



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - первый член геом. прогрессии, q - знаменатель этой прогрессии, b_i - i -ый член геом. прогрессии, тогда $b_7 = b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ (*), $b_{13} = b q^{12} = 5-x$, $b_{15} = b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 & (1) \\ (13x-35)(x+1) \geq 0 & (2) \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$

(1): $x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$

(2): $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$

Из (*) $\Rightarrow b q^6 \geq 0$; так $q^6 \geq 0$, то $b \geq 0$

Если $b \geq 0$ или $q \geq 0$, то $b_{13} = 5-x \geq 0$ и $b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 0$

тогда $x \geq 5$ и $\begin{cases} x \geq \frac{35}{13} \\ x \geq -1 \end{cases}$ - невозможно выполн. оба условия

тогда $b > 0$, $q \neq 0$. Значит, $b q^{12} > 0 \Leftrightarrow 5-x > 0 \Leftrightarrow x < 5$ (**)

так $b \neq 0, q \neq 0$, то $x \neq \frac{35}{13}$
 $b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}$ (3), $b^2 q^{24} = (5-x)^2$ (4), $b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$ (5)

так $b \neq 0, q \neq 0$, то из (5):(4) $\Rightarrow q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$ (6)

так $b \neq 0, q \neq 0$, то $\frac{b^2 q^{28}}{b^2 q^{12}} = \frac{(13x-35)(x+1)}{(13x-35)/(x+1)^3} = (x+1)^4 = q^{16} \Rightarrow$

$q^4 = x+1$ или $q^4 = -x-1$ (7)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из (6) и (7) получаем, что $q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$ и $\begin{cases} q^4 = x+1 \\ q^4 = -x-1 \end{cases}$

1) $q^4 = x+1$, тогда

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = x+1 \quad /: (x+1) \neq 0 \text{ (из ДЗ)}$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{13x-35-x^2+10x-25}{(5-x)^2} = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289$$

$$x_1 = \frac{23-17}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{23+17}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ (не подходит (не))}$$

2) $q^4 = -x-1$

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = -x-1 \quad /: (x+1) \neq 0 \text{ (из ДЗ)}$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{13x-35+x^2-10x+25}{(5-x)^2} = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 \text{ (не подходит. ДЗ)}$$

Проверка! 1) если $x=3$, то подставив значение во все ур-я, получим, что при $x=3$ существ. геом. прогр. с $b = \frac{1}{32}$, $q = \sqrt{2}$ ($b_7 = \frac{1}{4}$, $b_{13} = 2$, $b_{15} = 4$)

2) при $x=-5$ существ. геом. прогрессия с $b = \frac{5}{32}$, $q = \sqrt{2}$ ($b_7 = \frac{5}{4}$, $b_{13} = 10$, $b_{15} = 20$)

Ответ! $x=3$, $x=-5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+8} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

Пусть $v = y+1$, тогда $y-12 = v-13$, тогда

$$|v| + 3|v-13| = \sqrt{169-z^2} \leq 13 \quad (2)$$

Заметим, что при условии v $|v| + 3|v-13| \leq 13$, т.к. $\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13$

$$1) \underline{v \geq 13} \Rightarrow |v| = v, |v-13| = v-13$$

$$v + 3v - 39 \leq 13 \Leftrightarrow 4v \leq 52 \Leftrightarrow v \leq 13$$

т.к. $v \geq 13$ и $v \leq 13$, то $v = 13$

$$2) \underline{0 \leq v < 13} \Rightarrow |v| = v, |v-13| = 13-v$$

$$v + 39 - 3v \leq 13 \Leftrightarrow -2v \leq -26 \Leftrightarrow v \geq 13 -$$

$$3) \underline{v < 0} \Rightarrow |v| = -v, |v-13| = 13-v \quad \text{постороннее решение}$$

$$-v + 39 - 3v \leq 13 \Leftrightarrow -4v \leq -26 \Leftrightarrow v \geq \frac{13}{2} -$$

Тогда $v = 13$ - единственное возможное значение, тогда $y = 12$,

$$z = 0 \quad (\text{т.к. рав-во } \sqrt{169} = |12+1| + 3|13-13| = 13 =$$

$$= \sqrt{169-z^2} \Rightarrow 169-z^2 = 169 \Rightarrow z=0)$$

Подставив $y = 12, z = 0$ в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

Заметим, что $(x+3)(4-x) = 12+x-x^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

