



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{N1}
Пусть первый член прогрессии - b , а знаменатель q , $b, q \neq 0$

$$\begin{cases} b_4 = bq^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} & (1) \\ bq > 0, \frac{15x+6}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{10} = bq^9 = x+4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{12} = bq^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (3) \end{cases}$$

$$(3) : (1) : q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^4}{15x+6}} \Leftrightarrow q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \Leftrightarrow q = \pm \sqrt[4]{|x-3|}$$

$$\text{Если } q = \sqrt[4]{|x-3|}$$

$$(1) : bq^3 = b \sqrt[4]{|x-3|^3} = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{(x-3)^3}} \Leftrightarrow b = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^5}}$$

$$(2) : bq^9 = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^5}} \cdot \sqrt[4]{|x-3|^9} = \sqrt{|15x+6|} = x+4$$

$$\text{Если } q = -\sqrt[4]{|x-3|}$$

$$(1) : bq^3 = -b \sqrt[4]{|x-3|^3} = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^3}{(x-3)^3}} \Leftrightarrow b = -\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^5}}$$

$$(2) : bq^9 = -\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^5}} \cdot (-\sqrt[4]{|x-3|^9}) = \sqrt{|15x+6|} = x+4$$

$$\sqrt{|15x+6|} = x+4 \Leftrightarrow |15x+6| = x^2 + 8x + 16$$

$$\begin{cases} x < -\frac{2}{5} \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5} > x \geq -4 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5} > x \geq -4 \\ (x-1)(x-22) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x - 6 = x^2 + 8x + 16 \\ x = 1 \\ x = 22 \end{cases} \Leftrightarrow x = \emptyset$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 22 \\ -\frac{2}{5} > x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x \geq -4 \\ 15x+6 = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 5$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{81^2}{29}}$$

$$q = \sqrt[4]{2} \quad \text{Пример кон. прогрессии с } x$$

Ответ при

Ответ: при $x = 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12 - 2t = 4t^2 + 36 - 24t \Rightarrow 4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 8 \cdot 12 = 121 - 96 = 25 = 5^2$$

$$t = \frac{11+5}{4} = 4$$

$$t = \frac{11-5}{4} = 1.5$$

Обратная замена:

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} = 2.25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 35 - 2x + x^2 = 16 \\ 140 - 8x + 4x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 20 \\ 4x^2 + 8x + 4 = 135 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ 4(x+1)^2 = (3\sqrt{15})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

в) Во время решения был переход к следствию, мы возвели в квадрат, не проверив, что обе части ~~не~~ ~~имеют~~ одного знака, а также потеряли огранич. на корень:

$$5 \geq x \geq -7$$

$$(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}) \cdot (2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}) \cdot (\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}) \cdot (2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$x+7 - 5+x = 2x+2$$

$$5 \geq -1 + 2\sqrt{5} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq 2\sqrt{5} \geq -6 \Rightarrow 3 \geq \sqrt{5} \text{ - не так}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} - 1 \geq 5 \text{ - корень не подходит} \quad \text{корень подходит}$$

$$-1 - 2\sqrt{5} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow 3 \geq \sqrt{5} \text{ - корень подходит}$$

$$-1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} \leq 5 \Rightarrow 3\sqrt{15} \leq 12 \sqrt{\frac{15}{3}} \leq 12 \sqrt{5} \text{ - корень подходит}$$

$$-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \geq -7 \Rightarrow 6 \geq \frac{3\sqrt{15}}{2} \Rightarrow 12 \geq 3\sqrt{15} \text{ - корень подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Рассмотрим второе уравнение системы

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$225-z^2 \geq 0 \Leftrightarrow 225 \geq z^2 \Leftrightarrow 15 \geq z \geq -15 \Leftrightarrow \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

1) $y > 35$: $y-20 + 2y - 70 = \sqrt{225-z^2} \leq 15$
 $3y - 90 \leq 15 \Leftrightarrow 3y \leq 105 \Leftrightarrow y \leq 35$
 $y > 35$ } $\Rightarrow y = \emptyset$

2) $y < 20$: $20-y + 40-2y = \sqrt{225-z^2} \leq 15$
 $60-3y \leq 15 \Leftrightarrow 45 \leq 3y \Leftrightarrow y \geq 15$
 $y < 20$ } $\Rightarrow y = \emptyset$

3) $35 \geq y \geq 20$: ~~$20-y + 2y - 70 = \sqrt{225-z^2} \leq 15$~~
 $y-20 - 2y + 70 = \sqrt{225-z^2} \leq 15$
 $-y + 50 \leq 15 \Leftrightarrow 35 \leq y$
 $35 \geq y \geq 20$ } $\Rightarrow y = 35$

Решение y системы может быть только при $y = 35$.

$$|35-20| + 2|35-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$15 + 0 = \sqrt{225-z^2} \Leftrightarrow 225 = 225 - z^2 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

д) $\begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$
 $\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)}$ (1)

(1) $\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+4)(5-x)}$, $5 \geq x \geq -4$

пусть $a = \sqrt{x+4}$; $b = \sqrt{5-x}$:

$$\begin{cases} a - b + 6 = 2ab \\ a^2 + b^2 = x+4 + 5-x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = b(2a+1) \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 2ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6$$

переход к следствию - или проверка корней

$$x+4 + 5-x = 2\sqrt{(x+4)(5-x)} + 36 - 2\sqrt{(x+4)(5-x)}$$

Замечка: $t = \sqrt{(x+4)(5-x)} > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка знака:

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x})(2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x}) \underbrace{(\sqrt{x+4} + \sqrt{5-x})}_{>0} (2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(2x+2)(2\sqrt{(x+4)(5-x)} - 6) \geq 0$$

$$(x+1) \underbrace{(\sqrt{(x+4)(5-x)})}_{+} - 3 \geq 0$$

$$\cdot x = -1 + 2\sqrt{5} : (1 + 2\sqrt{5} + 1)(4 - 3) \geq 0 \text{ - корень подходит}$$

$$\cdot x = -1 - 2\sqrt{5} : (1 + 2\sqrt{5} + 1)(4 - 3) < 0 \text{ - корень не подходит}$$

$$\cdot x = -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} : (1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} + 1)(1,5 - 3) < 0 \text{ - корень не подходит}$$

$$\cdot x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} : (-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} + 1)(1,5 - 3) \geq 0 \text{ - корень подходит}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \\ x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1 + 2\sqrt{5}; 35; 0); \left(-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right) \right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = p - 3$$

