МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
CAM

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9$

Это квадратное уравнение, а значит, оно имеет два различных действительных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант больше нуля. Произведение корней положительно тогда и только тогда, когда они оба положительны или оба отрицательны

$$D = 32t^2 - 4(9t^2-9) = \cancel{68t^2}\ 36 - 4t^2 = 4(3-t)(3+t)$$

$$x_1 = \frac{-4\sqrt{2}t + 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2}$$

$$x_2 = \frac{-4\sqrt{2}t - 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2}$$

I сл.

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} > 0 \\ -2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{9-t^2} > 2\sqrt{2}t \\ -2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-3 < t < 0$$

~~$\sqrt{9-t^2} >$~~

При ограничениях $-3 \le t \le 0$ первое неравенство из системы всегда будет истинным, так как его левая часть всегда положительная, а правая отрицательная или 0.

Проверяем второе неравенство.

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2} \\ -3 \le t \le 0 \end{cases} \qquad a = -t$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}a > \sqrt{9-a^2} \\ 0 \le a \le 3 \end{cases}$$

$$8a^2 > 9 - a^2$$

$$9a^2 - 9 > 0$$

$$a^2 - 1 > 0$$

~~$a > \sqrt{1}$~~ $\quad a^2 > 1$

~~$a > 1$~~ $\quad (-t)^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -t > 1 \\ -t < -1 \end{array} \right.$

невозможно так как $t < 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что

$-3 \leq t < -1$ ~~$t\in$~~

Ответ: $t \in [-3; -1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$a-b=12$

$a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4$

Заметим, что a и b или оба чётные, или оба нечётные, тогда $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ всегда $\vdots 2 \Rightarrow p=2$, т.к. других простых чётных чисел не существует.

Получаем

$a=12+b$

~~$144+24b+b^2+2b(12+b)+36+3b+b^2+3b=19\cdot 2^4$~~

~~$144+24b+b^2+24b+2b^2+3b+3b+b^2+3b=19\cdot 16$~~

~~$4b^2+57b+144=19\cdot 16$~~

~~$4b^2+57b-160=0$~~

~~$D=57^2+160\cdot 16=$~~

$a^2+2ab+b^2+3a+3b=144+24b+b^2+24b+2b^2+b^2+$

$+36+3b+3b=19\cdot 16$

$4b^2+54b+180=304$

$4b^2+54b-124=0$

$D=54^2+124\cdot 16=2916+1984=4900=70^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = \frac{70-54}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b_2 = \frac{-70-54}{8} < 0$$, не подходит, т.к. не является натуральным

Поэтому $b = 2$, $a = 14$

Ответ: ~~2, 1~~ $a = 14$; $b = 2$

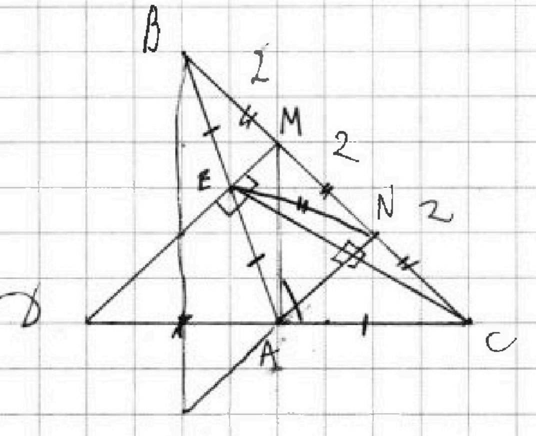
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$



1. т.к. $AN \parallel MD$ и N - ср MC, AN - средняя линия в $\triangle MCD$, значит A - середина CD

$AD = AC = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$

Пусть E - точк пересечения MD и AB.

