



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 21

пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  - члены арифм. прогрессии,  $d$  - разность арифм. прогрессии

Тогда по условию:  $a_1 = 12 - 12x$ ,  $a_4 = (x^2 + 4x)^2$ ,  $a_8 = -6x^2$

Поскольку это арифм. прогрессия, то:

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d, a_4 = a_1 + 3d, a_8 = a_1 + 7d \quad (a_n = a_1 + d(n-1))$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } a_8 - a_2 &= a_1 + 7d - a_1 - d = 6d \\ -6x^2 - 12 + 12x &= 6d \\ d &= 2x - x^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } a_1 = a_2 - d = 12 - 12x - 2x + x^2 + 2 = x^2 - 14x + 14$$

$$\Rightarrow a_4 = a_1 + 3d =$$

$$(x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3d$$

$$(x^2 + 4x)^2 = x^2 - 14x + 14 + 3 \cdot (2x - x^2 - 2)$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = x^2 - 14x + 14 + 6x - 3x^2 - 6$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = -2x^2 - 8x + 8$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Потенциальные корни:  $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$

$$1: 1 + 8 + 18 + 8 - 8 \neq 0 \text{ - не подходит}$$

$$-1: 1 - 8 + 18 - 8 - 8 \neq 0 \text{ - не подходит}$$

$$+2: 2^4 + 2^6 + 18 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 8 \neq 0 \text{ - не подходит}$$

$$-2: -2^4 - 8^6 + 18 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 0$$

$$16 - 64 + 72 - 16 - 8 = 0 \text{ - верно}$$

$$\Rightarrow -2 \text{ - корень.}$$

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8}{x^2 + 2x^3} \Big| x+2$$

$$\frac{6x^3 + 18x^2}{-6x^3 + 12x^2}$$

$$\frac{-6x^2 + 8x}{6x^2 + 12x}$$

$$\frac{-4x - 8}{-4x - 8}$$

$$\frac{-4x - 8}{0}$$

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 6x - 4}{x^2 + 2x^3} \Big| x+2$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2}{-4x^2 + 6x}{4x^2 + 8x}{-2x - 4}{0}$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$$

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$$

потенциальные корни:  $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

$\pm 1$  - не подходят (ранее выяснили)

$$+2: 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 \neq 0$$

$$-2: -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 12 - 4 = 0 \text{ - верно.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Задача 24)

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x+2)^2(x^2+4x-2) = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 - 2 \cdot 4(-2) = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2} = -2 - \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow x = \{-2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}; -2$$

проверка:

$$a_1 = x^2 - 14x + 14 = 4 + 28 + 14 = 46$$

$$d = 2x - x^2 - 2 = -4 - 4 - 2 = -10$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 46 - 30 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$\textcircled{1} x = \sqrt{6} - 2$$

$$a_1 = (\sqrt{6} - 2)^2 - 14(\sqrt{6} - 2) + 14 = 6 - 4\sqrt{6} + 4 - 14\sqrt{6} + 28 + 14 =$$

$$= 52 - 18\sqrt{6}$$

$$d_1 = 2(\sqrt{6} - 2) - (\sqrt{6} - 2)^2 - 2 = 2\sqrt{6} - 4 - 6 + 4\sqrt{6} - 4 - 2 = 6\sqrt{6} - 16$$

$$a_4 = 52 - 18\sqrt{6} + 3(6\sqrt{6} - 16) = 52 - 48 = 4$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = (6 - 4\sqrt{6} + 4 + 4\sqrt{6} - 8)^2 = 4$$

$$\textcircled{2} x = -\sqrt{6} - 2$$

$$a_1 = (-\sqrt{6} - 2)^2 - 14(-\sqrt{6} - 2) + 14 = 6 + 4\sqrt{6} + 4 + 14\sqrt{6} + 28 + 14 =$$

$$= 18\sqrt{6} + 52$$

$$d_1 = 2(-\sqrt{6} - 2) - (-\sqrt{6} - 2)^2 - 2 = -2\sqrt{6} - 4 - 6 - 4\sqrt{6} - 4 - 2 =$$

$$= -6\sqrt{6} - 16$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3d$$

$$(6 + 4\sqrt{6} + 4 - 4\sqrt{6} - 8)^2 = 18\sqrt{6} + 52 - 18\sqrt{6} - 48$$

$$4 = 4$$

Ответ:  $-\sqrt{6} - 2; \sqrt{6} - 2; -2$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