Замена: $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$

$$\frac{4t^3 - 6t^2 + 3t}{f(t)} = p - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \Big| \Big| \left[\frac{-1}{-1} \quad \frac{1}{1} \right]$$

$$-4 - 6 - 3 = f(t) \leq 4 - 6 + 3$$

$$-13 \leq f(t) \leq 1$$

$$p = f(t) + 3 \Leftrightarrow -10 \leq p \leq 4$$

В силу непрерывности $f(t)$ и $\cos x$ при любом p будет решение в x .
из промежутка $[-10; 4]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$1) a + b^2 = 820$$

· Если $b \div 3$, то $a \equiv 820 \equiv 2$

· Если $b \not\div 3$, то $b^2 \equiv 1 \Rightarrow a \equiv 819 \equiv 0$

любо $a \div 3$, либо $b \div 3$, а $a = 2m + 2 \Rightarrow$ условие из задачи

$$2) (a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2$$

~~$a \in \mathbb{Z}, b = 3k + m$~~

~~$a \equiv 819$~~

$(a-c)(b-c) = k^2$ и простое, тогда:

$a-c$	$b-c$
1	k^2
-1	$-k^2$
k^2	1
$-k^2$	-1
k	k
$-k$	$-k$

Если $a-c = b-c \Rightarrow a = b$

$$a = 820 - b^2$$

$$820 - b^2 = b$$

$$b^2 - b - 820 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 820 = 1 + 3680 = 3681 =$$

$$= 60.675 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$$

$$a - c \neq b - c$$

~~$b^2 < 820 \Rightarrow a > b$~~

$$a - c = 1$$

$$820 - b^2 = c + 1$$

$$b^2 = -c + 819$$

$$k^2 = b - c = b^2 + b - 819$$

$$a - c = -1$$

$$820 - b^2 = c - 1$$

$$b^2 = 821 - c$$

$$k^2 = b - c = b^2 - b - 821$$

$$b - c = 1$$

$$c = b - 1$$

$$a - c = k^2$$

$$820 - b^2 + 1 - b = k^2$$

$$821 - b^2 - b = k^2$$

$$|821 - b^2 - b|$$

$$b \leq 28$$

$$b - c = -1$$

$$-c = b - 1$$

$$a - c = k^2$$

$$820 - b^2 - b - 1 = k^2$$

$$819 - b^2 - b = k^2$$

или $|819 - b^2 - b| = k^2$. простое, числа



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

переворот

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

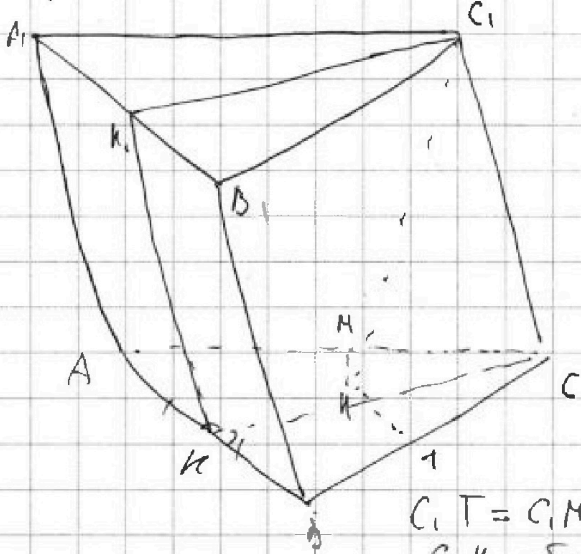
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ - данная призма, $ABC \parallel A_1B_1C_1$; $S_{ABB_1A_1} = 4$;
 $S_{BCC_1B_1} = S_{ACC_1A_1} = 5$

Рассмотрим высоту призмы, опущенную из вершины C_1 : $C_1K \perp A_1B_1C_1$



Пусть H лежит между AC и CB
 Проведем в (ABC) : $HM \perp AC$
 $HT \perp BC$. По т.о 3^я перпенд.

$C_1M \perp AC$ и $C_1T \perp BC$

$S_{BCC_1B_1} = AC \cdot C_1M = 5 \Rightarrow$

(Варвар = осн. · высота)
 $\Rightarrow C_1M = 5 : 2 = 2.5$

$S_{ACC_1A_1} = BC \cdot C_1T \Rightarrow C_1T = 5$

$C_1T = C_1M$
 C_1K - общ.
 $C_1K \perp (ABC) \Rightarrow \angle C_1KT = 90^\circ = \angle C_1KM$
 $\Rightarrow MK = MT$

$MK = MT$
 $MN \perp AC$
 $NT \perp BC$) $\Rightarrow H \in$ прямой, которой принадлежат
 бисс-са $\perp AC$ и $NT \perp BC$. Пусть $SK, K \in AB$;
 CK - бисс-са $\perp AC$; $CK \perp AC$

~~Случай I: K лежит за точкой C~~

Заметим, что $AC = BC$
 CK - бисс-са) $\Rightarrow CK \perp AB$

В $(A_1B_1C_1)$ проведем $C_1K_1 \parallel CK \Rightarrow C_1K_1 \perp A_1B_1$
 $CK \perp AB$ т.к. $CK \perp AB$ и $CC_1 \perp AB$

$\Rightarrow CK_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow CK_1 \cdot A_1B_1 = S_{A_1B_1C_1} = 4 \Rightarrow CK_1 = 2$
 $H \in CK \Rightarrow H \in (C, K, K_1) \Rightarrow$

~~Случай I: H лежит за точкой C~~

В ΔC_1TK : $KT = CK \cdot \sin 30^\circ$; $MT = \frac{CK}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D(ABC): kc^2 + 4 + (x-1)^2 + 2(x-1) \cdot \frac{1}{2} kc^2 = x^2 + 3$$

Пусть $(k, H): y:$

$$25 = y^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$16 = y^2 + (\sqrt{3} - (x-1) - (x-1) - 4)^2 \cdot (x^2 + 3)$$

$$9 + (\sqrt{3} - (x-1) - (x-1) - 4)^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$25 = y^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$16 = x^2 + y^2 + 3$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 64 \\ \times 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ \times 12 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$16 = y^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{x^2 + 3})^2$$

$$9 - \frac{x^2}{4} = 3 + x^2 + 3 - 2\sqrt{3x^2 + 9}$$

$$3 - \frac{x^2}{4} = x^2 - 2\sqrt{3x^2 + 9}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 9} = \frac{3x^2}{4} - 3 = 3\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2} (3x^2 + 9) = \frac{3x^2}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad | \cdot 16 \cdot 9$$

$$64(3x^2 + 9) = 9x^4 - 72x^2 + 16$$

$$9x^4 - 264x^2 - 575 = 0$$

$$x^2 = \frac{264 \pm \sqrt{2434}}{18} = \frac{44 \pm \sqrt{2434}}{3}$$

$$kH - y = \sqrt{25 - \left(\frac{44 \pm \sqrt{2434}}{12}\right)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p \quad -10 \leq p \leq 4$$