003:
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \\ (x+3)(4-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; 4]$$

Пусть $x+3 = t$, $t \geq 0$, тогда $4-x = 4-t$, тогда

$$\sqrt{t} + \sqrt{4-t} = 2\sqrt{t(4-t)} - 5$$

Допустимые преобраз. на 003:
Возведём обе части в квадрат:

$$t + 4 - t - 2\sqrt{t(4-t)} = 4t(4-t) - 20\sqrt{t(4-t)} + 25$$

$$4t(4-t) - 18\sqrt{t(4-t)} + 18 = 0$$

Пусть $\sqrt{t(4-t)} = k$, $k \geq 0$, тогда

$$4k^2 - 18k + 18 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 9k + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$k_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Тогда
$$\begin{cases} t(4-t) = \frac{9}{4} \\ t+(4-t) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 12+x-x^2 = \frac{9}{4} \\ 12+x-x^2 \geq 9 \end{cases}$$

$$1) x^2 - x - \frac{39}{4} \geq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot \frac{39}{4} = 40$$

$$x_1 = \frac{1 - 2\sqrt{10} + \frac{39}{2}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} < \frac{1-7}{2} = -3$$

$$2) x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < -3, \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < 4$$

Из 003 $\Rightarrow 2x \in [-6; 8]$. Заметим, что x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетв. 003.

Ответ!
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

 $y = 12, z = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cdot$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

Тогда $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

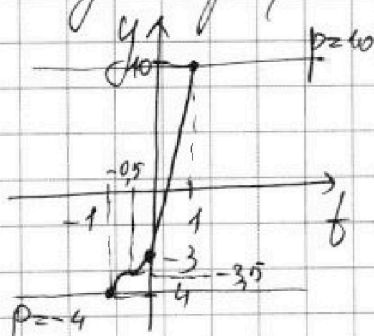
Пусть $y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$, тогда $y'(t) = 12t^2 + 12t + 3 =$

$$= 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2 \geq 0$$

М.к. $y'(t) \geq 0$ при $-1 \leq t \leq 1$, то функция $y(t)$ возрастает

при $-1 \leq t \leq 1$ (точка перегиба при $t = -\frac{1}{2}$)

Тогда график $y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$ имеет вид:



$$y(1) = 10, y(0) = -3, y(-1) = -4$$

$$y(-\frac{1}{2}) = -3.5$$

Тогда где $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ имеет не более двух решений при $p \in [-4; 10]$, причем при каждом $p \in [-4; 10]$ $\cos x$ определена по графику $y(\cos x)$ и имеет одно значение

Ответ: $p \in [-4; 10]$.

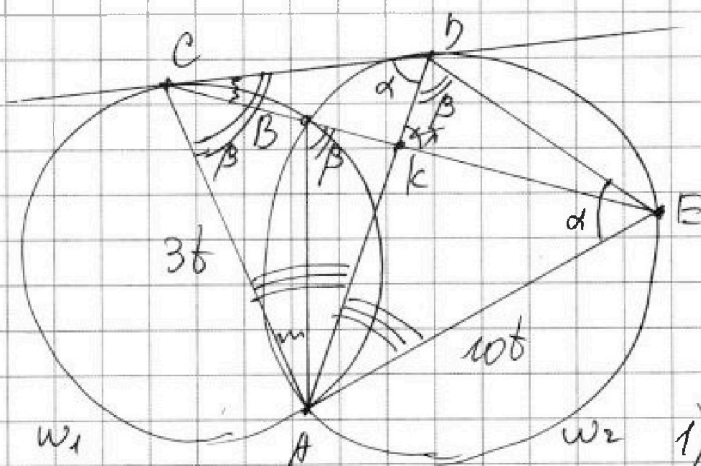
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$,

тогда $\frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$

Пусть $\angle CDA = \alpha$,

$\angle ADE = \beta$, тогда

1) $\angle CDA = \angle DEA = \alpha$, м.к. CD - касат. к w_2

2) $\angle ADE = \angle ABE = \beta$, м.к. $\square ABDE$ - вписан

3) $\angle CAB = \angle DCB$, м.к. CD - касат. к w_1

4) Из т.т. о впис. угол $\triangle ABC$: $\angle ABE = \angle BAC + \angle BCA = \angle DCB + \angle BCA = \angle DCA = \beta$

8) П.к. $\angle CDA = \angle DEA = \alpha$, $\angle ACD = \angle ADE = \beta$, то