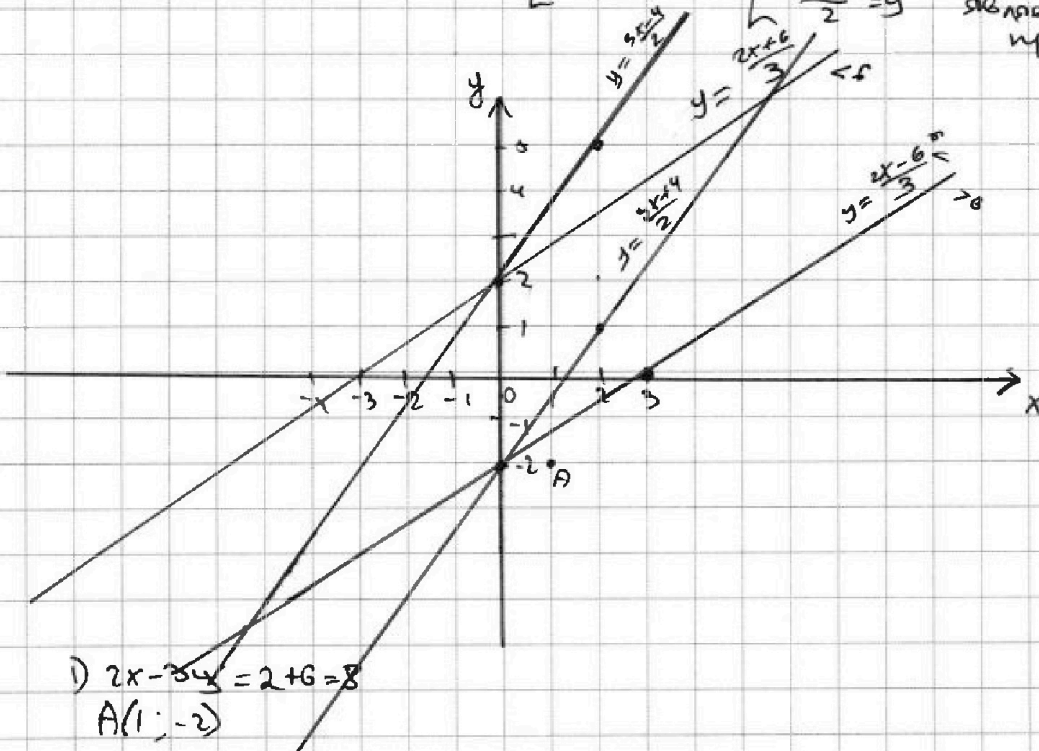
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

задание 02

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases}$$

1)  $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 2x-3y=-6 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x-6=3y \\ 2x+6=3y \end{cases}$   $\begin{cases} y = \frac{2x-6}{3} \\ y = \frac{2x+6}{3} \end{cases}$  - графики параллельные

2)  $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$   $\begin{cases} \frac{3x-4}{2}=y \\ \frac{3x+4}{2}=y \end{cases}$  - графики параллельные





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Задание 3)

$m, n \in \mathbb{N}$ ;  $p, q$  - простые.

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

①  $A = 17p^2$ ;  $B = 15q^2$

$$17p^2 = (m-2n)(m-2n+13) \quad ; \quad m-2n < m-2n+13$$

$\Rightarrow$  возможные варианты:

$$m-2n < m-2n+13$$

1) 1  $17p^2$

2) p  $17p$

3)  $p^2$   $17$

4) 17  $p^2$

} в зависимости от p.

Рассмотрим все варианты:

1)  $m-2n = 1$

$$17p^2 = 1 \cdot (1+13)$$

$$17p^2 = 14 \text{ - неверно.}$$

2)  $m-2n = p$

$$17p^2 = p \cdot (p+13)$$

$$p+13 = 17p$$

$$13 = 16p \text{ - неверно}$$

3)  $m-2n = p^2$

$$17p^2 = p^2(p^2+13)$$

$$p^2+13 = 17$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2, \text{ т.к. } p > 0$$

$$\Rightarrow m-2n = 4$$

$$m = 2(2+n)$$

$\Rightarrow$  проверим пункт 3-ий вариант.

$$B = mn(m-2n-2) = 15q^2$$

$$2(2+n) \cdot n(4-2) = 15q^2$$

$$4 \cdot (2+n) \cdot n = 15q^2 \quad 15 \nmid 4 \Rightarrow q^2 \nmid 4, \text{ т.к.}$$

$q$  - простое, а простым может быть только одно чет, то  $q = 2$ .

$$(2+n) \cdot n = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n+5)(n-3) = 0$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ n = -5 \end{cases} \text{ - не подходит, т.к. } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 3 \quad m = 2(2+n) = 2(2+3) = 10$$

$$\Rightarrow m = 10, n = 3 \text{ при } p = q = 2.$$

4)  $m-2n = 17$

$$17p^2 = 17 \cdot (17+13) = 17 \cdot 30 \Rightarrow p^2 = 30 \text{ - неверно.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Задание 3)

