y \leq \frac{1}{3}x + 1$   
 $y \geq 3x - 1$   
 $y \leq 3x + 1$

①  $x - 3y - 3 = 0$

$3y = x - 3$   
 $y = \frac{1}{3}x - 1$

$x - 3y + 3 = 0$

$3y = x + 3$   
 $y = \frac{1}{3}x + 1$

$3x - y - 1 = 0$

$y = 3x - 1$

④  $3x - y + 1 = 0$

$y = 3x + 1$

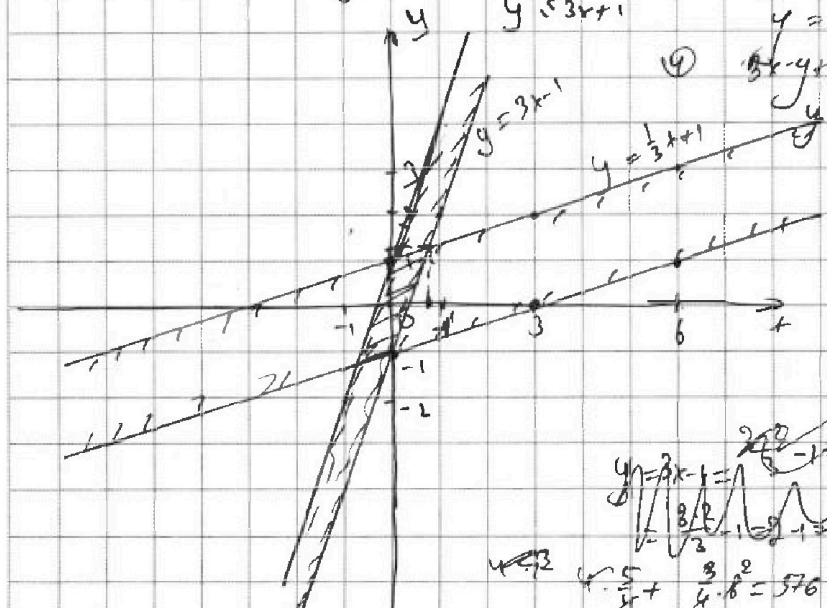
$\begin{array}{r|l} x+3 & 6 \\ y & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} x & 0 \\ y & -1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{array}$

$4x + 2y = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \cdot 3$   
 $9x - 3 = x + 3$   
 $8x = 6$   
 $x = \frac{3}{4}$

$y = \frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$   
 $y = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 2} + 1 = \frac{2}{10} + 1 = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$



$y = 3x - 1 = 1$   
 $3x = 2$   
 $x = \frac{2}{3}$   
 $y = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 = 2 - 1 = 1$   
 $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot 8 = 5 + 6 = 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12  $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$   
 $\max(4y+8x) = ?$

$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$

1)  $4x-4y \leq 4$   
 $x-y \leq 1 \quad | \cdot 8$

$8x \leq 8+8y \rightarrow$

2)  $4x-4y \geq -4$

$x-y \geq -1$

$y \leq x+1 \quad | \cdot 4$

$4y \leq 4x+4 \Rightarrow \max(4y) = 4x+4$

$4y+8x$   
 $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$

Черновики

$4y+8x = 4y+8(x+y) = 12x+12y$

$x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 9$   
 $9x^2 - 6xy + x^2 \leq 1$

$8x^2 - 8y^2 \leq -8$

$x^2 - y^2 \leq -1$

В)  $8x$  максимален и  $4y$  максимален, но  $4y$  максимален  $\Rightarrow$

$\Rightarrow 12y+8 = 12x+4 \quad | :4$

$3y+2 = 3x+1$

$3y = 3x-1$

$y = x - \frac{1}{3}$

$x = y + \frac{1}{3}$

$\rightarrow (A) \Rightarrow x - 3(x - \frac{1}{3}) \geq -3$

$x - 3x + 1 \geq -3$

$-2x \geq -4 \quad | :(-2)$

$x \leq 2 \quad | \cdot 8$

$8x \leq 16$

$f(x, y) \Rightarrow 8+8y = 16$

$8y = 8$

$y = 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

3)  $2y \leq 1$  и  $4x \leq 2$

$4y+8x \leq 8+4x+8x$   
 $4y+8x \leq 12+8x+4x$   
 $-4y+4x \leq 12$   
 $x-y \leq 3$

$4y+8x \leq 4x+4+8+8y$   
 $4y+8x \leq 8y+4x+12$   
 $-4y+4x \leq 12$   
 $x-y \leq 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

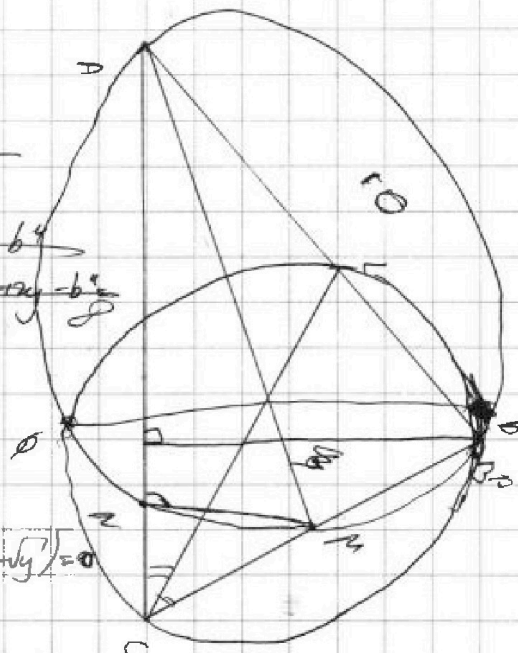
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - 6y^2 = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