$\triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$, $\angle CAK = \angle KAE$

9) П.к. $\angle CAK = \angle KAE$, то по т.т. о биссектр. \Rightarrow

$\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$

Пусть $AC = 3b$, $AE = 10b$,

тогда из (*) $\Rightarrow \frac{3b}{Ab} = \frac{10b \cdot AD}{10b \cdot DE} = \frac{CD}{DE}$

10) $\frac{3b}{Ab} = \frac{AD}{10b} \Rightarrow Ab^2 = 30b^2 \Rightarrow Ab = \sqrt{30}b \Rightarrow \frac{3b}{Ab} = \frac{3b}{\sqrt{30}b}$

Значит, $\frac{ED}{CD} = \frac{Ab}{3b} = \frac{\sqrt{30}b}{3b} = \frac{\sqrt{30}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \neq 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое} \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

П.к $a > b$, то $a - c > b - c$; тогда если $(a - c)(b - c) = p^2$,

p -простое число, то $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$

Если $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases}$, то $a \leq b$ - против

Если $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases}$ или $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases}$, то $a = b$ - против

$$1) \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1$$

П.к $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ или $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

П.к $a - b \neq 3$, то $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \geq 3$

$$a = c + 9, b = c + 1 \Rightarrow a + b^2 = c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$D = 9 + 550 \cdot 4 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{-3 - 47}{2} = -25; c_2 = \frac{-3 + 47}{2} = 22$$

Тогда тройки: $(-16; -24; -25), (31; 23; 22)$

$$2) \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1. \text{ П.к } a - b \neq 3, \text{ то аналогично}$$

п. 1, получаем, что $p \geq 3$, тогда $a = c - 1, b = c - 9 \Rightarrow$

$$a + b^2 = c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560 \Leftrightarrow c^2 - 17c - 480 = 0$$

$$D = 289 + 4 \cdot 480 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17 - 47}{2} = -15; c_2 = \frac{17 + 47}{2} = 32. \text{ Тогда тройки: } (-16; -24; -15), (31; 23; 32)$$

Ответ: $(-16; -24; -25), (31; 23; 22), (-16; -24; -15), (31; 23; 32)$

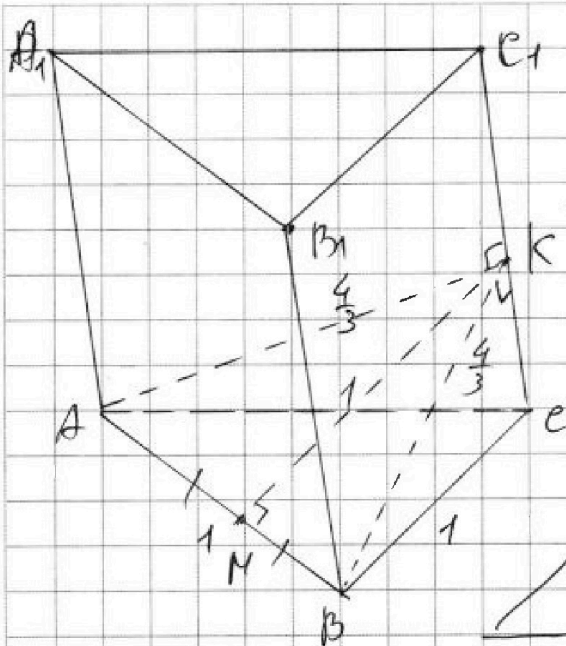
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



П.к. площадь парал. равна e произвед. на высоту, то высоты парал. каждой грани, произвед. к основ., равны 4, 4 и 3.

Пусть e — длина ребра

Пусть грани AA_1C_1 и AB_1C_1 имеют высоту 4, тогда высоты этих парал. произвед. к CC_1 имеют общее основание K на стороне CC_1 (т.к. у них одна высота по 4, стороны 1 и e , тогда сз р-ва Пифагора a равны у них, а значит и другие высоты (BK и AK) также сз e)

П.к. $CC_1 \perp AK$, $CC_1 \perp KB$, то $CC_1 \perp (AKB) \Rightarrow CC_1 \perp AB$

$\Rightarrow CC_1 \perp BB_1 \perp AB \Rightarrow \square AA_1B_1B$ — прямо-к \Rightarrow

$BB_1 = AA_1 = 3$ (высоте к основ.) $\Rightarrow e = 3$.