2) Если  $B = 17p^2$ ;  $A = 15q^2$

$(m-2n)(m-2n+13) = 15q^2$ , так как  $(m-2n < m-2n+13)$

рассмотрим  
возможные  
случаи:

$m-2n / \mid m-2n+13$   
1) 1  
2) 15q<sup>2</sup>

	$m-2n < m-2n+13$	
1)	1	15q <sup>2</sup>
2)	q	15q
3)	3	5q <sup>2</sup>
4)	5	3q <sup>2</sup>
5)	3q	5q
6)	q <sup>2</sup>	15
7)	15	q <sup>2</sup>

} зависит от q (не всегда q<sup>2</sup> > 5)  
5q > 3q  
3q<sup>2</sup> > 5

1)  $m-2n = 1$   
 $(m-2n)(m-2n+13) \neq 15q^2$   
 $1(1+13) = 15q^2$   
 $14 = 15q^2$  - неверно, т.к. q - простое.

2)  $m-2n = q$   
 $q(q+13) = 15q^2$   
 $q^2 + 13q = 15q^2$   
 $14q^2 - 13q = 0$   
 $q(q - \frac{13}{14}) = 0$   
 $\begin{cases} q = 0 \\ q = \frac{13}{14} \end{cases}$  - неверно, т.к. q - простое

3)  $m-2n = 3$   
 $(m-2n)(m-2n+13) = 15q^2$   
 $3(3+13) = 15q^2$   
 $3 \cdot 16 = 15q^2$   
 $16 = 5q^2$  - неверно, т.к. q - простое.

5)  $m-2n = 3q$   
 $3q(3q+13) = 15q^2$   
 $39q = 15q^2 - 9q^2$   
 $6q^2 - 39q = 0$   
 $3q \cdot 3q(3q-13) = 0$   
 $\begin{cases} q = 0 \\ 3q = 13 \end{cases}$  - неверно, т.к. q - простое

4)  $m-2n = 5$   
 $5(5+13) = 15q^2$   
 $5 \cdot 18 = 15q^2$   
 $5 \cdot 9 \cdot 2 = 15q^2$   
 $6 = q^2$  - неверно, т.к. q - простое

6)  $m-2n = q^2$ ,  $m-2n+13 = 15$   
 $m-2n = 2$   
 $\Rightarrow q^2 = 2$  - неверно, т.к. q - простое

7)  $m-2n = 15$   
 $15(15+13) = 15q^2$   
 $28 = q^2$  - неверно, т.к. q - простое

$\Rightarrow$  подходит только  $(m;n) = (10; 6)$  при  $q = p = 2$   
Ответ:  $(10; 6)$   $(10; 3)$  (при  $q = p = 2$ )





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Задание 4)

8)  $\triangle ABC$ : по т. косинусов;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC^2 = 6^2 + 18^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3}$$

$$BC^2 = 36 + 324 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3}$$

$$BC^2 = 360 + 24$$

$$BC^2 = 384$$

$$BC = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $BC = 8\sqrt{6}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Дано:

$\triangle ABC$

АХ - бисс-са

М - сер. ВС

$(MY) \parallel AX$

$MY \cap AC = Z$

$MY \cap (AB) = Y$

$AC = 18$

$AZ = 6$

$YZ = 8$

Найти:

BC - ?

Решение:

①  $AC = AZ + ZC$ ;  $AC = 18$

$AZ = 6 \Rightarrow ZC = 12$

② Проведем через т. С прямую, параллельную АХ.

$AX \parallel TC \parallel YM$ ;  $TC \perp (AB) = T$ .

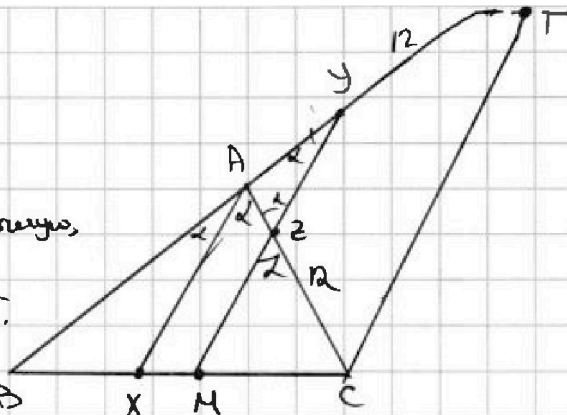
③ Пусть  $\angle BAX = \angle XAC = \alpha$ .