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$ka \quad 3 \rightarrow p - 3$$

$$(k-a)(4t^2 + 6t + 3)$$

$$-6 = -4a + 6 \Leftrightarrow 6 = 4a - 6 \quad \epsilon$$

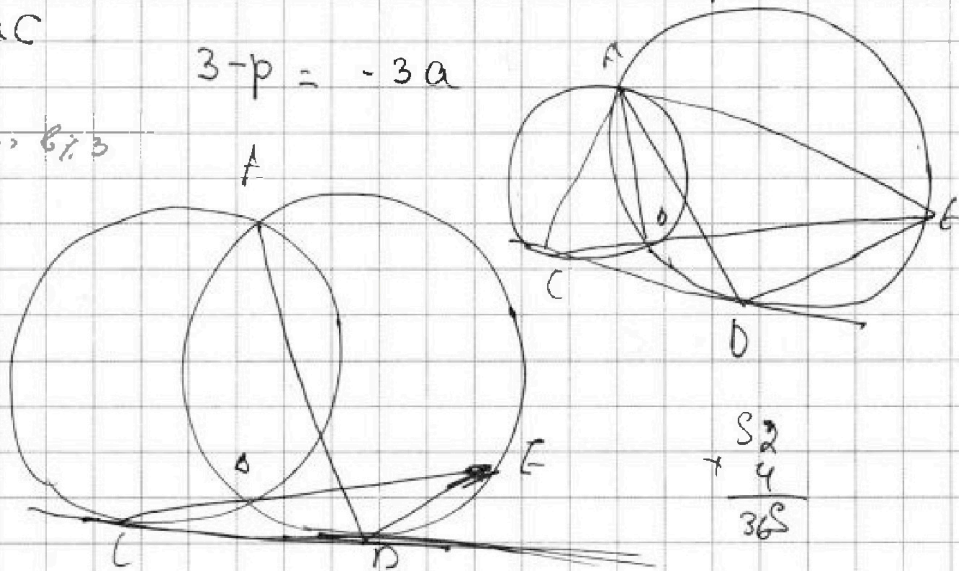
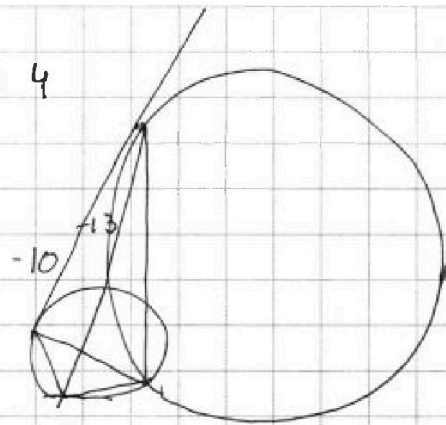
$$3 = c - ab \quad c = 3 + ab = 3 + a(4a - 6)$$

$$3 - p = -ac$$

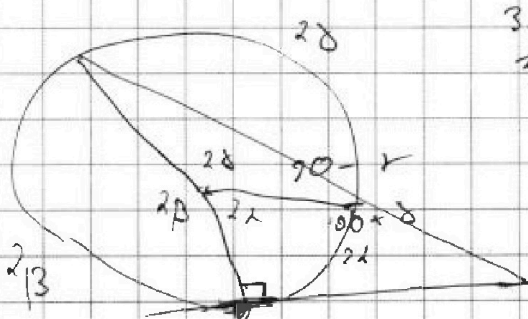
$$3 - p = -3a$$

$$a:3 \quad b \neq 3 \Rightarrow b \neq 3$$

$$a \neq 3 \quad b:3$$



$$\frac{S_2 + 4}{36}$$



$$360 - 2\delta - 90 - 90 - \delta =$$

$$= 180 - 2\delta - \delta$$

$$365 \frac{10}{1409}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 = 4^2(5-x)(x+7) - 2x \sqrt{(x+7)(5-x)} \rightarrow 39$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0 \quad D = 121 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = 25 = 5^2$$

$$\begin{cases} t = \frac{11+5}{4} = 4 \\ t = \frac{11-5}{4} = 1,5 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+7)(5-x) = 16 \\ (x+7)(5-x) = 2,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35 - 2x - x^2 = 16 \\ 140 - 8x - 4x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 35 - 15 = 20 \\ 4x^2 + 8x + 4 = 140 - 9 + 4 = 135 \end{cases}$$

$$\cos 3x + \cos x = 3\cos 2x + p$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 3(2\cos^2 x - 1) + p$$

$$4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ -29 \\ \hline 261 \\ -58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$a+b^2=820$$

$$a > b > c \quad 29 > 6 > 3$$

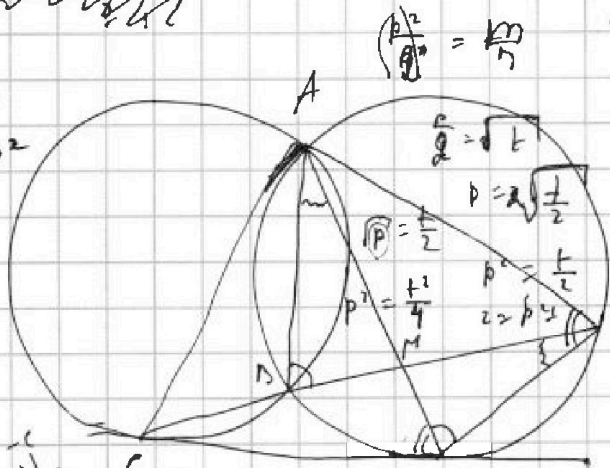
$$c > a > b$$

$$6^2 = 1$$

$$a:3$$

$$b = 3m$$

$$a = 820 - 9m^2$$



$$b:3$$

$$a = 820 - 6^2 = 814$$

$$\begin{cases} a = 3k + 1 \\ b = 3m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3k \\ b = 3m + 1,2 \end{cases}$$

$$a:3 : b:3 = 820 - 9k : 3$$

$$a:3$$

$$6^2 = 820 - 9k : 3$$

$$\frac{(820 - 9m^2)(3m - c)}{k^2} = k^2$$

$$\begin{array}{r} k^2 \\ \hline k \\ \hline -k \\ \hline 1 \\ \hline -k^2 \\ \hline -1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \hline k \\ \hline -k \\ \hline k^2 \\ \hline -1 \\ \hline -k^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 820 - 9m^2 &= 3m - c \\ 820 + c &= 9m^2 + 3m = b^2 + b \end{aligned}$$

$$-1 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 820 \cdot c} = \frac{b^2 + b}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + 820c}$$