Тогда $e \cdot BK = 4 \cdot 1 \Rightarrow BK = AK = \frac{4}{e} = \frac{4}{3}$

Пусть M — середина AB , тогда KM — высота.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{по теореме Пифагора } KM = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{32}{18} - \frac{9}{18}} = \sqrt{\frac{23}{18}} = \frac{\sqrt{23}}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{Площадь } S_{AKB} = \frac{1}{2} KM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{3\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{2}}$$

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{AKB} \cdot l$ (так как $\triangle AKB$ — перпендикулярное сечение), где $V_{ABCA_1B_1C_1} = H \cdot S_{ABC}$, где H — высота призмы

$$H = \frac{S_{AKB} \cdot l}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{2}} \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{23} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 2 \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{6}}$

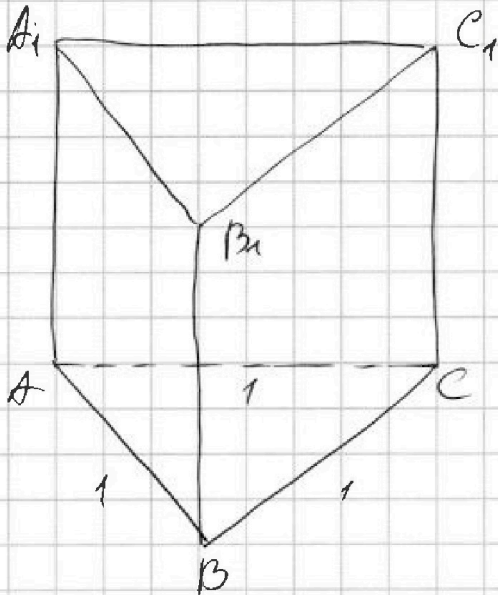


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 4$$

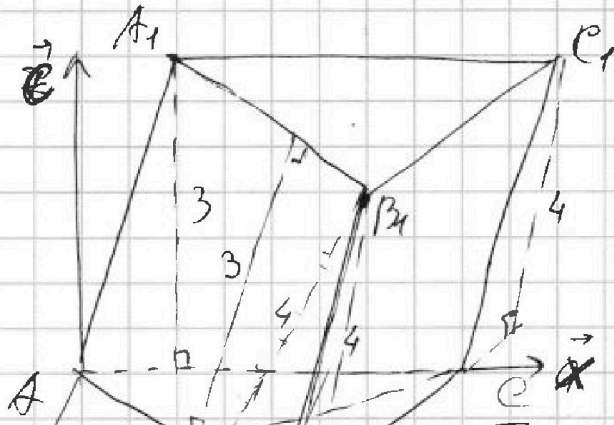
$$S_3 = 3$$

$$h = ?$$

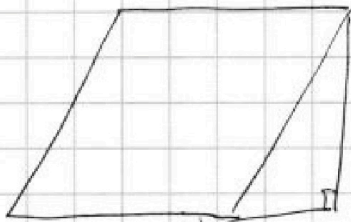
$$h_1 = 4$$

$$h_2 = 4$$

$$h_3 = 3$$



$$h_1 = 1 = S_1$$

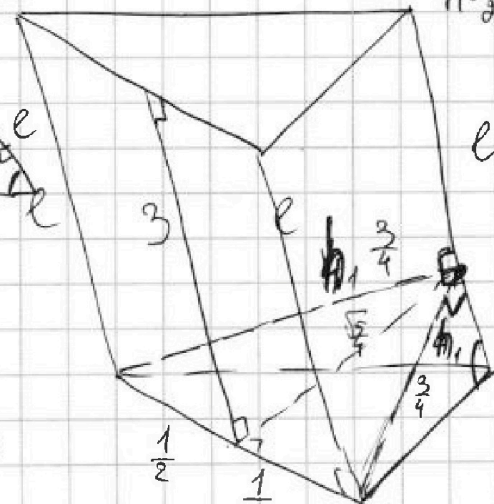
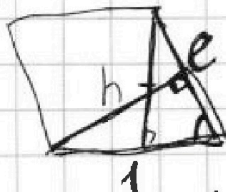
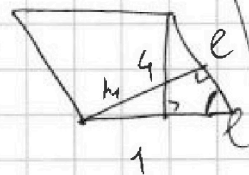
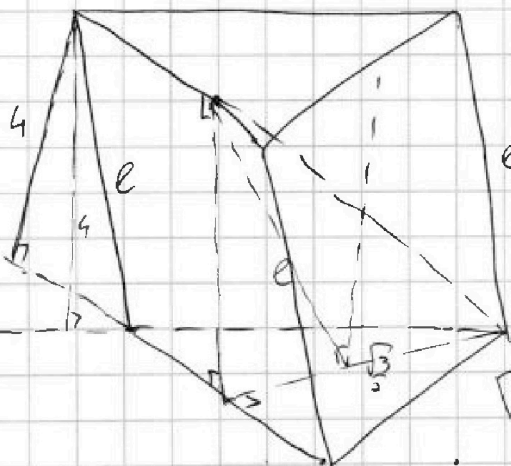