тогда:  $\angle YCM = \alpha = \angle BAX$  (как <sup>соответственные</sup> ~~накрест лежащие~~)

$\angle MZC = \alpha = \angle XAC$  (как <sup>соответственные</sup> ~~накрест лежащие~~)

$\Rightarrow \angle MZC = \angle AZY = \alpha$  (как вертикальные)

$\Rightarrow \triangle ZAY - \text{р\i{o}} (т.к. \angle AZY = \angle AYZ = \alpha) \Rightarrow AZ = AY = 6$



④  $\triangle CAT$ :  $\angle AZY = \angle ACT = \alpha$  (как <sup>соответственные</sup> ~~накрест лежащие~~)

при параллельных прямых  $CT \parallel ZY$  ( $ZY \in MY$ ,  $MY \perp AX$ )

и  $\angle ATC = \angle AYZ = \alpha$  аналогичным образом.

$\Rightarrow \triangle CAT - \text{р\i{o}} (т.к. \angle ACT = \angle ATC = \alpha) \Rightarrow AT = AC = 18$

⑤  $\triangle ZAY \sim \triangle CAT$  (по 2-м углам).

$$k = \frac{AZ}{AC} = \frac{YA}{AT} = \frac{ZY}{TC} \neq$$

$$k = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}; \Rightarrow ZC = 12(AC - AZ)$$

$$\Rightarrow YT = 12$$

$$\Rightarrow AT = AC; \quad YT = AT - AY; \quad YT = 18 - 6 = 12$$

⑥  $\triangle CBT$ :  $MY \parallel CT$ ; М - середина ВС  $\Rightarrow$

Y - середина BT.  $\Rightarrow BY = YT = 12$

(по т. Фалеса)

$$BY = BT + TY = 12$$

$$BY = 6 + BT = 12$$

$$BT = 6$$

⑦  $\triangle AZY$ : по т. косинусов:  $AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2AY \cdot YZ \cdot \cos \alpha$

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha; \quad 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 64 - 12 \cos \alpha = 8; \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(задание 5)  $7 - 25 = 4(x+4)(3-x) - 18\sqrt{x+4}\sqrt{3-x}$   
 $-18 = 4(x+4)(3-x) - 18\sqrt{x+4}\sqrt{3-x}$   
 $-9 = 2(x+4)(3-x) - 9\sqrt{x+4}\sqrt{3-x}$   
 $9\sqrt{x+4}\sqrt{3-x} = 2(x+4)(3-x) + 9$   
 $81(x+4)(3-x) = 4(x+4)^2(3-x)^2 + 36(x+4)(3-x) + 81$

$$4(x+4)^2(3-x)^2 - 45(x+4)(3-x) + 81 = 0$$

$$4(x+4)^2(x-3)^2 + 45(x+4)(x-3) + 81 = 0$$

Замена:  $(x+4)(x-3) = t$

$$4t^2 + 45t + 81 = 0$$

$$D = 45^2 - 16 \cdot 81 = 9^2 \cdot 5^2 - 16 \cdot 9^2 = 9^2(25 - 16) = 9^2 \cdot 9$$

$$\sqrt{D} = 27$$

$$t_1 = \frac{-45 - 27}{8} = -9$$

$$t_2 = \frac{-45 + 27}{8} = -\frac{9}{4}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 = -9 \\ x^2 + x - 12 = -\frac{9}{4} \end{cases} \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0^{(1)} \\ x^2 + x - 9,75 = 0^{(2)} \end{cases}$$

(1)  $x^2 + x - 3 = 0$

$$D = 1 - 4(-3) = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0, \text{ и } x_2 = 0$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13} - 1}{2} < 3 \text{ - подходит}$$

(2)  $x^2 + x - 9,75 = 0$

$$D = 1 - 4(-9,75) = 1 + 4(9 + \frac{3}{4}) = 1 + 36 + 3 = 40$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{40}}{2} < 0 \text{ - не подходит}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{40}}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} - 0,5 < 3$$

Ответ:  $(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2}), (\sqrt{10}-0,5, \sqrt{10}-0,5)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \quad (*) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \quad (**) \end{cases}$$

$x, y \geq 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3 \geq y \\ x \geq -4 \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ 3 \geq y \geq 0 \end{cases}$$

$$(**): 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2$$

$$2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) + \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4(x-y)(x+y) + \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 2x + 2y) + \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$2(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 2x + 2y) + \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = 0$$

$$2(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 2x + 2y + \frac{\sqrt[4]{3}}{2}) = 0$$

ТАК КАК  $x \geq 0$ ; и  $y \geq 0$ , то

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 2x + 2y + \frac{\sqrt[4]{3}}{2} > 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 0 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 0 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = y \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Проверим, работает ли наша система при  $x=y=0$ .

$$\begin{cases} \sqrt{4} - \sqrt{3} + 5 = 2\sqrt{12} \\ 0 + 0 - 0 = 0 - 0 + 0 \end{cases} \begin{cases} 7 - \sqrt{3} = 2\sqrt{12} \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} 7 = 5\sqrt{3} - \text{неверно} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=y=0$  - не является решением.

