



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad b_{10} = x+4 \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{q^8}{b} = \sqrt{(x-3)^4} \quad \text{где } q - \text{ частное геон. прогресс.}$$

$$q^4 = \sqrt{(x-3)^2} \quad q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{q^2}{b} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{|x-3|}$$

I. $x-3 \geq 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \quad x+4 \geq 0 \checkmark$

$$\frac{\sqrt{15x+6}}{x+4} = 1 \quad \sqrt{15x+6} = x+4 \quad | \wedge 2$$

$$15x+6 = x^2+8x+16$$

$$x^2-7x+10 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} \quad x = 2 \quad x = 5$$

$\emptyset \quad \checkmark$

II. $x-3 < 0 \Rightarrow 15x+6 \leq 0 \quad x \geq -4$

$$\sqrt{-15x-6} = x+4 \quad | \wedge 2$$

$$-15x-6 = x^2+8x+16$$

$$x^2+23x+22 = 0$$

$$D = 529 - 88 = 441$$

$$x = \frac{-23 \pm 21}{2} \quad x = -22 \quad x = -1 \checkmark$$

\emptyset

Ответ: -1; 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5.

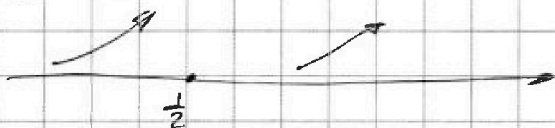
$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Уследим функцию $4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$

$$f'(\cos x) = 12 \cos^2 x - 12 \cos x + 3 = 2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$



Значит, данная функция монотонно возрастает.

$$f_{\min} = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f_{\max} = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

Ответ: $p \in [-10; 4]$



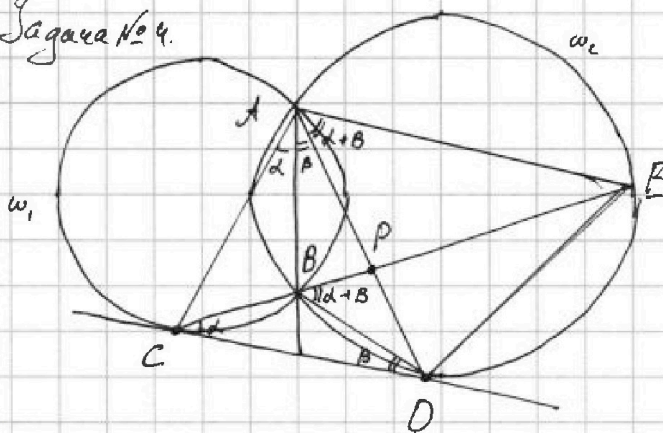
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.



Обозначим за $P =$
 $= CE \cap AD.$

$$\frac{CP}{PE} = \frac{9}{25}$$

Пусть $9x = CP$; тогда
 $PE = 25x.$

Обозначим: $\alpha = \angle CAB$;

$\beta = \angle BAP$. Тогда $\angle BCD = \alpha$, а $\angle BDC = \beta$, как углы между хордой и касательной.

$\angle EPD = \alpha + \beta$, как внешний для $\triangle CBD$.

Тогда $\angle DAE$ также равен $\alpha + \beta$, как вписанный.

$\angle CAP = \angle PAE = \alpha + \beta \Rightarrow AP$ - биссектриса $\triangle CAE \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC : AE = CP : PE = 9 : 25$

Пусть $AC = 9y \Rightarrow AE = 25y.$

$\angle AEP = \angle ADC$ (угол, между касательной и хордой);
 $\angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$ (по двум углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = 25y \cdot 9y = 15^2 \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = 15^2 \cdot y^2 \Rightarrow AD = 15y.$$

Также из подобия:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{9y}{15y} = \frac{3}{5} \Rightarrow ED : CD = 5 : 3$$

Ответ: $ED : CD = 5 : 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5.

Обозначим симметрию отн. вертикальной оси y -симметрией, а относительно горизонтальной оси - x -симметрией.