$$\frac{\sqrt{5} \cdot 3}{16} = k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$k = \frac{\sqrt{5} \cdot 3 \cdot 4}{16 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

$$A(0;0;0), B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(1;0;0)$$

A1



$$h_1 e = 4$$

$$4 = h \cdot 3 \quad h = \frac{3}{4}$$

(=3)

$$\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & a \geq b \\ a - b \div 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

1) $a - c = 1, b - c = p^2$
 $a = c + 1$
 $b = c + p^2$
 $a > b$
 $c + 1 > c + p^2$
 $1 > p^2 - \text{нельзя}$

2) $a - c = p^2, b - c = 1$
 $a = c + p^2$
 $b = c + 1$
 $a > b \Leftrightarrow c + p^2 > c + 1$
 $p^2 > 1 - \text{верно}$

$$\underbrace{c + p^2}_a + \underbrace{c^2 + 2c + 1}_{b^2} = 560$$

$$p^2 + c^2 + 3c + 1 = 560$$

$$c + p^2 + b^2 = 560$$

$p = 3$ $a = 9 + c$
 $b = c + 1$

4) $a - c = p$
 $b - c = p$
 $a = b$

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$c^2 + 3c = 550$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209$$

$$\frac{5 \cdot 11 \cdot 10}{25 \cdot 22} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{22}}{2} = 22 \quad 44$$

$c_1 = -25, c_2 = 22$

$a - c > b - c$

$(-16; -24; -25)$
 $(31; 23; 22)$

3) $a - c = -1, b - c = -p^2$
 $a = c - 1$
 $b = c - p^2$

$$a - b = c - 1 - c + p^2 = p^2 - 1 \neq 0$$

$p = 3$

$(14; 6; 15)$
 $(31; 23; 32)$

$a = c - 1$
 $b = c - 9$

$$c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560$$

4.3 10

$$c^2 - 17c = 480$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad 16 \cdot 3 \cdot 10$$

$$c^2 = 289 + 480 = 2209 = 47^2$$

$$c_1 = \frac{17 - 47}{2} = -\frac{30}{2} = -15$$

$$c_2 = \frac{17 + 47}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ + 289 \\ \hline 609 \end{array} \quad \begin{array}{r} < 480 \\ 4 \\ \hline 1020 \\ 289 \\ \hline 2209 \end{array} \quad \begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{t} + \sqrt{t-t+5} = 2\sqrt{t(t-t)}$$

$$\sqrt{t} + \sqrt{5-t} = 2\sqrt{t(5-t)}$$

$$\sqrt{t} - 2\sqrt{t(5-t)} - \sqrt{t-t+5} = 0$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t-t+5} = 2\sqrt{t(5-t)} - 5$$

$$t + 2\sqrt{t} - 2\sqrt{t(5-t)} = 4t(5-t) - 20\sqrt{t(5-t)} + 25$$

$$18\sqrt{t(5-t)} = 4t(5-t) + 18$$

$$9\sqrt{t(5-t)} = 2t(5-t) + 9$$

$$2k^2 - 9k + 9 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$k_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$k_2 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$t(5-t) = \frac{9}{4}$$

$$t^2 - 5t + \frac{9}{4} = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot \frac{9}{4} = 49 - 9 = 40$$

$$t_1 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$t_2 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < \frac{5+5}{2} = 5$$

$$t(5-t) = 9$$

$$t^2 - 5t + 9 = 0$$

$$D = 49 - 36 = 13$$

$$t_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$t_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 - \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$ — хотим бы 1 решение