$\Rightarrow x=y \neq 0$

$$\Rightarrow (*) \quad \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} - 5$$

$$x+4 + 3-x - 2\sqrt{x+4}\sqrt{3-x} = 4(x+4) - 5 - 2\sqrt{x+4}\sqrt{3-x}$$

$$7 - 25 = -18\sqrt{\dots}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x = a_1 + d$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3d$$

$$a_8 = -6x^2 = a_1 + 7d$$

$$a_8 - a_2 = 6d = -6x^2 - 12 + 12x$$

$$d = -x^2 + 2x - 2$$

$$a_1 = a_2 - d = 12 - 12x + x^2 - 2x + 2 = x^2 - 14x + 14$$

$$a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 = x^2 - 14x + 14 + 3(-x^2 + 2x - 2)$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 = x^2 - 14x + 14 - 3x^2 + 6x - 6 \quad \text{3y} = 2x - 6 \quad \text{3}$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \quad -1, -2, -4, -8$$

22

$$10x + 5y = ? \quad \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$|2x - 3y| \leq 6 \quad -2^3 + 9 - 1 = 0 \quad -2 - \text{корень} \quad -2x + 3y - 6 = 0$$

1.  $2x - 3y$

$$2x \geq 3y \cdot \frac{3}{2} \quad x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \quad x + 2$$

$$3x \geq 4,5y \quad \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \\ \underline{-6x^3 + 18x^2} \\ 6x^2 + 12x \end{array}$$

$$2x \leq 3y$$

$$1. \quad 2x - 3y \geq 0$$

$$2x \geq 3y \cdot \frac{3}{2}$$

$$3x \geq 4,5y$$

$$\begin{array}{r} -6x^2 + 8x \\ \underline{-6x^2 + 12x} \\ -4x - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x - 8 \\ \underline{-4x - 8} \\ 0 \end{array}$$

$$-1, -2, -4$$

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x = -2 - \text{корень}$$

$$-2^3 + 6 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$-8 + 24 - 12 - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 =$$

$$= 16 + 8 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{2} = -2 - \sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \quad |x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ 4x^2 + 6x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 6x \\ \underline{4x^2 + 8x} \\ -2x - 4 \end{array}$$

$$-2x - 4$$

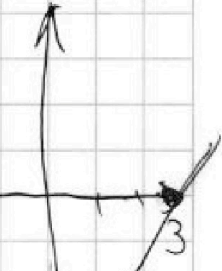
$$-2x - 4$$

$$0$$

$$\begin{aligned} x^8 &= -4 \\ x^4 &= -10 - 4\sqrt{2} = \\ &= -10 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$4 + 2\sqrt{2} + 14$$

36





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1$$

$$a_2 = 12 - 2x = a_1 + d \quad x = ?$$

$$a_3 =$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3d$$

$$a_8 = -6x^2 = a_1 + 7d$$

$$a_1 + 3d - a_1 - d = a_4 - a_2$$

$$a_4 - a_2 = (x^2 + 4x)^2 - 12 + 2x$$

$$a_1 + 7d - a_1 - d = a_8 - a_2$$

$$6d = -6x^2 - 12 + 2x$$

$$6d = 2x - 2 - 6x^2$$

$$a_2 - a_8 = 12 - 2x + 6x^2$$

$$-6d = 6x^2 - 2x + 2$$

$$d = x^2 - 2x + 2$$

$$d = x^2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{12 - 2x - 2x + 2 + 6x^2}{6} = x^2 - 14x + 14$$

~~12 - 2x~~

$$a_3 = \frac{(x^2 + 4x)^2 - 12 - 2x}{2}$$

$$12 - 2x = a_1 + x^2 - 2x + 2$$

$$10 - 10x - x^2 = a_1$$

$$a_1 = 10 - 10x - x^2$$

$$a_3 = \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12 - 2x}{2}$$

$$a_3 = 0,5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - x + 6$$

$$10 - 10x - x^2 + 3(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 4x)^2$$

$$10 - 10x - x^2 + 3x^2 - 6x + 6 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$2x^2 - 16x + 16 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 16x - 16 = 0$$