0	0	820 - 6^2 = a
1	1	81 - 6 = 0
2	4	
3	9	
4	16	
5	25	
6	36	
7	49	
8	64	
9	81	
10	100	820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

1) $C_{75-200}^4 = C_{100-150}^4$ — про. осевая симметрия

2) $2 \cdot C_{75}^4 \cdot 100 + 2 \cdot C_{75-100}^1 = C_{75-100}^3 = C_{75-100}^2 (C_{75-100}^2 - 1)$

$= 2500 \cdot 7499 + 499 \cdot 494900$ — черновик

ответ: $C_{75-200}^4 + C_{100-150}^4 = 2500 \cdot 7499$

$= 494900$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

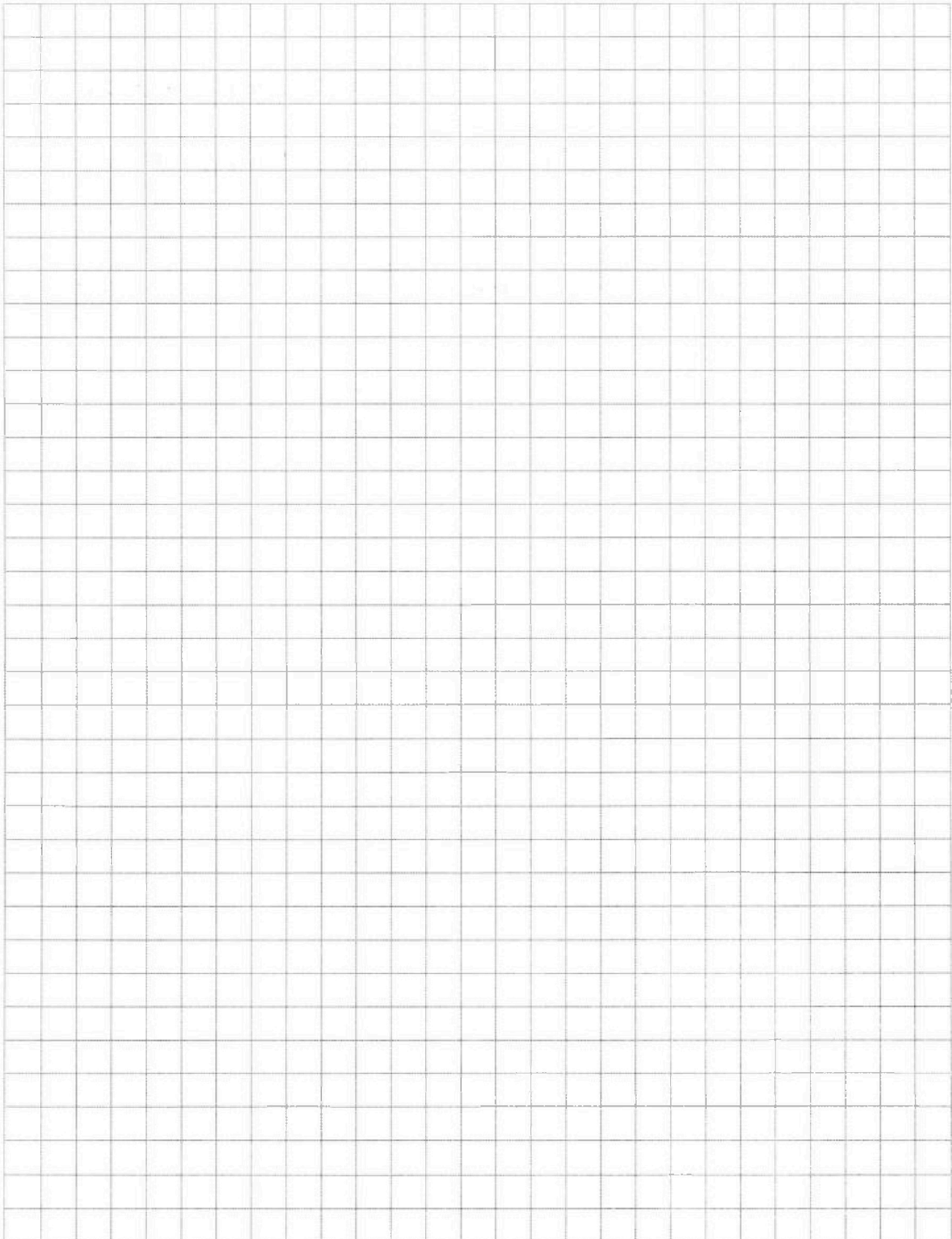
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





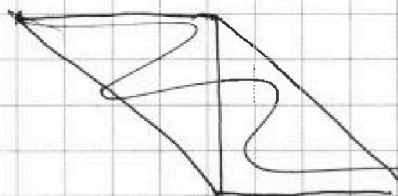
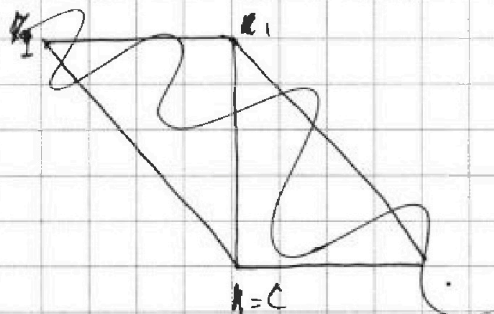
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

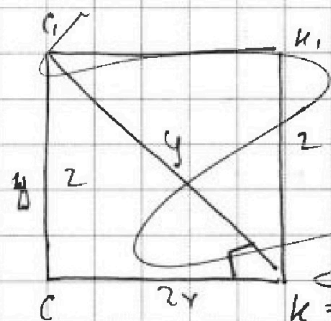
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 4: $k = k$



