



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть  $q$  - множитель геометрической прогрессии. Тогда:

$$\begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot q^2 = (x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) \cdot q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \\ \sqrt{(25x-9)^3(x-6)^3} \cdot q^6 = (x+3)^3 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-6 \neq 0 \\ (25x-9)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ (x-\frac{9}{25})(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty) \end{cases}$$

Для  $x = \frac{9}{25}$ :

$$\neq \left(\frac{9}{25} + 3\right) q^6 = 0 \quad \text{П.к } q \neq 0, \text{ то нет корней} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot q^2 = \frac{9}{25} + 3 \\ \neq x \neq \frac{9}{25} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$$\text{П.к } q^6 > 0 \text{ и } \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \geq 0, \text{ то } x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$$

$$x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \Rightarrow$$

Из системы следует:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \sqrt{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{(25x-9)^4}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ (x+3)^2 = 9-25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+9-25x+9=0 \\ x^2+6x+9-9+25x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x^2 + 31x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-18) = 0 \\ x(x+31) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 18 \\ x = 0 \\ x = -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \\ x \in (-3; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty) \end{cases}$$

1) При  $x=18$ :  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{450-9}{(18-6)^3}} = \sqrt{\frac{441}{12^3}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 9}{12 \cdot 12 \cdot 12}} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x+3=21 \Rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{6} \cdot 12})^6} \cdot 21 = \frac{21}{6\sqrt{8}} = \frac{21}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7}{24} \sqrt{3}$   
 $\Downarrow$   
 $x=18$  подходит

2) При  $x=0$ :  
 $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$

$$x+3=3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$3 \cdot \frac{1}{(\sqrt{6})^6} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Rightarrow x=0 \text{ подходит.}$$

Ответ:  $x=0, x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x-4z \geq 0 \\ y-4x-x^2+z \geq 0 \\ 81-z^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ -x \leq 5 \\ 4z \leq 1-x \leq 6 \\ y \geq 4x+x^2+z \\ z \in [-9; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ z \leq \frac{3}{2} \\ \text{Т.к. } x \geq -5 \rightarrow -z \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq -20 \text{ Т.к. } x^2 \geq 0 \\ y \geq -20 - \frac{3}{2} \\ z \in [-9; 9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq -2,5 \\ z \in [-9; \frac{3}{2}] \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (2) отдельно:

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$\begin{cases} y < -4 \\ -y-4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ y+4-4y+20 = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ y+4+4y-20 = \sqrt{81-z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y+16 = \sqrt{81-z^2} \\ -4 \leq y < 5 \\ 24-3y = \sqrt{81-z^2} \\ y \geq 5 \\ 5y-16 = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к.  $z^2 \geq 0$ , то  $81 - z^2 \leq 81 \Rightarrow \sqrt{81 - z^2} \leq 9 \Rightarrow$  <sup>это и</sup> ~~исследовать~~ ~~следует~~

$$\begin{cases} y < -4 \\ -5y + 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ -5y \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -4 \\ y \geq \frac{7}{5} = 1,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ 24 - 3y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ -3y \leq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y < 5 \\ y \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = 5$$

$$\begin{cases} y \geq 5 \\ 5y - 16 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ 5y \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 5 \\ y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|y+4| + 4|y-5| = |9| + 4|0| = \sqrt{81 - z^2}$$

$$9 = \sqrt{81 - z^2}$$

$$81 = 81 - z^2$$

$$z^2 = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow$$

Подставим  $y$  и  $z$  в уравнение (1):

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 0 + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x^2+4x-5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{-(x-1)(x+5)}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(1-x)(x+5)}$$

$$4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5} = 0$$

Заметим, что  $\sqrt{x+5}$  - возрастающая функция,  $\sqrt{1-x}$  убывающая  $\Rightarrow$   $4 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+5}$  - возрастающая функция  $\Rightarrow$  у уравнения одно решение. Подходит  $x =$  ~~ни более 1 решение~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$4 + \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$~~

~~$$16 + x + 5 + 8\sqrt{x+5} = 1 - x + 4(1-x)(x+5) + 2(1-x)\sqrt{x+5}$$~~

~~$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 4(5 - x^2 - 4x) + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$~~