корни:

$$-2 \quad 2 \quad -4 \quad 4$$

$$a_1 = 12 - 2x + x^2 - 2x + 2 = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 14 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 - 16 = 8$$

$$= 14 - 14x + x^2$$

$$a_8 - a_2 = 6d$$

$$-6x^2 + 12x - 12 = 6d$$

$$-x^2 + 2x - 2 = d$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \underline{16x^4} \\ 16x^2 - 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ x^4 \\ \underline{18x^4} \\ 18x^2 - 18 \end{array}$$

$$a_4 = x^2 - 14x + 14 + 3(2x - 2 - x^2) =$$

$$= (x^2 + 4x)^2$$

$$x^2 - 14x + 14 + 6x - 6 - 3x^2 =$$

$$= x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$-2x^2 - 8x + 8 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$2^4 - 2^5 + 18 \cdot 2^2 + 16 - 8 = 0$$

$$16 - 32 + 72 - 16 - 8 = 0$$

$$16^2 - 16^2 \cdot 2 + 14 \cdot 16^2 - 16 \cdot 5 = 0$$

$$16(16 - 32 - 5) + 14 \cdot 16 = 0$$

$$-21 \cdot 16 + 14 \cdot 16 = 0$$

$$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$4^3 - 2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4 - 8 - 2 = 0$$

$$-64 + 72 - 8 - 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

$$m-2n = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$mn = t$$

$$m-2n = k$$

$$\begin{cases} k(k+13) = 17p^2 \\ k(k-2) = 15q^2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$k = 17l$$

$$\text{или } k+13 = 17l$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \quad y \geq 0$$

$$2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) + 4\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 2x + 2y) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0, \quad x-y$$

$$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$x^5 - 4x^4y + 6x^3y^2 - 4x^2y^3 + y^4x - yx^4 + 4x^3y^2$$

$$(x-y)(x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4) = x^5 - yx^4 - 4x^4y + 4x^3y^2 + 8x^2y^3 - 8x^2y^3 - 4x^2y^3 + 4xy^4 - y^5$$

$$(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$x^5 + 4x^4y - 8x^3y^2 + 4x^2y^3 + xy^4 - yx^4 + 8x^2y^3 - 4xy^4 - y^5 = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})$$

$$x^5 + x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 - yx^4 - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 - y^5$$

$$x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 - yx^4 - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5$$

$$(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+2x+2y) + \sqrt{3}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$\downarrow$   
 $= 0$  при  $x=y=0$

$$(3-x)((x+4) \cdot 1 + 1 + 4\sqrt{x+4})$$

$$(3x+12)4 - 4x(x+4) + 3 + 12\sqrt{x+4} - x - 4x\sqrt{x+4} = x(x+2\sqrt{x+4})$$

$$-81 \quad 55 \quad 45 \quad 36 \quad 12x+48-4x^2-16x+34-x+4\sqrt{x+4} \cdot 3 -$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+2x+2y+\sqrt{3}) \sqrt{3} = 0$$

$\frac{2}{\sqrt{5}} - 45$     ①  $x=y=0$   
 $\frac{2}{\sqrt{2}} - 45$     ②  $x=y=0$  и др.

$81 \cdot 25 = 18 \cdot \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$   
 $81(25+6) = k \cdot y$  - при  $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$   
 $= 81 \cdot 9$      $y, x$  - решение.

$$-12 + \frac{9}{4} = 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 1 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$2,25-12 \quad x+4 \quad -2\sqrt{(x+4)(3-x)}$$

$0,25-10$   
 $4,75$

$$a-b+5 = 2ab$$

$$a+5 = b(2a+1)$$

$$\frac{a+5}{2a+1} = b$$

$$a^2 - b^2 + 5 = 2ab$$

$$\frac{a+5}{2a+1} - b$$

$$\sqrt{\frac{x+4+5}{2\sqrt{x+4}+1}} = \sqrt{3-x}$$

$$1 + 4 \cdot 3 =$$

⑬

$$4 \cdot 9 \cdot 75 + 1$$

$$36 + \frac{75 \cdot 4}{100}$$

$$36 + 3 + \frac{3}{4}$$

⑩

$\sqrt[4]{3^4}$   
 $\sqrt[3]{3^3}$   
 $3^{\frac{2}{3}}$   
 $3^{\frac{2}{3}}$   
 $3^{\frac{1}{2}}$

ЗАБЫТЬ  
 гвоиру!  
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$12-x-x^2$$

$x+4 \geq 0$   
 $3-x \geq 0$

$$x+5+2\sqrt{x+4} = 1$$

$$x+5+2\sqrt{x+4} = (3-x)(\sqrt{4(x+4)} + \sqrt{x+4})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC=18  
AZ=6  
YZ=8