$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 43 \\ \hline 139 \\ \times 172 \\ \hline 859 \\ + 575 \\ \hline 2434 \end{array}$$



$$y = y^2 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r} b^2 + b \\ - \frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$a - c = k^2$$

$$b - c = k^2 \quad ; \quad c = b - 1$$

$$a = k^2 + c$$

$$k^2 + c + b^2 = 820$$

$$k^2 + b - 1 + b^2 = 820$$

$$k^2 = 820 - b - b^2$$

821

$$-2 - 21$$

$$b = 3$$

$$b = 3$$

$$a = 3$$

$$b^2 = 3k + 1 \times$$

↓

$$b = 3k + 2$$

$$b = 3k$$

$$\begin{aligned} D &= 264^2 + 4 \cdot 2 \cdot 575 = \\ &= (132^2 + 2 \cdot 575) \cdot 4 = \\ &= (43^2 + 575) \cdot 36 = 2434 \cdot 36 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$562300 \mid 4$
 $\underline{240575}$
 1809325
 $\underline{4949900}$

$\begin{array}{r} +6 \\ +75 \\ \hline +380 \\ 532 \\ \hline 5408 \\ -5408 \\ \hline 77 \\ 5623 \end{array}$

$x+y+z = 2a$

$C_{100}^8 + C_{75 \cdot 100}^8 + C_{75 \cdot 100}^8 \cdot 2 - C_{75 \cdot 100}^2 \cdot 2$

100
 75

$\begin{array}{r} 3840 \\ +2499 \\ \hline 6339 \end{array}$

3840
 2500

$384900 \mid 4$
 $\underline{9622500}$
 3850
 $\underline{9618650} \mid 2$
 4809325



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

b	b^2	$-821 + b^2 + b$	$-819 + b^2 + b$	$b^2 - b$	a	c
0	0			0		
1	1			2		
2	4					
3	9					
4	16					
5	25					
6	36					
7	49					
8	64					
9	81					
10	100					
11	121					
12	144					
13	169					
14	196					
15	225					
16	256					
17	289					
18	324					
19	361					
20	400					
21	441					
22	484					
23	529					
24	576					
25	625					
26	676					
27	729					
28	784					

$b^2 + b : 2$

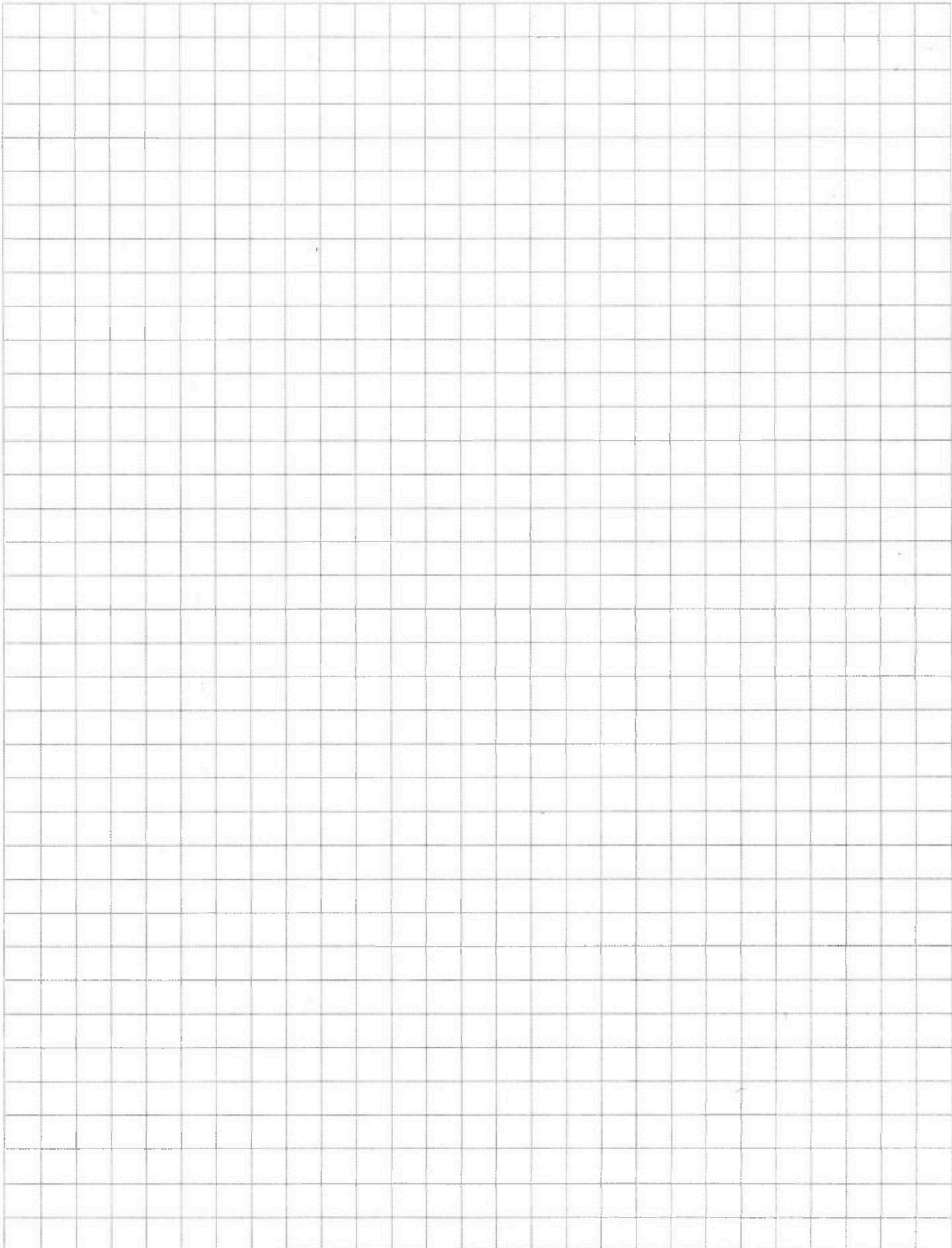


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

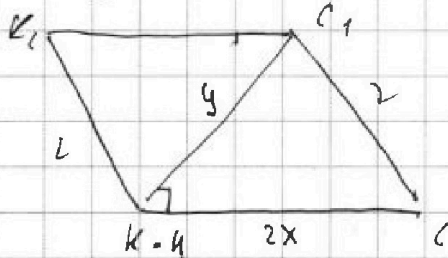
6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