~~$$20 + 2x + 8\sqrt{x+5} = 20 - 4x^2 - 16x + 2\sqrt{x+5} - 2x\sqrt{x+5}$$~~

~~$$4x^2 + 18x + 6\sqrt{x+5} + 2x\sqrt{x+5} = 0$$~~

~~$$2x^2 + 9x + 3\sqrt{x+5} + x\sqrt{x+5} = 0$$~~

~~$$x^2 + 6x + x(x+3) + \sqrt{x+5}(x+3) = 0$$~~

~~$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 = x+5 + 1-x - 2\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{1-x} = 6 - 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5}$$~~

$$4 = (\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 - 2 + 2\sqrt{1-x}\sqrt{x+5} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})^2 + \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1) = 2$$

Пусть  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = a$ :

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{1-x}$$

$$x+5 = 1 + 1-x + 2\sqrt{1-x}$$

$$2\sqrt{1-x} = 2x+3$$

$$4-4x = 4x^2 + 12x + 9$$

$$4x^2 + 16x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm 4\sqrt{11}}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

Ответ:  $(-2 + \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0)$ ,  $(-2 - \frac{\sqrt{11}}{2}; 5; 0)$ .

Пусть  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = -2$

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} - 2$$

Т.к.  $x \in [-5; 1]$ , то:

$$1-x \in [0; 6]$$

$$a(a+1) = 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

$$a = 1, a = -2$$

$$D = 16^2 - 16 \cdot 5 = 16 \cdot 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x) + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 10$$

$$p(\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(\cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$\cancel{(p-3)4 \cos^3 x + 4 \cos x - 4 = 0}$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

Замена:  $t = \cos x \in [-1; 1]$

$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

При  $p=0$ :

$$-3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$3t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

При  $p \neq 0$ :

$$pt^3 - 3t(t-1) - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)(t^2+t+1) - 3t(t-1) = 0$$

$$+ (t-1)(t^2-2t+1) = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt[3]{p-1}t)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[3]{p-1}t + t-1)(\sqrt[3]{(p-1)^2t^2} - (t-1)\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2) = 0$$

$$\text{П.к. } \sqrt[3]{(p-1)^2} + (t-1)\sqrt[3]{p-1} + (t-1)^2 \neq 0$$

1)  $\Delta = \text{П.к. } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), a^2 - ab + b^2 > 0,$   
 т.к.  $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$  при  $b > 0$ , тогда  $t-1 \neq 0$  и  $\sqrt[3]{p-1} \neq 0$ :

$$\sqrt[3]{(p-1)^2} \cdot t^2 - (t-1)\sqrt[3]{p-1} \cdot t + (t-1)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{p-1}t + t - 1 = 0$$

$$t(\sqrt[3]{p-1} + 1) = 1.$$

При  $\sqrt[3]{p-1} + 1 = 0$  нет корней

При  $p=0$ :

$$-1 \leq t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq +1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ p > 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-1 \leq -8 \\ p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \text{ или } t - 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} + 1\right)^3 + 0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} = 1$$

$$p - 1 = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow \text{или } p = 1$$

$$3) \text{ или } \sqrt[3]{p-1} = 0$$

$$p = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{p-1} + t\right)^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(t-1)^3 = 0$$

$$t = 1$$

$\Rightarrow$

При  ~~$p = 0$~~   ~~$p = 0$~~  корней нет  $p \in (-\frac{7}{8}; 1)$  ~~корней нет~~

При  $p = 1$ :  $t = 1$  - единственный корень

При  $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}] \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$  - единственный

корень:  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$

При  $t = 1$ :  $\cos x = 1 \Rightarrow$

При  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$ :  $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: или  $p \in (-\frac{7}{8}; 1)$  корней нет

или  $p \in (-\infty; -\frac{7}{8}]$  единственный корень:

есть 2 корня:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При  $p \in (-4; 1)$  корней нет

При  $p = 1$ :  $t = 1$

При  $p \in (-\infty; 4] \cup (1; +\infty)$ :  $t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}$

т.к.  $x = \pm \arccos t, \pm 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ , то:

Ответ:

при  $p \in (-4; 1)$  корней нет

при  $p = 1$ :  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  - единственные

при  $p \in (-\infty; 4] \cup (1; +\infty)$  есть 2 корня:

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{p-1}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





