



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \\ b q^8 = x+3 \\ b q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

, где  $b$  - первый член прогрессии, а  $q$  - знаменатель.

$$b > 0 \Rightarrow b q^8 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \begin{matrix} \text{---} \\ -3 & \frac{9}{25} & 6 \\ \text{---} \end{matrix} \xrightarrow{x}$$

Разделим 3-е на 1-е и 2-е:

$$\begin{cases} q^8 = \frac{1}{(x-6)^2} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^6 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} \\ q^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot \frac{1}{x+3} \Rightarrow (x+6) \cdot \frac{\sqrt{25x-9}}{x+3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x-9 = x^2+6x+9 \Rightarrow x^2-19x+18=0 \Rightarrow x = \sqrt[18]{1} \Rightarrow x=18$$

Подстановками можно убедиться, что 18 подходит:

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$4p \cos^3 x - 2 \cos x p + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 12 \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos 3x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = t : (t-1)^2 = t^3(1-p) \quad \text{при } t=0 \text{ реш. нет } \Rightarrow t \neq 0$$

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \sqrt[3]{1-p} = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} = 1 - \sqrt[3]{1-p}$$

$$1 - \sqrt[3]{1-p} = 0 \text{ может не выполняться}$$

$$t = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{1-p} \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

При каких  $p$  решений будет бесконечно много.

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty)$$

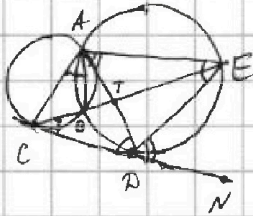


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NY

$\angle AED = \angle ADC = x$ ,  $\angle EAD = \angle EDN = y$ ,  $\angle CAB = \angle TCD = z$  как  
углы, опирающиеся на одну дугу.  
 $\angle CED = 180 - (180 - y) - z = y - z = \angle BAD$  (одна дуга)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAT = \angle BAD + \angle CAB = y - z + z = y$$

$\angle CAT = y = \angle TAE$   
 $\angle ADC = x = \angle AED$   $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$  по 2-м углам  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}; \quad \text{т.к. } AT - \text{биссектр. } \frac{AE}{AC} = \frac{TE}{TC} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AD \cdot AC}{AE} \Rightarrow AC^2 = AD^2 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow AD = AC \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Если  $(a-c)(b-c)$  - квадрат простого числа  $p$ , то

возможны случаи:  $a-c=b-c=p$  или  $\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

Умножив первую условие, получаем, что 2-ой случай не подходит. Рассмотрим первый:  $a-c=b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2+a=710 \Rightarrow D=1+4 \cdot 710=2841, \text{ что не явл. квадратом } \Rightarrow$$

$\Rightarrow a$  будет не целое  $\Rightarrow$  1 случай не подходит.

Остался 3-ий:  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow (1+c)^2+p^2+c=710 \Rightarrow D=9-4p^2+4 \cdot 709 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \leq 26 \Rightarrow p \in \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}. \text{ Из 2-го условия:}$$

$$b-a = p^2 - 1 \Rightarrow \text{Каждо число } (p-1)(p+1) \text{ не делится на 3,}$$

а т.к.  $p-1$  и  $p+1$  взаимно просты, то каждое число  $p-1$  и  $p+1$  не делится на 3  $\Rightarrow p \in \{3\} \Rightarrow a=1+c$  и  $b=9+c$ .

$$\text{Рассмотрим (1): } c^2+3c+p^2-709=0 \Rightarrow c^2+3c-700=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9+2800}}{2} = \begin{cases} 25 \\ -28 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (26; 34; 25) \text{ и } (-27; -19; -28)$$

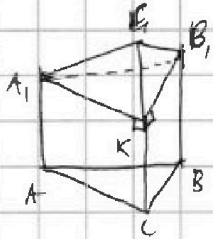


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

Пусть  $A, A = x, C, C = y, B, B = z, AC = BC = AB = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2}a = 3 \\ \frac{y+z}{2}a = 3 \\ \frac{x+z}{2}a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+ay = 6 \\ ay+az = 6 \\ ax+az = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}a \\ z = \frac{2}{3}a \\ y = \frac{4}{3}a \end{cases}$$

Проведем  $B_1K \parallel BC \Rightarrow B_1K \perp KC \Rightarrow CK = y - z$  и  $B_1K = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{C,AK} = \frac{a \cdot y - x}{2} = 1$$