по т. косинусов  
AZ<sup>2</sup> = AY<sup>2</sup> + YZ<sup>2</sup> - 2AYYZcosα  
6<sup>2</sup> = 6<sup>2</sup> + 8<sup>2</sup> - 2·6·8cosα  
2·6·8cosα = 64  
96cosα = 64  
cosα = 2/3

sin2α = 2sinα·cosα

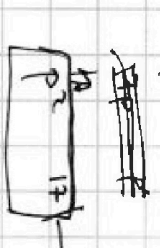
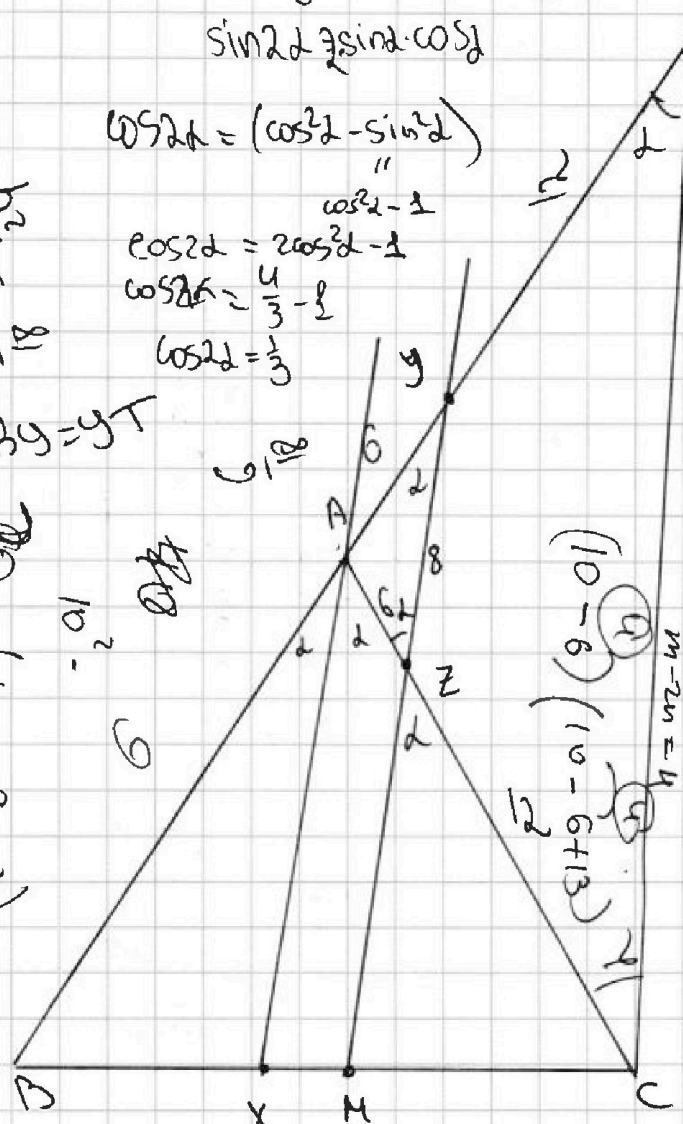
cos2α = (cos<sup>2</sup>α - sin<sup>2</sup>α) / (cos<sup>2</sup>α + sin<sup>2</sup>α)

cos2α = (2/3<sup>2</sup> - 1) / (2/3<sup>2</sup> + 1) = (4/9 - 1) / (4/9 + 1) = (-5/9) / (13/9) = -5/13

1/2 \* 18 \* 18 \* (-5/13) = -513/13

B<sub>Y</sub> = YZ

1/2 \* 18 \* 18 \* (-5/13) = -513/13



A = m<sup>2</sup> - 4mn + 4n<sup>2</sup> + 13m - 26n = (m-2n)<sup>2</sup> + 13(m-2n)  
B = m<sup>2</sup>n - 2m<sup>2</sup>n - 2mn = m<sup>2</sup>n(m-2n-2)  
(m-2n)(m-2n+13) = 17p<sup>2</sup>  
p = 17  
m-2n = 4  
m-2n+13 = 17  
m-2n = 4  
m = 4+2n

(m-2n)(m-2n+13) = 17p<sup>2</sup>  
(m-2n) · m = 15p<sup>2</sup>  
(m-2n) · m = 15p<sup>2</sup>  
m-2n+13 = 17p<sup>2</sup>  
m-2n = 4  
m = 4+2n

(10-6) · (10-6+13) = 17p<sup>2</sup>





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5  
2

$$6^2 = 6^2 + 18^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \cos 2$$

$$2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \cos 2 = 8^2$$

$$3 = 2$$

$$\frac{6}{\sin 2} = \frac{8}{\sin(180-2)}$$

$$BX = \frac{AB \cdot XC}{AC}$$

$$\frac{S_{PBC}}{XC \cdot AB \cdot 2} = \frac{AB+6}{AB} = \frac{AC \cdot BY}{AB \cdot 2} = \frac{BM \cdot AC}{AB \cdot XC}$$