$-1 - 3 - 6 \leq p \leq 1 + 3 + 6 = 10$ $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x =$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 + 2 + 2\cos^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x (4\cos^2 x - 3) + 3(\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 6\cos x - 3\cos x - 3 = p$$

$$a > b$$

$$a \neq b$$

$$4\cos^3 x + (\cos x + 1)(6\cos x - 3) = p$$

$$(a-c)(b-c) = \frac{p^2}{4}$$

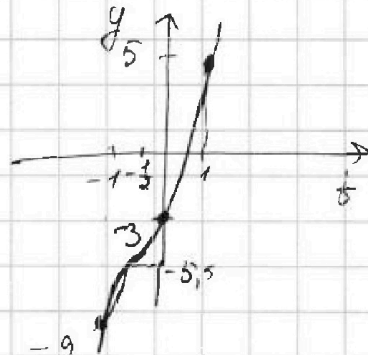
$$4\cos^3 x + 3(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = p$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\cos x = t$$

$$y = 4t^3 + 6t^2 + 6t - 3t - 3 = p$$

$$-1 \leq t \leq 1$$



$$-4 + 1 - 6 + 3 - 3$$

$$f'(x) = 12t^2 + 12t + 6 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$f''(x) = 24t + 12 \geq 0 \Rightarrow (2t + 1)^2 = 0$$

$$f(x) \rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$-1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1$$

$$y = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

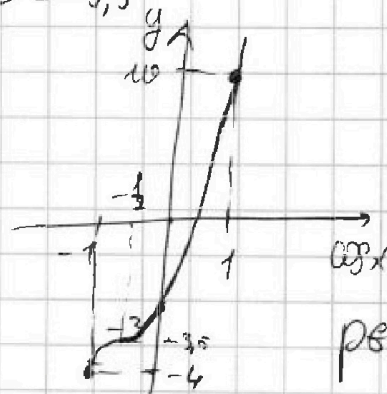
$$-4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -5,5$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$4 + 6 + 3 - 3 =$$

$$-4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$



$$p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-8} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+8}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-8^2}$$

$$\begin{cases} y+1=6 \\ x+3=9 \\ 8+y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9-3 \\ y=6-1 \\ 8+y=6 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-8 \geq 0 \\ y+x-x^2+8 \geq 0 \\ 169-8^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x+3+y+1 = x+y+4 \neq x+y+4+8 = 2+6+8 \quad x \geq -3$$

$$\begin{cases} x=9-3 \\ 4-x=4-9+3=2-9-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8 \leq 4 \\ x^2 \leq x+y+8 \\ 8^2 \leq 169 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{-a-b} + 5 = 4-x-8 = 4+(9+3)-8 = -a-b$$

$$x+3 + 4-x-8 = 2-8$$

$$b-1+a-3-x^2+c+y =$$

$$\begin{aligned} 4-x-8 + y+x-x^2+8 &= \\ &= -x^2+y+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a+b+c+3-x^2 = \\ &= a+b+c+3-a^2+6a-9 = \\ &= 7a+b+c-a^2-6 \end{aligned}$$

$$|b| + 3|b-13| = \sqrt{169-8^2} \leq 13$$

$$\begin{aligned} 1) \quad b \geq 13 \quad & b + 3b - 39 \leq 13 \\ & 4b \leq 52 \\ & b \leq 13 \end{aligned}$$

$$\underline{b=13}$$

$$2) \quad 0 \leq b \leq 13$$

$$\begin{aligned} b + 3b + 39 &\leq 13 \\ -2b &\leq -26 \\ 2b &\geq 26 \\ b &\geq 13 \end{aligned}$$

$$3) \quad b < 0$$

$$\begin{aligned} -b - 3b + 39 &\leq 13 \\ -4b &\leq -26 \\ 4b &\geq 26 \\ b &\geq \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{b=13} \\ y+1 &= 13 \\ y &= 12 \\ \underline{z=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |13| + 3|12-13| &= \sqrt{169-8^2} \\ 13 &= \sqrt{169-8^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-8} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in \mathbb{R} \quad b_i \in \mathbb{R} \quad x-2$$