Не трудно заметить, что высота  $AKC$  - высота пирамиды

$$A, C, B_1, K \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow V_{A,C,B_1,K} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{C,AK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{h \cdot a}{2} = 1 \text{ по укл} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{A,C,B_1,K} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{т.к. } A, A = KC = B_1, B, \text{ то } V_{ABC,KA_1} = x \cdot S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Суммарный объем: } \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

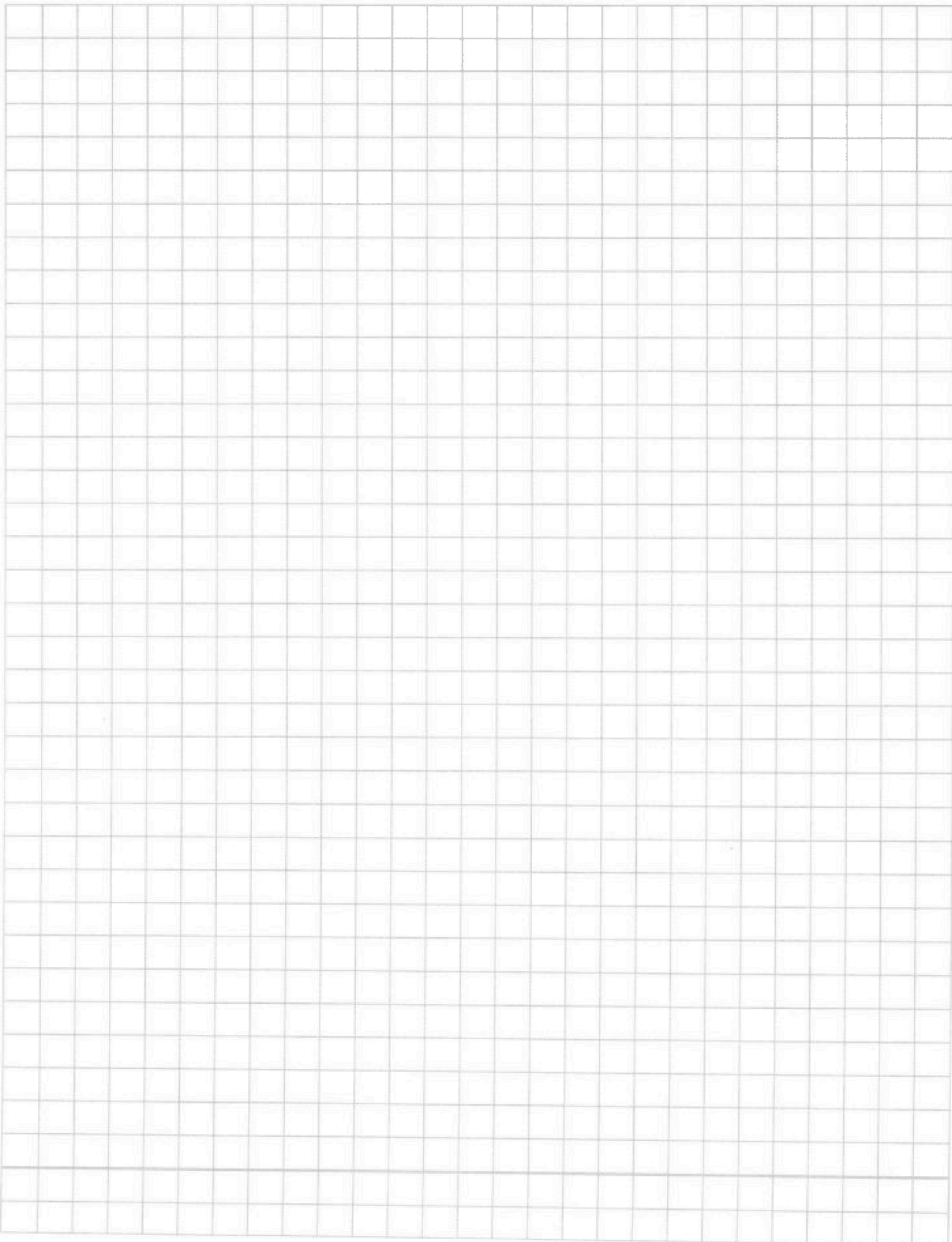


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

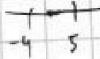
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b-c=1$$

$$a-c=p^2$$

$$(p^2+c)^2 + 1+c = 710$$

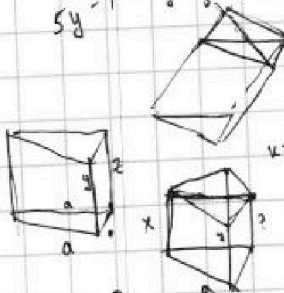
9 ≤ 259



$$-5y+1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{5} \Rightarrow y \leq 0.2$$