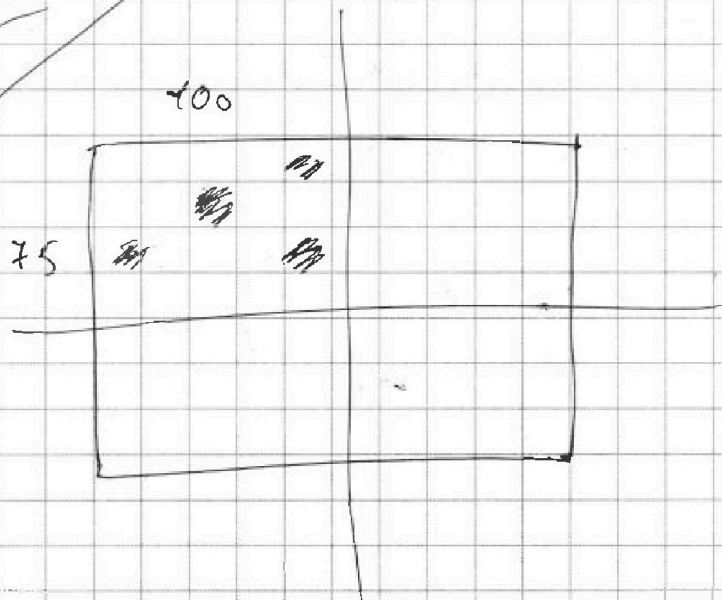
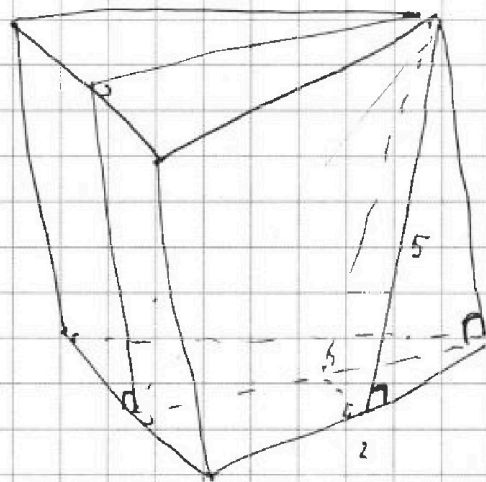
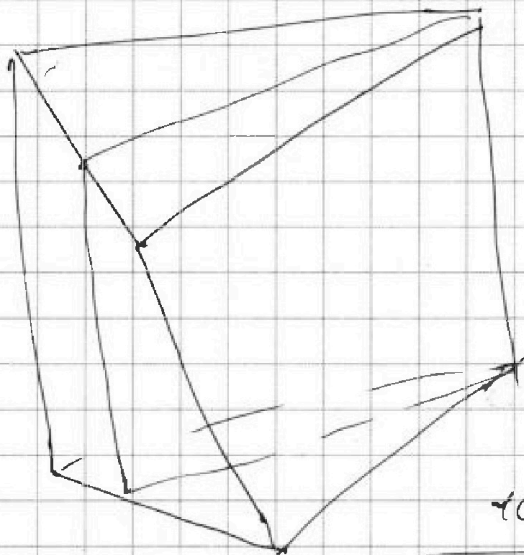
Случай 4: $k = n$



$$y^2 + 4x^2 = 2^2$$

$$2,5^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 2^2 - 2,5^2 < 0 \Rightarrow \text{нет решений}$$

Случай



$$C_{75 \cdot 100}^4 \cdot 4$$

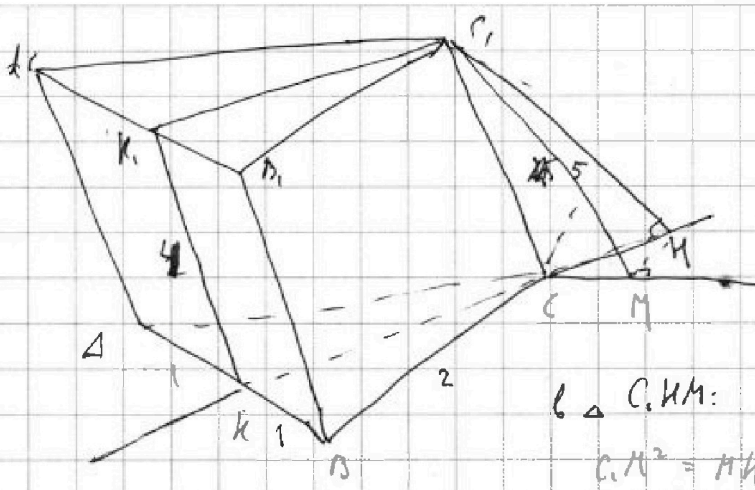


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$CK_1 = CK_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$
(вне зависимости от случая)

$CM = CK \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} CK$

$MK = CK \cdot \sin 30^\circ = \frac{CK}{2}$
(в $\triangle CMK$)

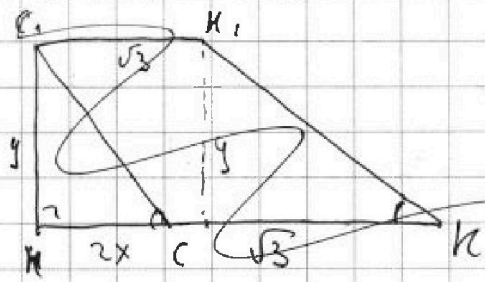
в $\triangle CMK$:

$CM^2 = MK^2 + CK^2$

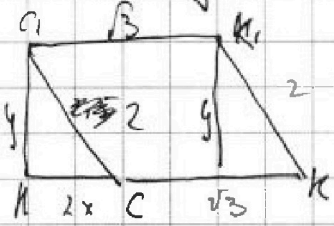
$5^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{CK^2}{4} + CK^2$

привести к виду от случая

в $(K, K_1 \text{ и } C)$:



Пусть $CK \cdot 2 = x$ (во всех случаях) $5^2 = x^2 + y^2$

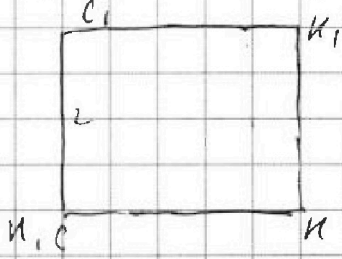


вне зависимости от случая: $(K, C, K_1 \text{ и } K)$ \Rightarrow $C, C = K, K$
 $(K, C_1 \text{ и } K_1)$ \Rightarrow $C, C_1 = K, K_1$

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = 4 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 2,5^2 \end{cases}$$

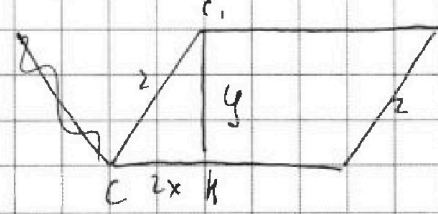
$\Rightarrow 3x^2 = 2^2 - 2,5^2 < 0 \Rightarrow$ нет решений