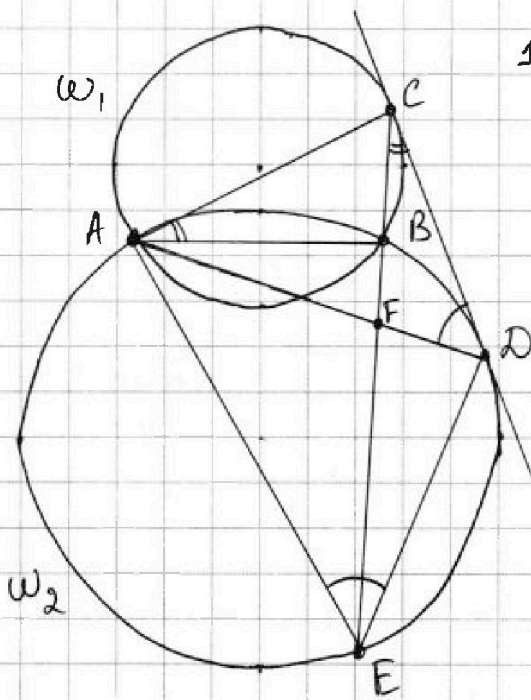
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



1. По условию:  $CF:FE=2:5$

2.  $\angle CDA = \angle DEA$  как угол между хордой и касательной

↓  
~~Точки C, D, E, A лежат на~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

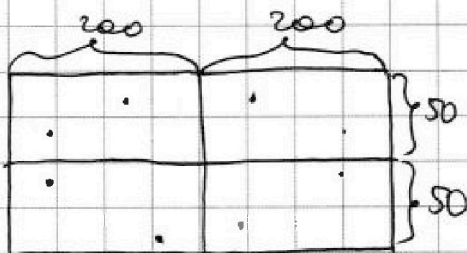
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

55

Средними линиями прямоугольник  $100 \times 400$  делится на 4 прямоугольника  $50 \times 200$ :



Кол-во раскрасок таких, что множество симметрично относительно:

1) горизонтальной средней линии (ГЛ)

$$x = C_{50 \cdot 400}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{выберем 4 клетки в}$$

верхней прямоугольнике  $50 \times 400$ , потом отразим относительно средней горизонтальной)

2) вертикальной средней линии (ВЛ)

$$y = C_{100 \cdot 100}^4 = C_{20000}^4 \quad (\text{аналогично})$$

3) Центра:

~~$$C_{400 \cdot 100}^4$$~~

Выберем 4 пары клеток:  
 ~~$40000 \cdot 39999$~~

$$z = \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{4! \cdot 2^4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Цикла и горизонтальной ор. линии:

Заметим, что если картинка симметрична относительно гр и центра, то она симметрична относительно вл. Если картинка симметрична относительно вл и центра, то она симметрична относительно гр.

Таких картинок:

$$c = C_{100 \cdot 50}^2 \quad (\text{т.к. в каждом прямоугольнике } 200 \times 50 \text{ по 2 клетки})$$

=> По формуле включения-исключения, искомое кол-во способов:

$$A = x + y + z - c - c - c + c = x + y + z - 2c$$

$$A = 2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$$



$$\text{Ответ: } 2 \cdot C_{20000}^4 + \frac{40000 \cdot 39998 \cdot 39996 \cdot 39994}{2^4 \cdot 4!} - 2 \cdot C_{10000}^2$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П6

Рассмотрим условие:

- число  $(a-c)/(b-c)$  - квадрат некоторого простого числа  $\Rightarrow$  Пусть  $p$  - это простое число. Тогда:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$$

П.к.  $a < b$ , то  $a-c \neq b-c \Rightarrow$

$$\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \\ a-c=b-c=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$$

Если  $p \neq 3$ , то  $p \equiv 1 \pmod{3}$  или  $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$   
 $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$  При  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

$$a-c - (b-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\begin{cases} a-b \equiv 0 \pmod{3} \\ b-a \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ Противоречие}$$

При  $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases}$  :  $b-c - (a-c) = 1 - p^2 \equiv 0 \pmod{3}$   
 $b-a \equiv 0 \pmod{3}$

Противоречие  $\Rightarrow$

$p=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=9 \\ b-c=1 \\ a-c=9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \\ b=c+1 \\ a=c+9 \end{cases}$$