Рассмотрим, что происходит, если выполнены какие-либо 2 из 3 симметрий:

Композиция двух осевых симметрий - это центральная симметрия.



Композиция x -симметрии и центральной симметрии - это y -симметрия.



А также композиция y -симметрии и центральной симметрии - это x -симметрия.

Следовательно, если выполнены какие-либо 2 симметрии из 3-х, то выполнена и оставшаяся.

Посчитаем, сколько расстановок удовлетворяет каждой симметрии в отдельности:

Для центральной и y -симметрии достаточно расставить в произвольных местах в левой половине поля 4 клетки, тогда расстановка задаётся однозначно. Это можно сделать C_{15000}^4 способами.

Аналогично, для x -симметрии достаточно расставить в верхней половине поля 4 клетки. Это можно сделать C_{15000}^4 способами.

Итого $3 \cdot C_{15000}^4$ способа.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Воспользуемся методом включений и исключений:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, где A_1, A_2 и A_3 - это множества перестановок, в которых выполнены центральная, x-симметрия и y-симметрия соответственно.

Но мы знаем, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. \Rightarrow

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - 2|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Посчитаем кол-во перестановок, удовлетворяющих сразу всем условиям:

В такой расстановке 31-вы расположены по четвертям, образующим прямоугольник с центром, совпадающим с центром исходного квадрата, а значит достаточно и необходимо выбрать 2 квадрата в одном из углов. Это можно сделать C_{7500}^2 способами.

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6.

Пусть $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - простое.

Так как $a-c$, $b-c$ и p^2 - целые, то данное уравнение превращается в совокупность:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = p \\ b-c = p \\ a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

Исходя из того, что $a > b$, может быть выполнена только система $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1$.

$a-b \not\equiv 3 \Rightarrow p^2 - 1 \not\equiv 3$, а так, как квадрат целого числа может быть равен только с 0 или 1, то получаем, что $p^2 \equiv 3 \Rightarrow p \equiv 3$

Но, так как p - простое число: $p = 3$.

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 812$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$b = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$D = 3249 = 57^2$$

$$b = 28$$

$$a = 36$$

$$c = 27$$

$$b = -29$$

$$a = -21$$

$$c = -30$$

Ответ: $(36, 28, 27)$, $(-21, -29, -30)$



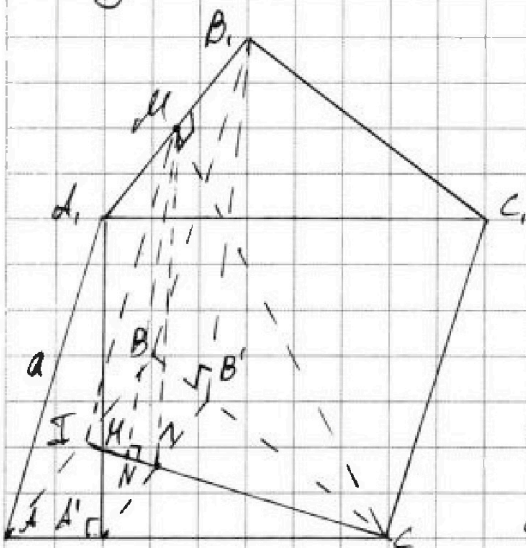
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7.



Обозначим вершины тризмы
 A, B, C, A_1, B_1, C_1 .

(пусть $S_{AA_1CC_1} = S_{BB_1CC_1} = 5$; $S_{AA_1BB_1} = 4$)

$$|AA_1| = a$$

Основания высот к вершинам A_1 и B_1 в четырёхугольнике AA_1CC_1 и BB_1CC_1 — A' и B'

$$S_{AA_1CC_1} = AC \cdot AA_1'; \quad S_{BB_1CC_1} = BC \cdot BB_1' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1' = BB_1'$$

$$AA_1 = \sqrt{a^2 - AA_1'^2}; \quad BB_1 = \sqrt{a^2 - BB_1'^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AA_1' = BB_1' \Rightarrow A'B' \parallel AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1, A_1A'$ и B_1B' лежат в одной плоскости.