Случай 2: $K = C$: в $(K, K_1 \text{ и } C)$:



$KC = 0$; $C, C = C, K = K, K = 2$

Случай 3: K между C и K_1



$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 = 2^2 \\ 2,5^2 = x^2 + y^2 \\ 3x^2 = 2^2 - 2,5^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$
 нет решений

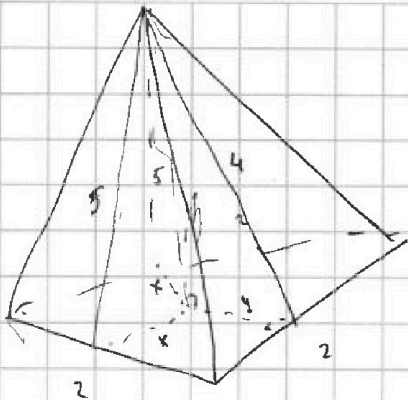


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

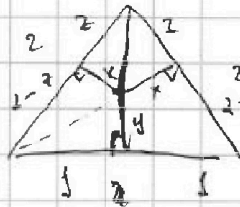
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$25 - x^2 = 16 - y^2$$



$$(2-x)^2 + y^2 = 1 \quad \times$$

$$\begin{cases} 2^2 + x^2 + y^2 = 2^2 \\ 25 - x^2 = 16 - y^2 \\ (2-x)^2 + x^2 = y^2 + 1 \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 9$$

$$25 - 16 = x^2 - y^2$$

$$9 = 2z - 15$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z} \end{cases}$$

$$x \geq -4$$

$$5-x-3z \geq 0$$

$$5-3z \geq x \geq -4$$

$$5-3z \geq -4$$

$$12 \geq 3z \quad 4z \geq -15$$

$$12\sqrt{x+4} \geq 5-x-3z-x-8 = -2x-3z-3$$

$$-2x-3z-3 \leq 0$$

$$-2x-3z-12$$

$$-3z \leq 3+2x$$

$$144(x+4) \geq 4x^2$$

$$\begin{array}{r} 1355 \\ 10 \overline{) 1355} \\ 35 \end{array}$$

$$1) y < 20: -y+20 = 2y+40 = -3y+20 \leq 15$$

$$75 \leq 3y \quad y \geq 25$$

$$2) y \geq 35: y-20+2y-70 = 3y-90 \leq 15$$

$$20 > y \geq 25 \quad \times$$

$$y \geq 35$$

$$3y \leq 105 \Rightarrow y \leq 35$$

$$3) 35 \leq y \leq 20: y-20+40-2y = 50-y \leq 15$$

$$y-20+70-2y = 50-y \leq 15$$

$$y \geq 35$$

$$y = 35$$

$$y = 35$$

$$15 = \sqrt{225-2z}$$

$$225 = 225 - 2z \Rightarrow z = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} + 5 - \sqrt{5-x} + 36 + (2\sqrt{x+4} - 2\sqrt{5-x}) - \sqrt{(x+4)(5-x)} = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$45 + 12(\sqrt{x+4})$$

$$\sqrt{x+4} + 6 = \sqrt{5-x} (2\sqrt{x+4} + 1)$$

$$5 \geq x \geq -4$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x}) + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+4)}$$

$$x+4+5-x-2\sqrt{(x+4)(5-x)} = 4(5-x)(x+4) + 36 - 24\sqrt{(x+4)(5-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b, q \quad b q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}; \quad b q^2 = x+4; \quad b q'' = \sqrt{(5x+6)(x-3)}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{15x+6}} (x-3)^3 = (x-3)^2 \quad q = \sqrt[4]{|x-3|}$$

$$b \cdot \sqrt[4]{|x-3|} = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^8}}$$

$$b q = +$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^2}}$$

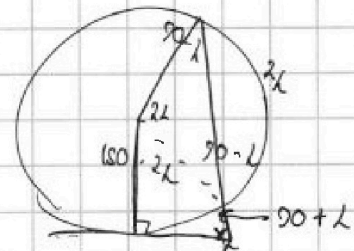
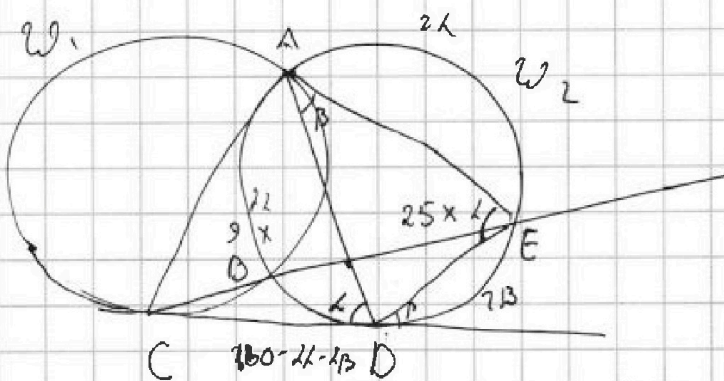
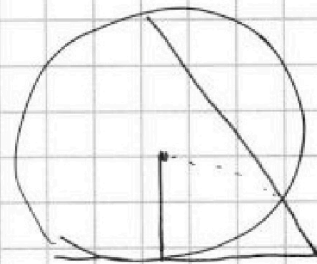
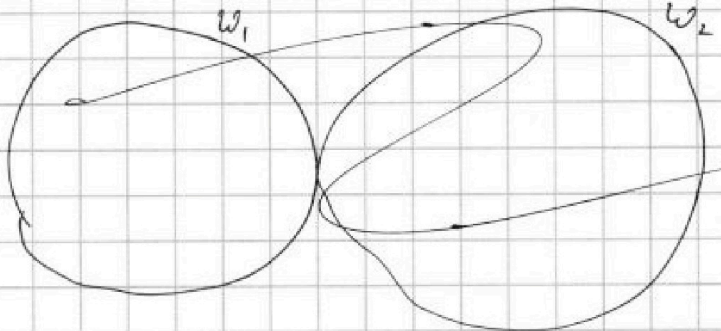
$$\sqrt[4]{\frac{(15x+6)^2}{|x-3|^2}} \cdot \sqrt[4]{|x-3|^2} = x+4$$

$$15x^2 - 45x + 6x - 18 = y^2 + 8x + 16$$

$$\sqrt[4]{(15x+6)^2 \cdot (x-3)^2} = x+4$$

$$14x^2 - 44x - 34 = 0$$

$$(15x+6)(x-3) = x^2 + 8x + 16$$



$$\begin{aligned} x &= 360 - 180 + 2x - 90 - 2x - 90 \\ &= x \end{aligned}$$

$$a = 820 - b^2 > b$$

$$a - b > 3$$

$$a > b$$

$$(820 - b^2 - c)(b - c) = 820b - 820c - b^3 + b^2c - bc + c^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

