



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 6} - \sqrt{3 - x - 2z} + 7 = 2\sqrt{y - 3x - x^2 + z}, \\ |y + 2| + 2|y - 18| = \sqrt{400 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p + 4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

111

$$b_{10} = b \cdot q^9, \text{ где } b - \text{нач. член } q - \text{прогрессии}$$

$$b_{12} = b \cdot q^{11}; \quad b_{12} = b_{10} \cdot q^2 = 2 - x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2$$

$$b_{18} = b \cdot q^{17}; \quad b_{18} = b_{10} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^8$$

$$\begin{cases} 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2 \\ \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ (3x+2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -\frac{34}{25} \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{34}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \\ 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} < x \leq 2 \\ x \leq -\frac{34}{25} \\ q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \Rightarrow q^4 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)} \\ q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|3x+2|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)} = \frac{1}{|3x+2|} \quad \text{A) } 3x+2 > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4-4x+x^2-25x-34}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-29x-30}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{(x-30)(x+1)}{(25x+34)(3x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=30 \rightarrow x \leq 2, \text{ не логично} \\ x=-1 \rightarrow 3x+2 < 0, \text{ не логично} \end{cases}$$

$$\text{B) } 3x+2 < 0 \rightarrow \frac{4-4x+x^2+25x+34}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \rightarrow \frac{x^2+21x+38}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+19)(x+2)}{(25x+34)(3x+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

подставим $x = -19$

$$b_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-19) + 34)(3 \cdot (-19) + 2)} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{25(-19) + 34}{(3 \cdot (-19) + 2)^3}}$$

~~$$b_{10} = \sqrt{45 \cdot 19^2 - 19 \cdot (50 + 102) + 68} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}}$$~~

~~$$b_{10} = \sqrt{19(19 \cdot 45 - 152) + 68} \quad b_{12} = 21 \quad b_{18} = \frac{21}{55 \cdot 55}$$~~

$$b_{10} = \sqrt{(-441) \cdot (-55)} = 21 \sqrt{55}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{55} \quad b_{18} = b_{12} \cdot q^6 = b_{12} \cdot (q^2)^3 = \frac{21}{55 \cdot 55}$$

$x = -19$ подходит

подставим $x = -2$

$$b_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-2) + 34)(3 \cdot (-2) + 2)} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{25(-2) + 34}{(3 \cdot (-2) + 2)^3}}$$

$$b_{10} = \sqrt{(-16) \cdot (-2)} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-2)^3}}$$

$$b_{10} = 4\sqrt{2} \quad b_{12} = 4 \quad b_{18} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$b_{12} = b_{10} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad b_{18} = b_{12} \cdot q^6 = b_{12} \cdot (q^2)^3 = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$x = -2$ подходит

Ответ: $x = \{-2; -19\}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 25 \\ \hline 225 \\ \times 19 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 45 \\ \hline 49 \\ \times 19 \\ \hline 881 \\ - 1425 \\ \hline 152 \\ \times 2043 \\ \hline 19 \\ \hline 2454 \\ 243 \\ \hline + 5184 \\ \hline 68 \\ \hline - 52555 \\ \hline 5 \\ \hline 25 \\ 295 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1050 \\ 1050 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} & (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

преобраз (2) упр-ние, возведем в квадрат обе части +

$$y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 4 \cdot 18 \cdot 2y + 4 \cdot 18^2 + 4|y+2||y-18| = 400 - z^2$$

$$5y^2 - 4 \cdot 35y + z^2 + 4|y+2||y-18| + 4 + (2 \cdot 18 - 20)(2 \cdot 18 + 20) = 0$$