$A_1B_1A'B'$ — равнобокая трапеция.

Продлим A_1A' и B_1B' до пересечения. $A_1A' \cap B_1B' = T$.

т.к. $A_1B_1A'B'$ — равнобокая трапеция, то A_1B_1T — равнобедренный треугольник. Проведём медиану TM . $TM \perp A'B' = N$.

т.к. $\triangle A_1B_1T$ — равноб. $MN \perp A_1B_1 \Rightarrow MN \perp A'B'$, а также $A_1N = NB_1$.

Проведём CN . $CN \perp A'B'$ т.к. ABC — правильный.

$\Rightarrow A'B' \perp NMC \Rightarrow$ Высота MN в $\triangle MNC$ — исконая, т.к. $MN \perp CN$ и $MN \perp A'B'$.

Обозначим I — середина AB .

MI — проектор; MI — проекция $\perp AB \Rightarrow MI \perp AB$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$MI \parallel AA_1 \Rightarrow AA_1 \perp AB \Rightarrow AA_1B_1B - \text{прямоугольник.}$

$$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB = 4 \Rightarrow AA_1 = 2.$$

Однако в $\triangle AA_1B_1$ гипотенуза $= 2$, а катеты $2, 5$. Противоречие.

Ответ: такой призмы не существует.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos^3 x +$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x = 9$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = 9$$