В $\triangle ANB$, $M\cancel{A}\,\overset{AN}{\cancel{AN}} \parallel \cancel{MD}$ и M - середина BN,

значит $BE = EA = \frac{AB}{2}$

Получаем, что $AD = AC = BE = EA$

Значит, AN является биссектрисой в $\triangle ABC$ (так как делит противолежащую сторону в отношении сторон)

2. CED прямоугольный, т.к. медиана EB равна половине стороны CD. Получаем, что $\cancel{A}$ $MD \perp CE$ и $AN \perp \cancel{B}CE$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из-за того, что AN биссектриса $\angle CAB$,

то $2\angle CAN = \angle CAB$

Пишем теорему косинусов в $\triangle ABC$ и находим оттуда сторону.

Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$

$$4x^2 + x^2 + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x^2 = 36$$

$$8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 3$$

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Возьмём трёх конкретных учеников. В ряд их можно рассадить одним единственным способом.

Если в ряду есть пустое место, то ~~р~~ способов рассадки уже ~~целых три.~~ четыре.

Б – большой, М – маленький, О – пустота

Б	М	М	О
О	Б	О	М
М	О	Б	Б

Поэтому всего способов рассадки = кол-во способов разбить учеников на группы по 3 человека $\cdot 4 \cdot 4!$, т.к. в каждом есть ещё три дополнительных способа для ряда с пустотой и ряды можно менять местами ~~получаем по формуле шаров и перегородок~~:

Получаем:

$\cancel{C_{12}^3 \cdot C_9}$ $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4!$

Ответ: $\frac{4 \cdot 11! \cdot 4!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2}$ сп.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Так как на острове из любой деревни можно добраться в ~~любую~~ и одним единственным способом, то граф, где деревни будут являться вершинами, а дороги – рёбрами, будет являться деревом по определению.

А значит, в таком графе будет n вершин и n-1 ребро.

Пусть на нашем острове k деревень, тогда всего ~~должно~~ ~~быть~~ будет $\frac{k-4+5+6+7+9}{2}$ дорог, а т.к. граф является деревом, то дорог должно быть $k-1$

Получаем:

$$\frac{k+23}{2}=k-1$$

$$k+23=2k-2$$

$$k=25$$

Ответ: 25 деревень.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим $\sqrt{1-|x-y-1|}$; т.к. x и y целые, то $1-|x-y-1|$ тоже целое, а значит может равняться только 0 и 1 (т.к. модуль всегда ≥ неотр.)

I) $1-|x-y-1| = 1$

$|x-y-1| = 0$

$x-y-1=0$

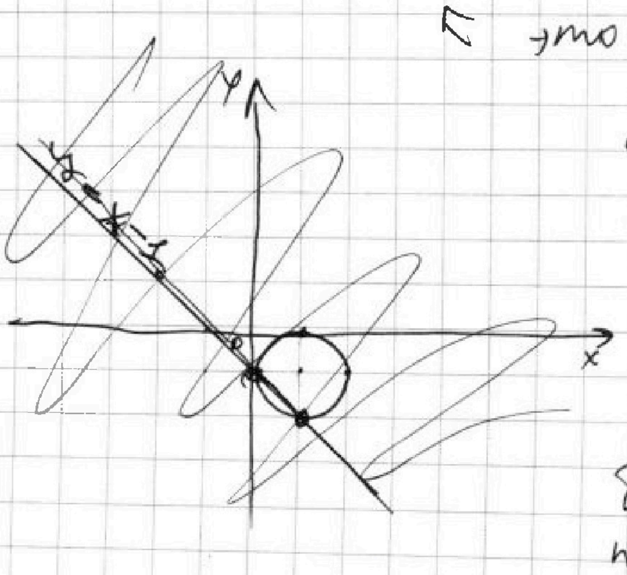
$x=y+1$ $\quad y=x-1$ это прямая

тогда $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 1$

$2x-2y-x^2-y^2=1$

$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

← это окружность с радиусом 1 и центром в т. $(1;-1)$



решением системы

$$\begin{cases} x=y+1 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=1 \end{cases}$$

будут являться пересечения прямой и окр-ти.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