$$-3y+9 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y \leq 3$$

$$5y-1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{5} \Rightarrow y \geq 0.2$$



$$\frac{x+1}{2} a = 3$$

$$\frac{4x+2}{2} a = 3$$

$$\frac{4x+2}{2} a = 2$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$4x+2 = 2$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 1$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 1$$

$$f(x) = \sqrt{25x-9} \cdot (x-6)$$

$$f'(x) = \frac{25}{2\sqrt{25x-9}} \cdot (x-6) + \sqrt{25x-9} \cdot 1$$

$$f'(x) = \frac{25(x-6) + 2(25x-9)}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{25x-150+50x-18}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$f'(x) = \frac{75x-168}{2\sqrt{25x-9}}$$

$$\sqrt{x+5} + 4 \geq \sqrt{7-x-42}$$

$$x+5+8\sqrt{x+5}+16 \geq 7-x-42$$

$$8\sqrt{x+5} \geq -20-2x-42$$

$$c+1 < c+p^2$$

$$1 < p^2$$

$$p^2+c < 7+c$$

$$p^2 < 1$$

$$\frac{19}{19} = 1$$

$$\frac{121}{36} = 3.36$$

$$\frac{72}{283}$$

$$25x+9 = x^2+6x+9$$

$$x^2-19x+18=0$$

$$19^2-4 \cdot 18 = 289-72 = 217$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{217}}{2}$$

$$\frac{25}{18} = 1.38$$

$$\frac{25}{450} = 0.055$$

$$441 \cdot 12 = 5292$$

$$21 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 42\sqrt{3}$$

$$21 \cdot 2 = 42$$

$$\frac{21}{\sqrt{12}} = \frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$12 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$21 \cdot 34 \cdot 25 = 22770$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\frac{15}{53} = 0.283$$

$$\frac{265}{28} = 9.46$$

$$9 = 2\sqrt{3}$$

p ∈ 26

$$711 \geq p^2$$

$$711$$

$$\Rightarrow$$

$$28$$

$$(7+c)^2 + p^2 + c = 710$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 710$$

$$c^2 + 3c + p^2 - 709 = 0$$

$$9 - 4p^2 + 4 \cdot 709 \geq 0$$

$$9 + 4 \cdot 709 = 2837$$

$$2809$$

$$\frac{709}{4} = 177.25$$

$$\frac{2844}{21} = 135.42$$

$$\frac{2836}{9} = 315.11$$

$$\frac{712845}{9} = 79205$$

$$\frac{2840}{2845719^2}$$

$$2841$$

$$p^2+c = 1-c$$

$$p^2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq' = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$bq'' = x+3$$

$$bq''' = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$$

$$(bq''')^2 = (x+3) \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

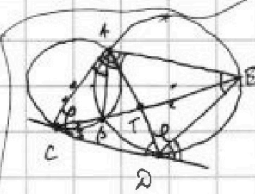
$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$x > \frac{9}{25}$   
 $x > 6$

$$q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^3}}$$

$$\frac{1}{(x-6)^3} = x+3$$

$$1 = (x+3)(x-6)^3$$



$$\frac{CT}{TE} = \frac{2}{5}$$

$$CB \cdot CE = CT^2$$

$$CB(CB+BE) = CT^2$$

$$CE = 2x$$

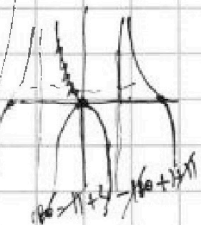
$$\frac{AE}{CA} = \frac{5}{2} = \frac{54}{24}$$

$$\frac{ED}{AB} = \frac{TD}{BT} = \frac{ET}{AT}$$



$$\frac{180-111}{180-111} = 1$$

$$\frac{11-3}{11} = \dots$$



$$1 - \frac{1}{t} = \sqrt{1-p} \quad \frac{t-1}{t} = \sqrt{1-p}$$

$$\frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{t-1}{t-1} = \frac{2x}{t-1}$$

$$1 - \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = p$$

$$\frac{t^3 - (t-1)^3}{t^3} = \frac{(t-t+1)(t^2+t(t-1)+t-1)}{t^3}$$

$$\frac{t^3 - t^3 + 3t^2 - 3t + 1}{t^3} = p$$

$$\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} = p$$

$$0 < 1 \leq 1 - \sqrt{1-p} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{27}{52} \leq \frac{27}{62} \leq \frac{27}{29}$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a = 1 + 4 \cdot 710$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a = 1 + 4 \cdot 710$$