$$D = 36 -$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - 9 = 0$$

$$4 \cos x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos x$$

$$7 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x - 6 \cos^3 x$$

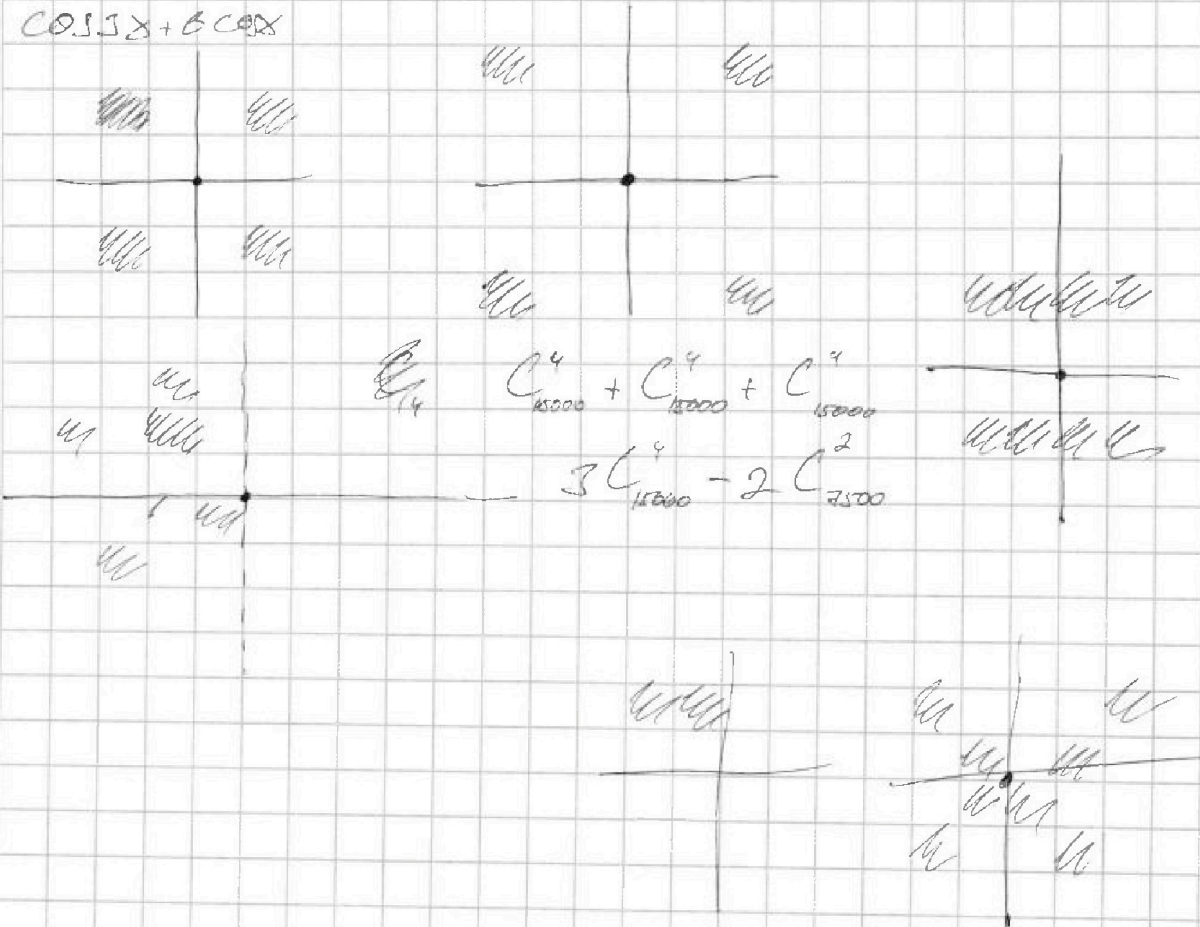
$$6(1 - \sin^2 x)$$

$$6 - 6 \sin^2 x$$

$$-2 \cos^3 x = 4 + 4 \sin^2 x$$