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad b_{13} = 5-x, \quad b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b_7 = b_9^6, \quad b_{13} = b_9^{12}, \quad b_{15} = b_9^{14}$$

$$b_9^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad b_9^{12} = 5-x, \quad b_9^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\begin{matrix} b_9 \geq 0 & \geq 0 & 5-x \geq 0 & x < 5 \\ & & x \leq 5 & \end{matrix}$$

$$\text{или: } (13x-35)(x+1) \geq 0$$

$$\begin{cases} (13x-35)(x+1) \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \quad | \cdot (x+1)^3$$

$$\begin{cases} (13x-35)(x+1) \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$b = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)} \quad \begin{matrix} \frac{13x-35}{-1} - \frac{35}{13} x \end{matrix}$$

$$b_9^6 = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

или $b_9 \geq 0$, то

$$x \geq \frac{35}{13}, \quad x \geq 5 - \text{прим}$$

$$b_9 \geq 0 \quad q \neq 0$$

$$b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3} = (5-x)b$$

$$b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b^2 q^{12} \cdot (x+1)^4 = b^2 q^{28}$$

$$(x+1)^4 = q^{16}$$

$$\begin{cases} q^4 = x+1 \\ q^4 = x-1 \end{cases}$$

$$b^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}, \quad b_9^{12} = 5-x, \quad b^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b^2 q^{24} = (5-x)^2$$

$$q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$$

$$1) \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = (x+1)$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = 1$$

$$\frac{13x-35-x^2+10x-25}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{x^2-23x+60}{(5-x)^2} = 0$$

$$\begin{matrix} 529 \\ -240 \\ \hline 289 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{529-240}{2} = 289$$

$$x_1 \geq \frac{29-14}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{23+14}{2} = 20$$

> 5 -
прим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = -x-1 \quad /: (x+1) \neq 0$$

$$\frac{13x-35}{(5-x)^2} = -1$$

$$\frac{13x-35+x^2+10x+25}{(5-x)^2} = 0$$

$$\frac{x^2+3x-10}{(5-x)^2} = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2 \quad \& \text{ O O O 3.}$$

Проверка: 1) $x=8$ $\sqrt[6]{9^6} = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$

$$q^6 = 8$$

$$\sqrt[6]{9^{12}} = 2$$

$$q^2 = 2 \quad q = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[6]{9^{14}} = \sqrt{(39-35)(3+1)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

$$q^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$$

$$b = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{32} \cdot 8 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{32} \cdot 64 = 2$$

$$\frac{1}{32} \cdot 128 = 2^2 = 4$$

$$2) \underline{x=20} \quad \sqrt[6]{9^6} = \sqrt{\frac{260-35}{2 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{225}{2 \cdot 13}} = \frac{15}{\sqrt{2 \cdot 13}}$$

$$\sqrt[6]{9^{12}} = \sqrt{5-0}$$

$$3) \underline{x=5} \quad \sqrt[6]{9^6} = \sqrt{\frac{-65-35}{-4^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-4^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt[6]{9^{12}} = 10$$

$$\sqrt[6]{9^{14}} = \sqrt{(-65-35)(-4)} = \sqrt{100 \cdot 4} = 10 \cdot 2 = 20$$

$$q^2 = 2 \quad \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{32} \cdot 8 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{32} \cdot 64 = 10$$

$$\frac{5}{32} \cdot 128 = 5 \cdot 4 = 20$$

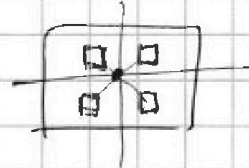
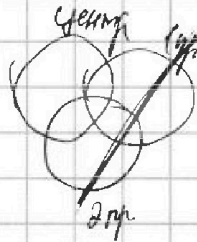
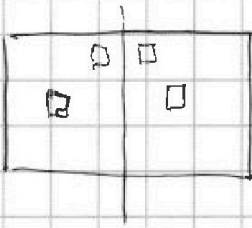


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

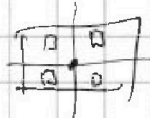
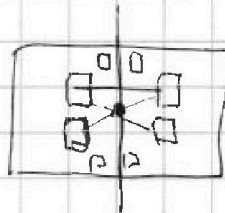
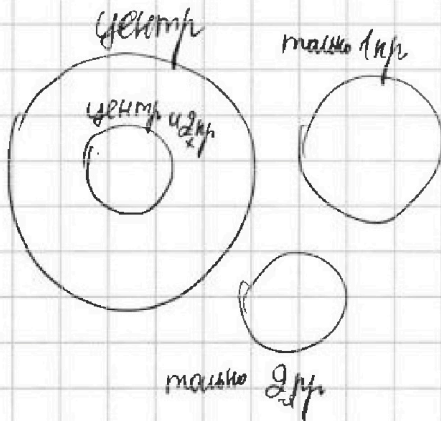
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$25.000 \cdot 50.000 \cdot (50.000 - 2) \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 6) =$$