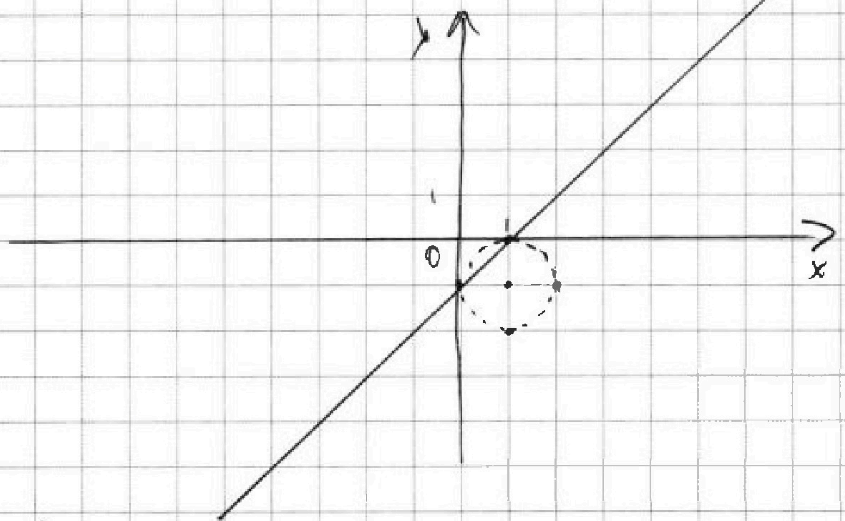
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На графике видно, что это точки

~~(0;-1) и (~~ $(0;-1)$ и $(1;0)$



б) $1-|x-y-1|=0$, тогда

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}=2$

$2x-2y-x^2-y^2=4$

$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y+1)^2}_{\geq 0}=-2$

Ответ: $(0;-1)$; $(1;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒ СТРАНИЦА – ИЗ –

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Было сказано, что $\cos(2\angle CAM) = -\frac{3}{4}$

Пусть $\cos\angle CAM = x$, тогда

$\cos 2\alpha = 2x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$

$2x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$

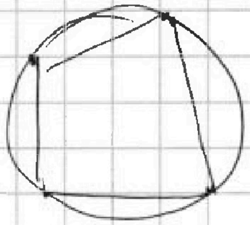
$x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, т.к. $\angle CAM$ лежит в первой четверти, иначе ~~AB~~ γ лежала бы за точкой C