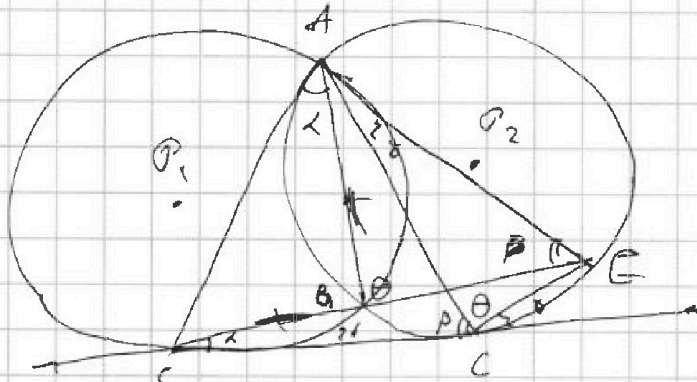
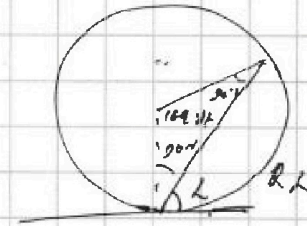
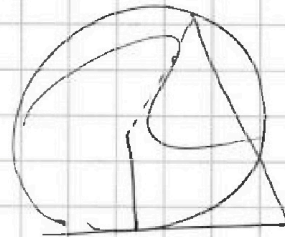
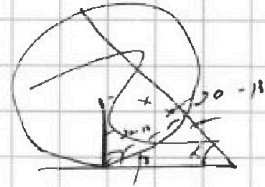
$$\cos 3x - p = 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = 6\cos^2 x + 6\cos x - 3$$

$$\cos 3x - p + 3 = 6t^2 + 6t$$

$$D = 36 + 4(\cos 3x + 3 - p) \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 3 - p$$

$$p \geq \cos 3x - 6 \geq -7$$



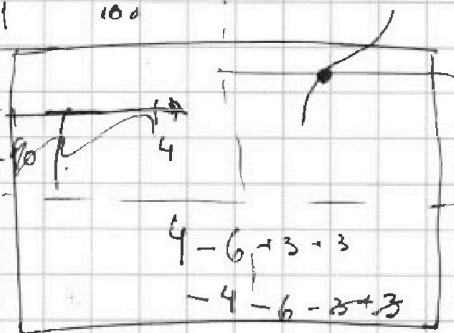
$$(820 - b^2 - c)(b - c) = k^2$$

1	k^2
-1	$-k^2$
k^2	1
$-k^2$	-1
k	$-k$
$-k$	k



$$b = c + 1, c = b - 1$$

$$820 - b^2 - b + 1 = k^2$$



$$\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x = p$$

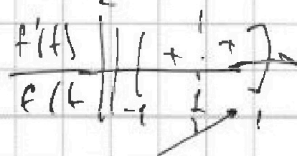
$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$4t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$$4 - 6 + 3 + 3$$

$$-4 - 6 + 3 + 3$$

$$-10 \leq p \leq 4$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3$$

$$k \sqrt{p} + b$$

$$4t^2 = 3t$$

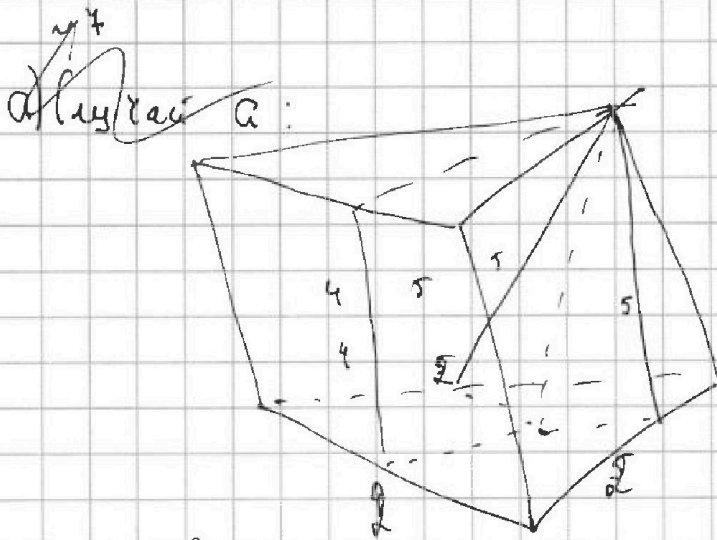


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a:3; b = 3k$$

$$b:3; a = 3m$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ \hline 20 \\ + 19 \\ \hline 39 \\ + 161 \\ \hline 200 \end{array}$$

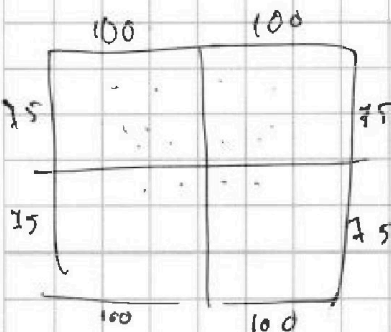
$$\begin{array}{r} 23 \\ + 23 \\ \hline 46 \\ + 46 \\ \hline 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 529 \\ + 47 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 28 \\ \hline 56 \\ + 29 \\ \hline 85 \\ + 55 \\ \hline 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 430 \\ + 54 \\ \hline 484 = 22^2 \end{array}$$

$$(820 - b^2 - c)(b - c)$$



$$\begin{aligned} 820 - b^2 - c &= 1 \\ 821 &= b^2 + c \\ b - c &= k^2 \\ 821 &= b^2 + b + k^2 \end{aligned}$$

$$1) \left(\begin{array}{c} 4 \\ 15200 \\ 150 \cdot 100 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 4 \\ 150 \cdot 100 \end{array} \right)$$

b	b^2	$820 - b^2$
0	0	820
1	1	819
2	4	816
3	9	811
4	16	804
5	25	795
6	36	784
7	49	771
8	64	
9	81	
10	100	
11	121	
12	144	
13	169	
14	196	
15	225	
16	256	
17	289	
18	324	
19	361	
20	400	
21	441	
22	484	
23	529	
24	576	
25	625	
26	676	
27	729	
28	784	