$$\frac{BY}{AB} = \frac{BM}{BX}$$

$$S_{PBC} = (AB+6) \cdot XC$$

$$180 - (180 - 2) = 2$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$$

$$BY = XT$$

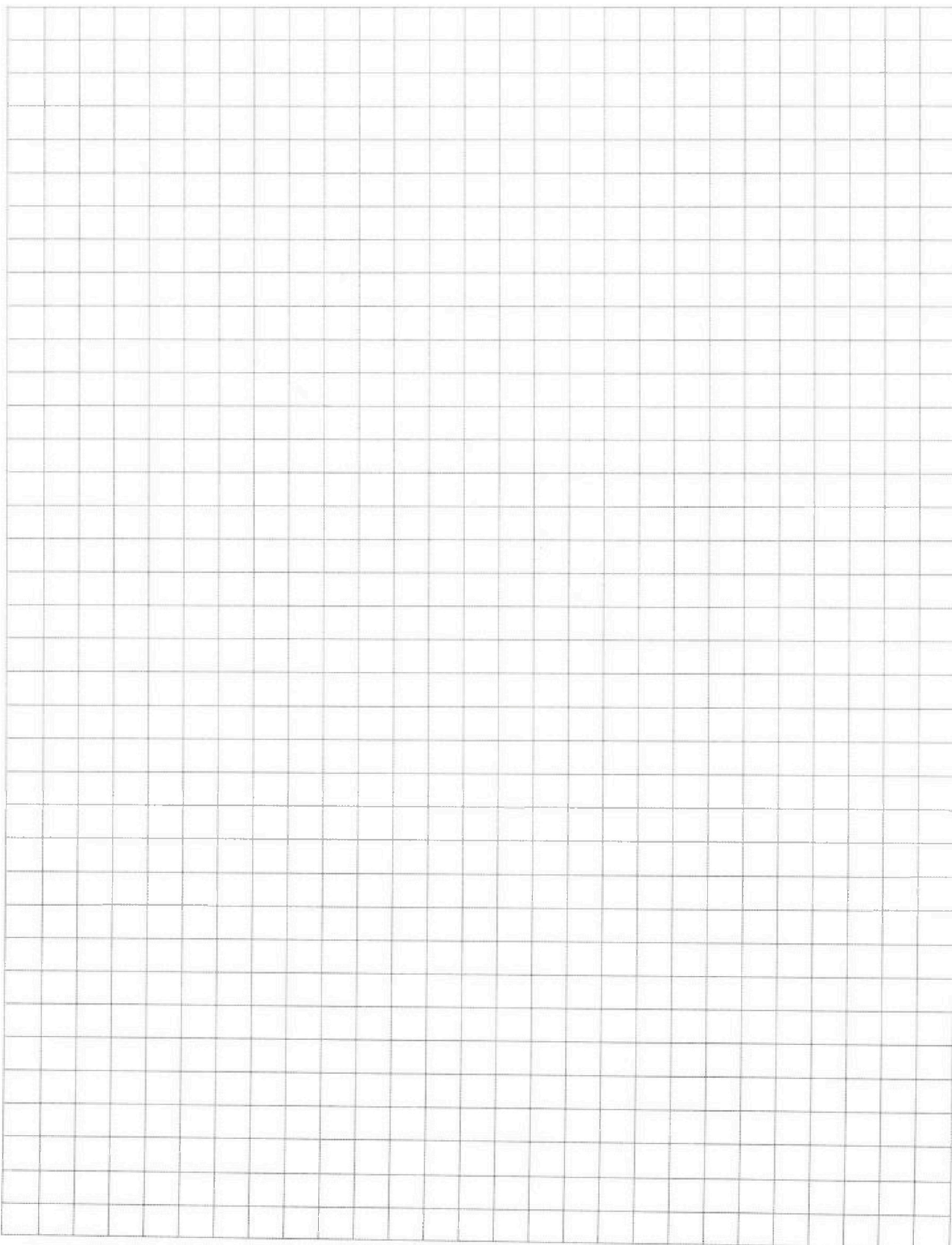


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 24

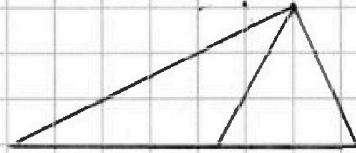
Вино:

$\triangle ABC$

AK-высота

4  
2.2 ~~36~~  
39

18  
(20-2)(20-2)  
400-40-40+4



$$\begin{array}{r} 384 / 4 \\ 36 \quad 96 \\ \hline 24 \quad 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 36 \\ \hline 360 \\ 396 \end{array}$$

324  
+ 26.18.1  
360  
396

9.96

96 | 10

96 = 12.8 = 24 (32.3)

$$\begin{array}{r} 396 / 4 \\ 36 \quad 99 \\ \hline 36 \quad 4.9 \end{array}$$

384 = 4.96 = 4.32.3

2.2.2.2.2.3 (4)  
8.16

a - b + 5 = 24  
a + 5 = 24 + b  
a + 5 = 24 + 1 + b  
2a + 1 = 6