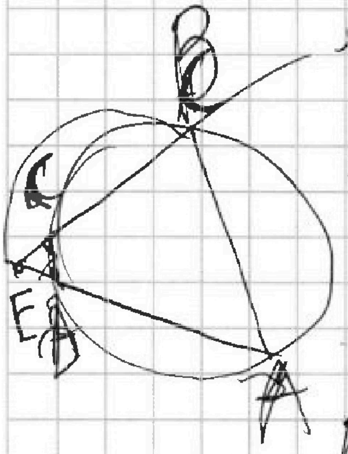
Дано: $BC = 6$

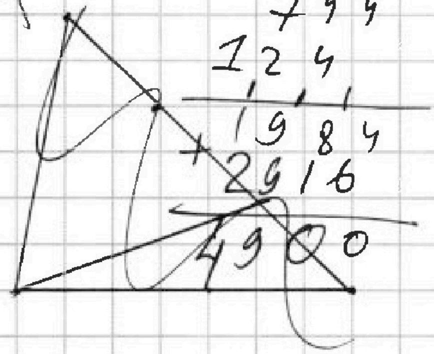
$\cos\angle$

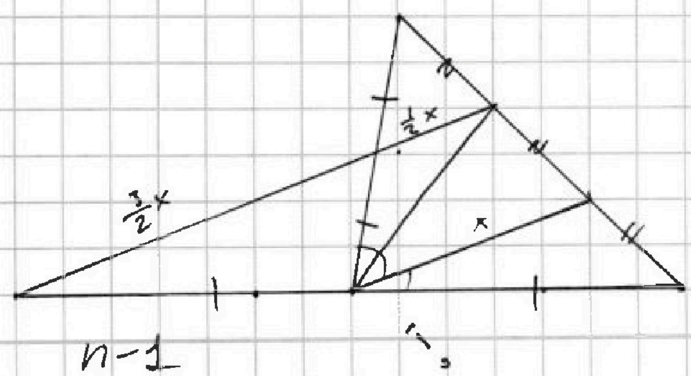
$\times\frac{54}{54}$, 216, 270, 2916

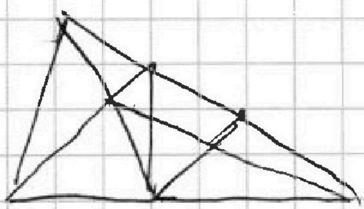
$\times\frac{124}{16}$, 744, 124, 1984, $+$ 2916, 4900











$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$n-1$

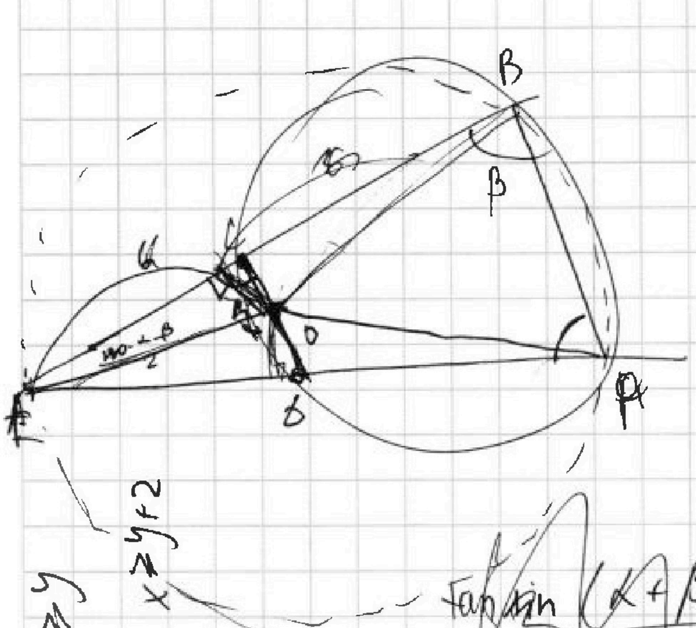
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