$$5y^2 - 4 \cdot 35y + 900 + z^2 + 4|y+2||y-18| = 0$$

$$5(y-14)^2 + 900 - 196 \cdot 5 + z^2 + 4|y+2||y-18| = 0$$

$$5(y-14)^2 - 80 + z^2 + 4|y+2||y-18| = 0$$

$$5(y-14)^2 + z^2 + |4y^2 - 64y - 144| - 80 = 0$$

$$A) \begin{cases} y \geq 18 \\ y \leq -2 \end{cases} \rightarrow 5y^2 - 28 \cdot 5y + 196 \cdot 5 + z^2 + 4y^2 - 64y - 224 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 204y + 756 + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3y)^2 - 2 \cdot 34 \cdot 3y + 34 \cdot 34 - 34 \cdot 34 + 756 + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3y-34)^2 + z^2 = 400 \Rightarrow y \in [10, 18]$$

$$B) -2 < y < 18 \quad 5y^2 - 28 \cdot 5y + 196 \cdot 5 + z^2 - 4y^2 + 64y + 224 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 80y + 980 + 224 + z^2 = 0 \Rightarrow (y-38)^2 + z^2 = 400$$

$$400 - (y-38)^2 \geq 0 \Rightarrow y \in [18, 58] \Rightarrow y \in [18, 58] \cap [10, 18] = [18, 18] \Rightarrow y = 18$$

3
51
16
376
56
836
4
800
43
186
5
980
102
102
204
028
102
3000
456
9
34
34
136
102
2386
456
160



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

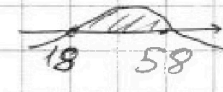
СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 18 \\ y \leq -2 \end{cases} \\ (3y-34)^2 + z^2 = 400 \Rightarrow 400 - (3y-34)^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (20-3y+34)(20+3y-34) \geq 0 \\ (54-3y)(3y-14) \geq 0 \end{cases}$$

или ии

$$\begin{cases} -2 < y < 18 \\ (y-38)^2 + z^2 = 400 \Rightarrow 400 - (y-38)^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (20-y+38)(20+y-38) \geq 0 \\ (58-y)(y-18) \geq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 18 \\ y \leq -2 \end{cases} \\ \frac{14}{3} \leq y \leq 18 \\ -2 < y < 18 \\ 18 \leq y \leq 58 \end{cases} \Rightarrow y = 18$$

- как реш

~~$y = 18 \Rightarrow z = \sqrt{400 - 18^2} = \sqrt{20 \cdot 38} = \sqrt{2 \cdot 38} = \sqrt{76}$~~

$\Rightarrow 20 = \sqrt{400 - z^2} \Rightarrow z = 0$
поиск в 1-е чл $y = 18; z = 0$

~~$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{20-3x-x^2} \Rightarrow -6 \leq x \leq 3$~~

~~$\frac{3+19+40}{-2} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{49}}{-2}$~~

~~ка отп. $-5 \leq x \leq 2$ левая часть мон. возр.~~

~~$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 \geq 8 - \sqrt{8}$~~

~~max правой части при $x = -\frac{3}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \cdot 4 + 20} = \dots$~~

~~$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{20-3x-x^2} \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{20-3x-x^2}$~~

~~$x+6+3-x-2\sqrt{20-3x-x^2} = -4x^2 - 12x + 40 + 49 - 28\sqrt{20-3x-x^2}$~~

~~$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+3-x}$ ОДЗ: $-6 \leq x \leq 3$, ка~~

~~этом отп. лев. часть мон. возр, $\sqrt{x+6} \uparrow$; $-\sqrt{3-x} \uparrow$; прав. часть~~

~~достиг макс при $x = -\frac{3}{2}$; при этом значение 3 прикинь равн 9~~

||



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $y=18; z=0$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$$

$$\sqrt{x+6} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{x+6} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}$$

$$= 4(18-3x-x^2) + 3-x + 6 - 2\sqrt{x+6} - 2x\sqrt{3-x}$$

заменим

$$4x^2 + 12x + 55 - 42 - 3 = \sqrt{x+6} + 2x - 8$$

$$4x^2 + 14x - 20 = -2\sqrt{x+6}(x+4)$$

$$\sqrt{4x^2 + 14x - 20} = 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+4}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t+9} + 4 = 2\sqrt{t}\sqrt{t+9}$$

$$t + t + 9 + 49 - 14\sqrt{t} - 14\sqrt{t+9} - 2\sqrt{t}\sqrt{t+9} = 2\sqrt{t}\sqrt{t+9}$$

$$2t + 51 - 13\sqrt{t} - 13\sqrt{t+9} = 4\sqrt{t}\sqrt{t+9}$$

$$-4t^2 - 34t + 51 - 13\sqrt{t} - 13\sqrt{t+9} = 0$$

$x = -\frac{3}{2}$ единиц и подл, т.к. при

$-\frac{3}{2}$ $2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$ достигн. максимума, а