При  $b=c+1$  и  $a=c+9$ :  $b < a \Rightarrow$

Противоречие  $\Rightarrow$   
 $\begin{cases} a=c+1 \\ b=c+9 \end{cases}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{Т.к. } a^2 + b = 710, \text{ то:}$$

$$D = 9 + 2800 = 2809 = 53^2$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 710 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 3c - 700 = 0 \\ a = c + 1 \\ b = c + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c = \frac{-3 + 53}{2} \\ c = \frac{-3 - 53}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 25 \\ a = 26 \\ b = 34 \\ c = -28 \\ a = -27 \\ b = -19 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ:  $(26; 34; 25), (-27; -19; -28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

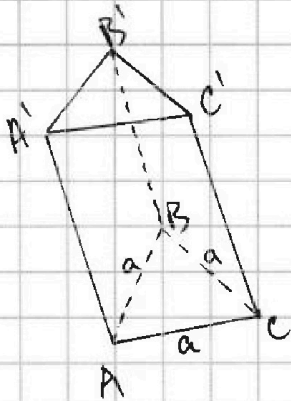
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

57.

Пусть  $h$  - высота призмы. Тогда её объём:

$V = S \cdot h$ , где  $S = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$  - площадь основания призмы.



$a$  - сторона основания призмы (сторона равностороннего треугольника)

Тогда:

$$\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = S = 1$$

$$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



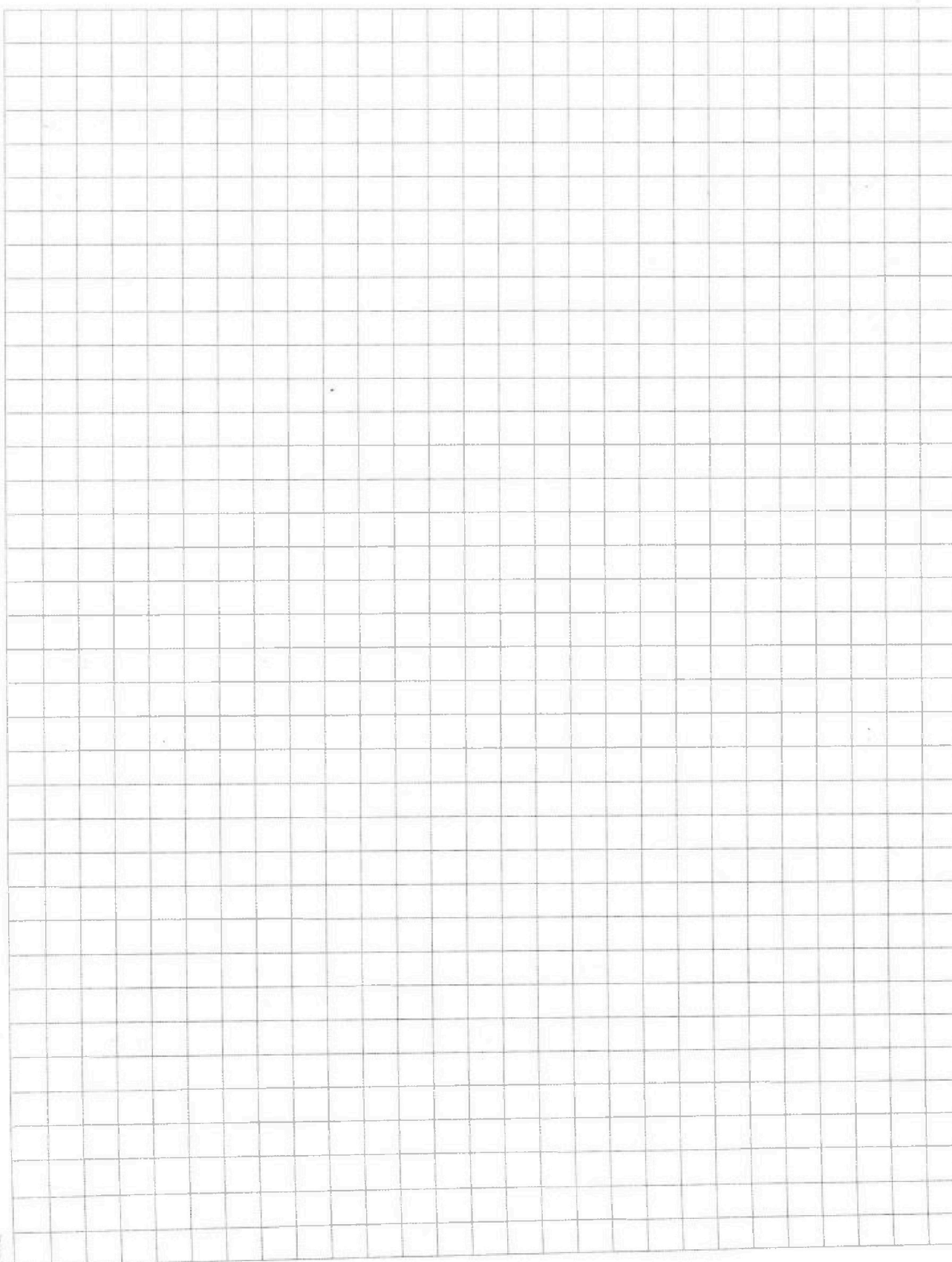


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





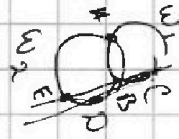
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1



$$(x+3) \cdot 9^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^8$$

$$(25x-9)(x-6) \geq 0$$

$$(x - \frac{9}{25})(x-6) \geq 0$$

$$x \in [\frac{9}{25}; 6]$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

Сумма радиусов

$$(x+3) \cdot 9^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$(x+3) = \sqrt{(25-9)(x-6)} \cdot 9^2$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot 9^6 = (x+3)^3$$

$$\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}^3} = \frac{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}}{(x+3)^3}$$

$$(x+3)^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3} \cdot (25x-9)^3 \cdot (x-6)^2}$$

$$(x+3)^4 = (25x-9)^2 \cdot (x-6)$$

$$(x+3)^2 = \pm (25x-9)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$x_1 = 18, x_2 = 1$$

$$12^3 = 4^3 \cdot 3^3$$

$-5y+16 \leq 9$   
 $-5y \leq -7$   
 $y \geq \frac{7}{5}$

$\sqrt{x+5} + b$   
 $\sqrt{16-x} + d$   
 $ac = -2$   
 $bc = -1$   
 $bd = 4$   
 $ad = 5$

$x^2 - 19x + 18 = 0$   
 $x_1 = 18, x_2 = 1$

$450 \cdot 12 = 25 \cdot 18 = 450$   
 $450 - 9 = 441$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. 
$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}$$

003

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$y-4x-x^2+z = -x(x+4)+z+4$$

$$t = 4z$$
  

$$s_1 = x$$
  

$$y = x - 1$$
  

$$s + x \leq \frac{2}{1-x}$$
  

$$1 = x$$
  

$$4 = x_2$$

$$x+5 + 1-x-4z + 16 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x-4z} + 8\sqrt{x+5} - 8\sqrt{1-x-4z} =$$
  

$$= 4y - 16x - 4x^2 + 4z$$

$$22 - 8z - 4y + 16x + 4x^2 - \dots = 0$$

$$x+5 \geq 0$$
  

$$x \geq -5$$
  

$$-x \leq 5$$

$$1-x-4z \geq 0$$
  

$$4z \leq 1-x \leq 6$$
  

$$z \leq \frac{6}{4}$$

$$y-4x-x^2+z \geq 0$$
  

$$y \geq 4x+x^2-z \geq -20+25-z$$

$$81-z^2 \geq 0$$
  

$$z^2 - 81 \leq 0$$
  

$$-9 \leq z \leq 9$$
  

$$9 \geq -z \geq -9$$

$$y \geq 5-z \geq 4-4$$
  

$$-y \leq 4$$

$$y+4-4y+20$$

$$16-3y = \sqrt{81-z^2}$$

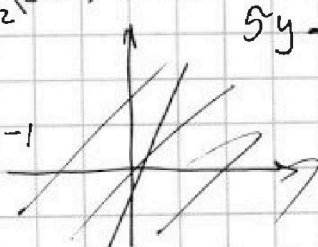
$$xy = hx$$
  

$$y = h+x$$
  

$$x+y = h+x$$

$$x = \frac{h}{2}$$
  

$$x-1$$



$$x \leq 5$$