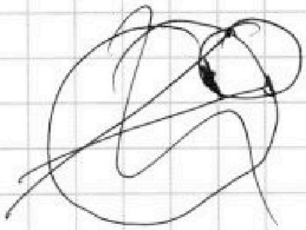
СТРАНИЦА – ИЗ –

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$ED = \frac{BE}{EC}\cdot$



$\frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA}\cdot EC$



$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2}$

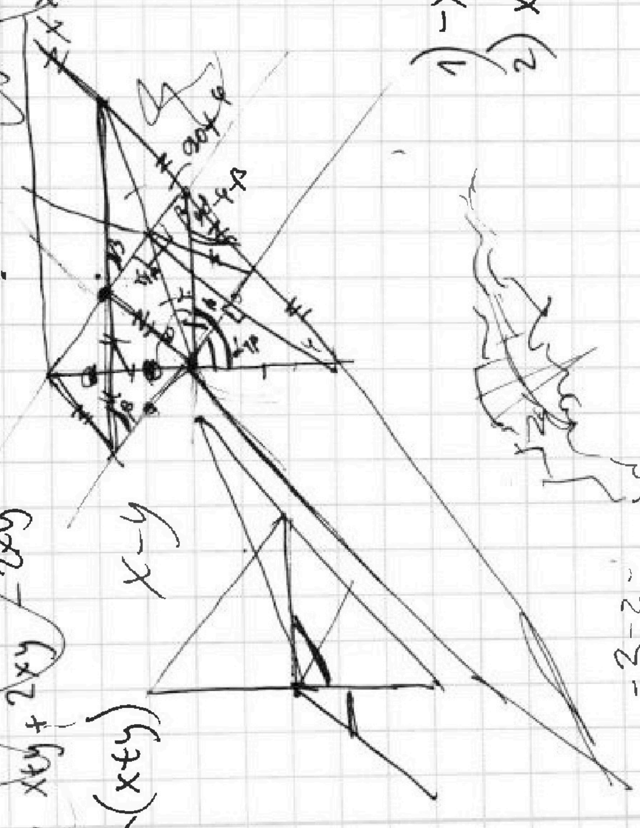
1) $-x+y+1 \le 1 \quad x \ge y$

2) $x-y-1 \le 1 \quad y+2 \ge x$

$x \ge y \quad x \ge y+2$

$x-y-1 \ge -1$

$-x+y+1 \le 1$



$(x-y)(x-y+2)+2xy>0$

$(x+y)^2+2x-2y+2xy>0$

$x+y+2xy-2xy$

$2(x+y)$

$x-y$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

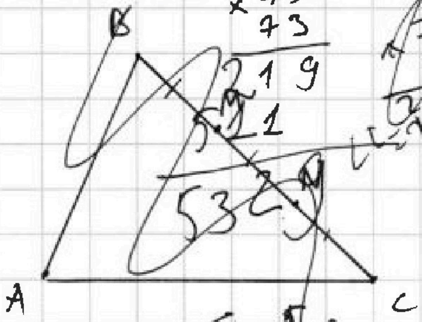
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 1 ИЗ –

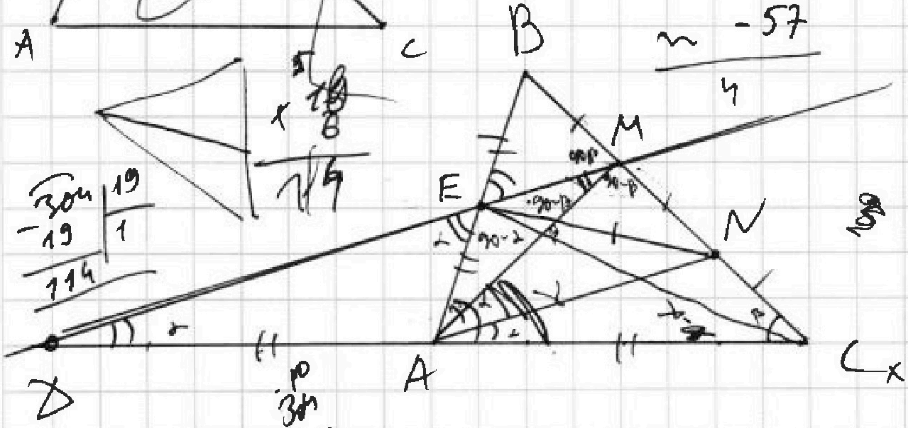
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

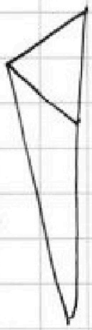
Задача 3.

Было сказано, что $\cos(2\angle CAM) = -\frac{3}{4}$



$\angle B = 180 - \beta - \alpha$





$BC = 6$

$\cos(2\angle CAM) = -\frac{3}{4}$

$AB = CD$

$AB = 2AC$

Назовём точку пересечения MD и AB E

ME в $\triangle ABN$ будет являться средней линией (т.к. параллельна основанию и проходит через середину BN), поэтому $AE = EB$

AN средняя линия

$2\cos^2 - 1 = -\frac{3}{4}$

$2x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$2\cos^2 - 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$

$|x-y-1| \leq 1$

а) $x>0$, $y>0$; $x-y-1 \leq 1$; $x \leq y+2$

б) $x>0$, $y<0$; $x+y-1 \leq 1$; $x \leq 2-y$

в) $x<0$, $y>0$; $-x+y-1 \leq 1$

~~а) $1 \geq x-y-1 > 0$~~

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$

$2x-2y-x^2-y^2 = 4$

$x^2+y^2-2x+2y+4=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2+2=0$

и

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 0$

$2x-2y-x^2-y^2=0$

(x^2-1)

$\uparrow max$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = k$

$2x-2y-x^2-y^2 = k^2$

$(x-1)^2+(y+1)^2+k^2-2=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2 = 2-k^2$ $\Rightarrow k=\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!