$$4 \sin^2 x (1 - \cos x) = 7 \cos x$$

$$\cos 3x + 6 \cos x$$



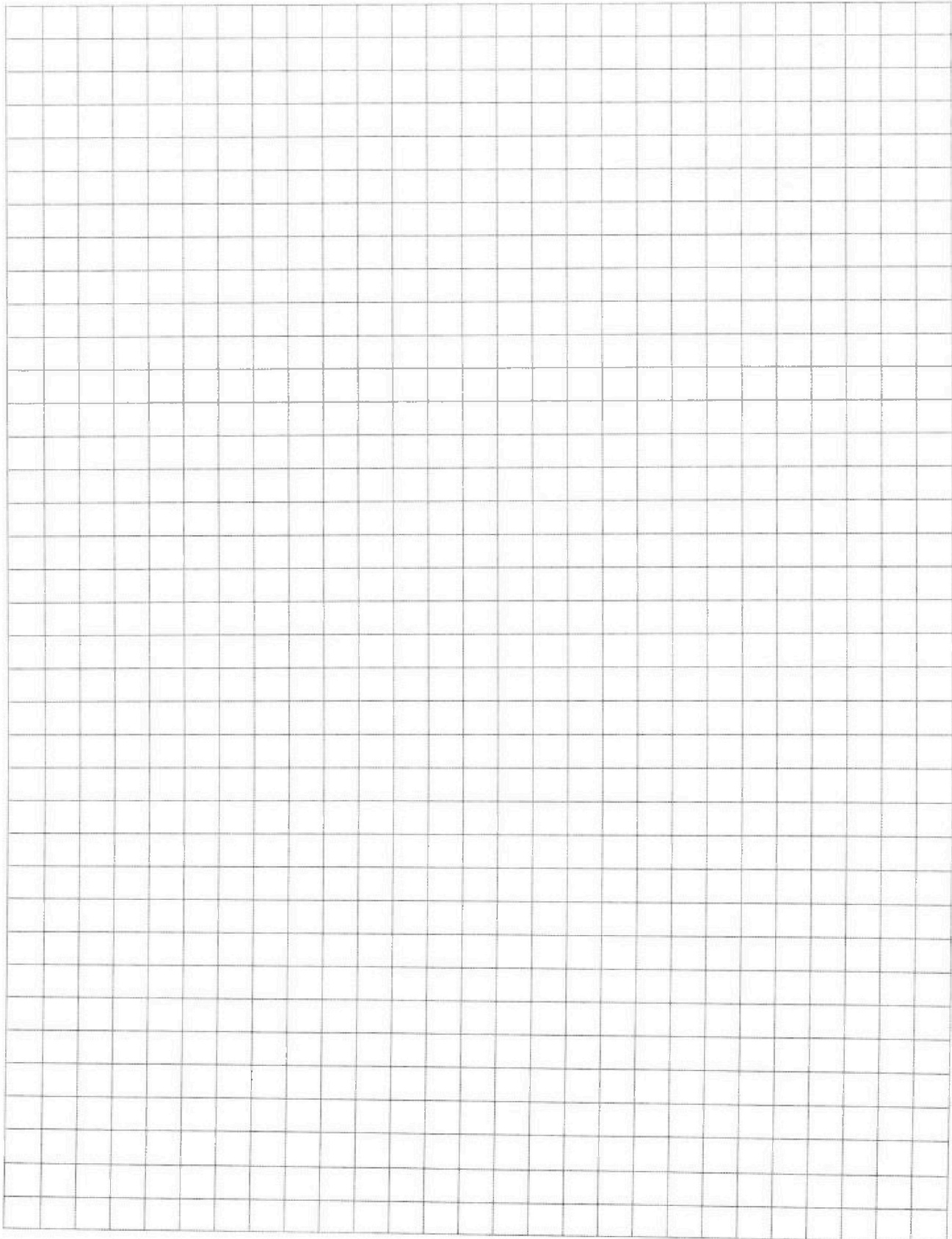


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



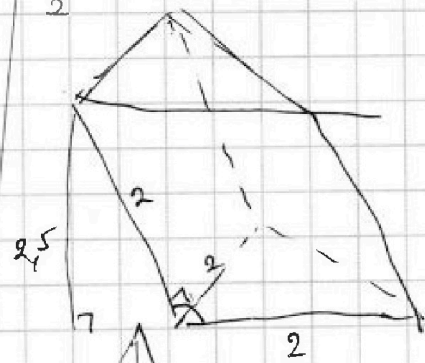
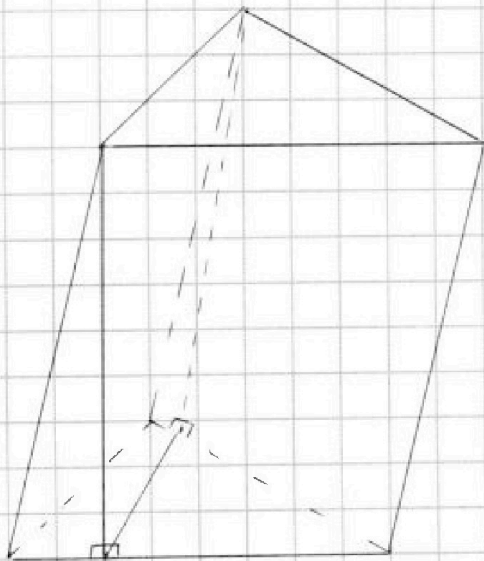
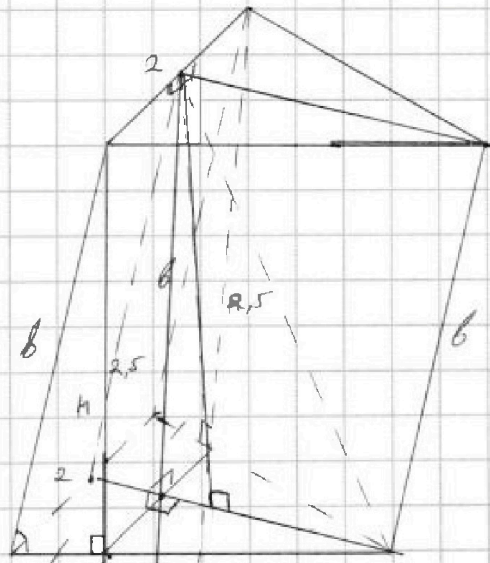
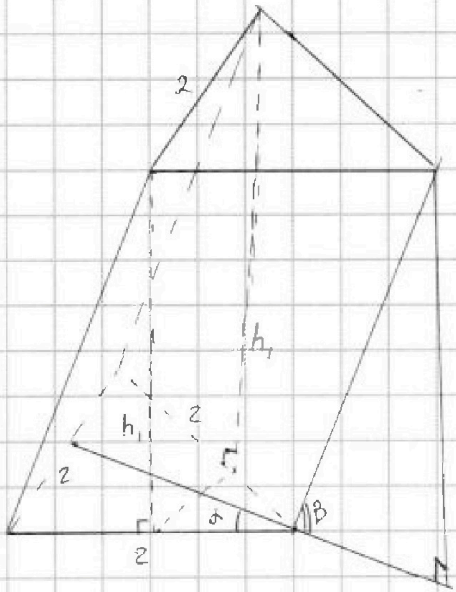