$$31 - p \leq 0$$

$$9 - 4p^2 + 710 \geq 0$$

$$719; 715; 8 \leq 1 + p \leq 4$$

$$p^2 = 1$$

$$p = -1$$

$$a^2 + a - 710 = 0$$

$$a = 1 + 4 \cdot 710$$

$$31 - p \leq 0$$

$$9 - 4p^2 + 710 \geq 0$$

$$719; 715; 8 \leq 1 + p \leq 4$$

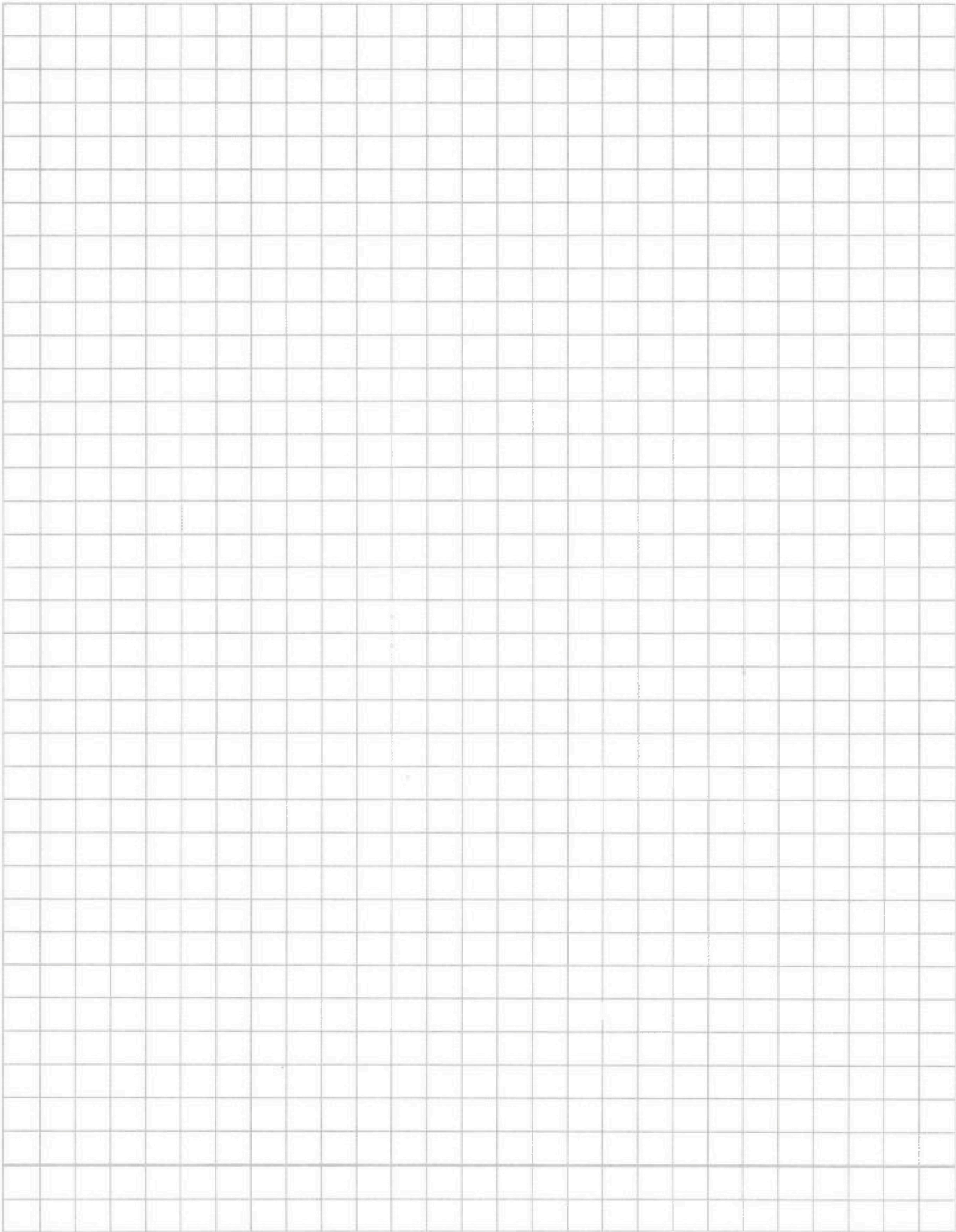


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