1) Замена  $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{6y}$

$$\begin{aligned} a^2 &= x+1 & b^2 &= 6y \\ 5x &= 5a^2 - 5 & 3b - 12y &= 6y \\ & & 3b - 12y &= b^2 \end{aligned}$$



~~Решение~~

1) Решим (\*)

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 - \sqrt{x} + \sqrt{6y} = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) - (\sqrt{x} - \sqrt{6y}) = 0$$

1) Замена

(osao)

~~Решение~~

$$\begin{aligned} t^2 &= x - 2\sqrt{xy} + y \\ x + y &= t^2 + 2\sqrt{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy &= t^4 + 4t^2\sqrt{xy} + 4xy \\ t^2y &= t^4 + 4t^2\sqrt{xy} + 2xy \end{aligned}$$

$$-y^2 + 5x + 6 = 0$$

$$y^2 = 5x + 6 = 0$$

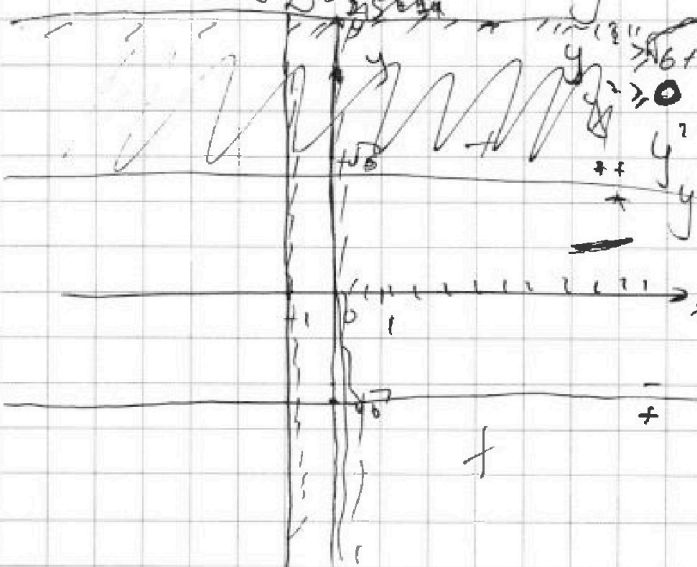
$$x + 1 \geq 0$$

$$6 - y \geq 0$$

~~Решение~~

$$2 = \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$= 2\sqrt{5}$$



$$\begin{aligned} x + 6 + 5x &\geq 6 \\ x &\geq 0 \\ y^2 &\geq 6 \\ y^2 - 6 &\geq 0 \\ (y - \sqrt{6})(y + \sqrt{6}) &\geq 6 + 5x \geq 6 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x+3$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$(k+1)(6-x) =$$

$$= 6x - x^2 + 6 - 6x =$$

$$= -x^2 + 6 + 5x$$

$$= 6 + 5x - x^2 \quad Q_1 = 3x+3 - x^2 + x + 1$$

$$Q_2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$\frac{3x+3-x^2+x+1+2x^2-2x-2}{x^2+2x} = (x^2+2x)^2$$

$$x^2+2x$$

$$(4y+8x) \max$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$Q_1 = 2Q_2$

$$\frac{(x+1)(x+3)}{x(x+2)} = 1 - \frac{3x+2}{x(x+2)}$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$$

$$B = m^2n + mn^2 = mn(m+n)$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$$|x-y| \leq 3$$

$$|x-3y| \geq -3$$

$$|3x-y| \geq -1$$

$$|x-y| \geq -3$$

$$|x-y| \leq 1$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|x-y| \leq 3$$

$$|x-y| \leq 3$$

$$|x-y| \leq 3$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |x-3y| \geq -3 \\ |3x-y| \leq 1 \\ |3x-y| \geq -1 \end{cases}$$

$$4x-9y \leq 4$$

$$x-y \leq 1$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

$$4x-4y \leq 4$$

3x+3 = a\_1 + 2d

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35} = \frac{1}{17.5}$$

$$\frac{1}{17.5} = \frac{2}{35} = \frac{1}{17.5}$$

$$\frac{1}{17.5} = \frac{2}{35} = \frac{1}{17.5}$$

$$\frac{1}{17.5} = \frac{2}{35} = \frac{1}{17.5}$$

$$1800 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$1 - \frac{1}{17.5} = \frac{16.5}{17.5} = \frac{33}{35}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

**1 + 3 + 4**       $3 + 5 + 5 = 13$

$(5+4) + (5+5) + (4+4) + 6 = 31$   
 $= 9 + 10 + 8 + 6 = 33$   
 $= 17 + 14 = 31$

$3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 = 25$   
 $= 9 + 10 + 8 = 27$   
 $= 15 + 10 = 25$

$3 + 4 + 5 + 5 + 4 = 21$

**Dано:**  
 $\triangle ABC$   
 $AX$  - биссектриса  $\triangle ABC$   
 $ZM \parallel AX$   
 $Z$  - м. середины  $BC$   
 $ZM \cap AB = Z$   
 $ZM \cap AC = Y$   
 $AC = 18$   
 $AZ = 6$   
 $YZ = 8$   
 $BC = ?$

**Решение:**  
 $6 \cdot 18 = 108$   
 $108 : 3 = 36$   
 $36 : 2 = 18$   
 $18 : 2 = 9$   
 $18 : 2 = 9$   
 $18 : 2 = 9$   
 $18 : 2 = 9$   
 $18 : 2 = 9$

$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YB} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$   
 $1 \cdot \frac{18+6}{6} \cdot \frac{8}{2B} = 1$   
 $2B = 24$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha$   
 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$   
 $6^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$   
 $8 = 12 \cos 2\alpha$   
 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$   
 $\frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$