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = q^2 \Rightarrow a - c = q^2; \quad b - c = 1 \quad c = b - 1$$

$$a + b^2 = 820 \quad a - b = q^2 - 1 \quad q^2 : 3 \quad q : 3$$

$$ab - cb - ac + c^2$$

$$ab - b(b - 1) - a(b - 1) + (b - 1)^2 = q^2$$

$$a + b^2 \quad q^2 = 9$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b^2 = 820 \\ b^2 + b = 828 \\ b(b + 1) = 828 \end{cases}$$

$$b^2 + b + 1 \leq b^2 + b - 828 \leq b^2 + 2b + 1$$

$$b^2 - 58b + 829$$

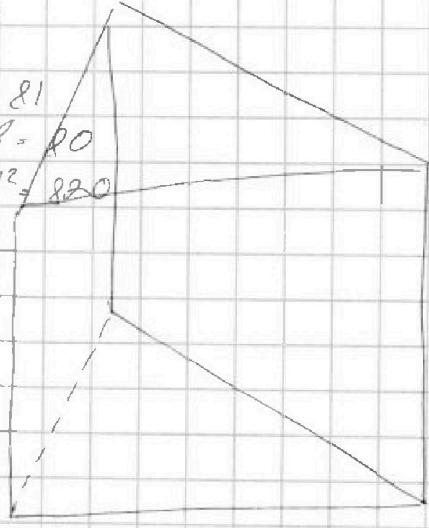
$$(b - 29)^2 \leq 0 \leq (b - 1)^2$$

828 + 2
414 2
207 3
69 3
23 23

$$q^2 = 81$$

$$a - b = 80$$

$$a + b^2 = 820$$



$\times 28$	$\times 29$
$\underline{224}$	$\underline{261}$
56	58
$\hline 784$	$\hline 844$

$$D = 1 + 8248 = 8249$$

$\times 57$
$\underline{399}$
201
$\hline 820$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$b_{10^5} = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^2}} \quad x+4 \quad b_{10^5} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\frac{b_{10^5}}{b_{10^4}} = (x-3)^2 = \frac{b_{10^5}}{b_{10^4}} \quad \frac{b_{10^5}}{b_{10^4}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \sqrt{\frac{15x+6}{x+4}}$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{x+4}} = 1$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3x+6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2}$$

$$\sqrt{x+7} + 6 = 2\sqrt{4-2x-x^2+2} + \sqrt{5-x} = 3x+6$$

$$x+7+36+12\sqrt{x+7} = 3x+6$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$4y^2 - 40y + 400 + 4y^2 - 280y + 2450 = 225 - z^2 \quad \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin x = 2\cos^2 x - \cos x - 2\cos x \sin x = 2\cos^2 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x = p$$

$$\cos 2x = (2\cos^2 x - 1)$$

$$\cos 3x + 6\cos x - 6\cos^2 x + 3 = p \quad 4\cos^3 x + 3\cos x - 3\cos 2x = p$$

$$6\cos x(1-\cos x) \quad -3(\cos x - \cos 2x)$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x - 3(2\cos^2 x - 1) = p$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$4 - 6 + 3 + 3 = 4 = p$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 = -10 = p$$

$$p \in [-10; 4]$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$D = 144 - 144 = 0 \quad \left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$t = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