$$= 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994$$

$$50.000 \cdot (50.000 - 4) = 4 \cdot 25.000 \cdot 24.998$$



$$8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994 +$$

$$16 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994 =$$

$$= 25.000 \cdot 24 \cdot$$

$$C_{50000}^2 \cdot C_{24998}^1 \cdot C_{24996}^1 \cdot C_{24994}^1 +$$

$$+ 2 \cdot C_{50000}^1 \cdot C_{24996}^1 \cdot C_{24992}^1 \cdot C_{24988}^1$$

$$50.000 \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 8) \cdot (50.000 - 12) =$$

$$= 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.996 \cdot 24.994$$

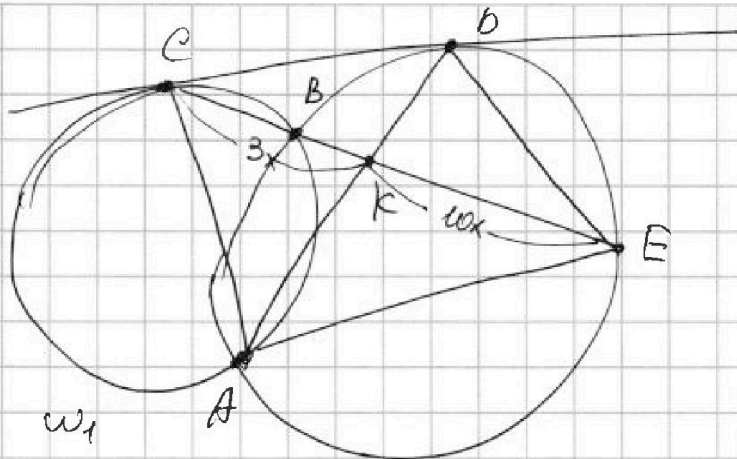


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

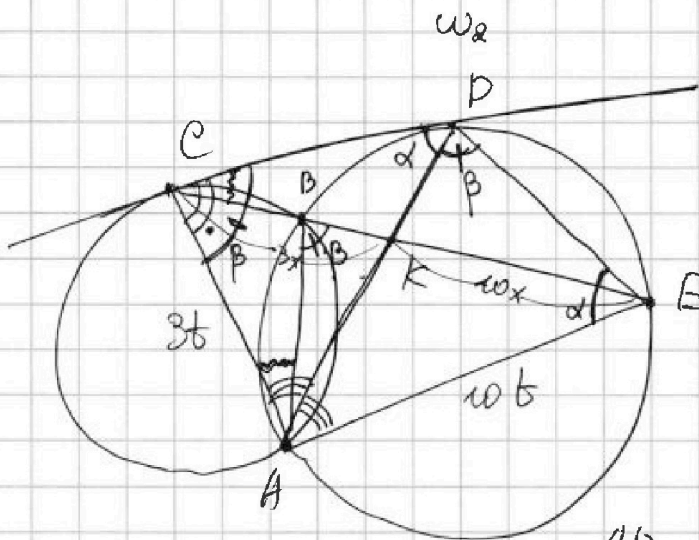
СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$
 $120 \cdot 3 = 360$
 $1 + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} =$
 $= 4 - \frac{3}{2} = 1 - 1,5 = -0,5$

$\frac{ED}{CB} = ?$



$\frac{3x}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \lambda}$
 $\frac{\omega x}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \lambda}$
 $\frac{ED}{CD} = \frac{3x}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\omega x} =$
 $= \frac{3}{\omega} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{AD}{3b} = \frac{AD}{AD} = \frac{DE}{CD}$

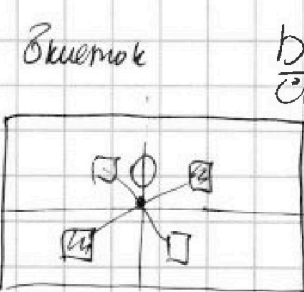
$3b^2 = AB^2$
 $AD = \sqrt{30} \cdot \frac{1}{b}$

$\frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{30} \cdot \frac{1}{b}}{3b} = \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

всего клеток $250 \cdot 200 = 50.000$

$50000 \cdot (50.000 - 2) \cdot (50.000 - 4) \cdot (50.000 - 6) = 8 \cdot 25.000 \cdot 24.998 \cdot 24.994$

$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot AC}{\sin(\alpha + \beta) \cdot AE} = \frac{3}{\omega}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите **номер страницы** и **суммарное количество страниц** в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