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4$ на отрезке $-6 \leq x \leq 3$

монотонно возрастает

(M)

$$x = -\frac{3}{2}; y = 18; z = 0$$

Ответ: $\{(-\frac{3}{2}; 18; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \cos x (2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x - 2) =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p \cdot 4 \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 ; \text{ если допустить } \cos x = t \text{ - все имеем}$$

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0 ; \text{ пусть } t^3 = (p-1), \text{ тогда}$$

$$(t+1)^3 + t^3 \cos^3 x = 0 \Rightarrow (t+1 + t \cos x) \cdot (\cos^2 x + 2 \cos x +$$

$$t+1 + t^2 \cos^2 x - t \cos^2 x - t \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x(t+1) = -1 & - \text{имеем реш при } \left| -\frac{1}{t+1} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (t^2 - t + 1) \cos^2 x + (2-t) \cos x + 1 = 0 & - \text{имеем реш при } D \geq 0, \text{ и } t \geq 0 \\ t^2 - t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1 \geq 1 \\ t+1 \leq -1 \\ 4 + t^2 - 4t - 4t^2 + 4t - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 ; \cos x = \frac{1}{t+1} \\ t \leq -2 ; \cos x = \frac{1}{t+1} \\ -3t^2 \geq 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ \sqrt[3]{p-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 1 \rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ p \leq -4 \rightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \sqrt[3]{p-1} = 0 \rightarrow \text{ни 2-ух } \cos x = -1, \text{ так как } \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 0 \end{cases} ; \quad x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 0 \end{cases} ; \quad x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

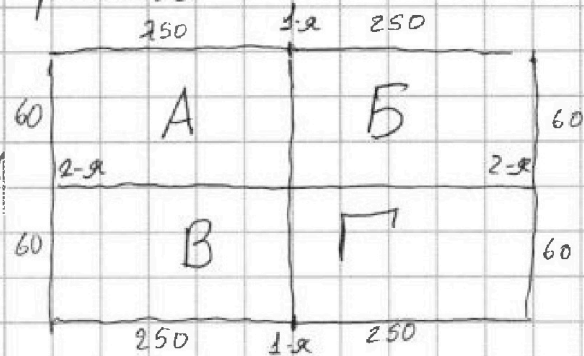
№5

Разобьем прямоугольник на 4 равных
квадратах АБВГ

без ср. линий. Назовем

ср. линию между АВ и ВГ

1-й, а ср. линию между
АБ и ВГ 2-й



Симметрия относительно центра по

4 точкам в ВГ однозначно задает 4 точки в АБ
(меньше 4-х точек в ВГ и больше 4-х не может быть, т.к. иначе
в АБ либо > 4-х т. либо < 4-х точек)

Симметрия относительно 1-й ср. линии по прямой АВ
однозначно задает 4 точки в ВГ, а наоборот
для 2-й ср. линии

если эти одновременно выполняются 2
симметрии, то по 2-м точкам в прямой

А однозначно задатся остальные точки

(если центр ^{и ср. линии} совпадает с центром Г по прямой. Если, значит В и Б по
симм. относительно ср. линии; если ср. линия по
А → В → ВГ), точек в прямой 1 единственно, 2, или

если 3, то, следовательно, больше (n), но в Г точек =>
=> в ВБ 2n => всего 4n точек)

если выполняются все 3 симметрии, то
по одной точке в А однозначно задатся 4 других,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

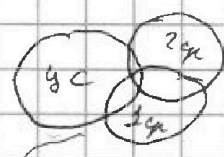
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при чем 1 из заданных машин будет в прием А =>
=> вар. 3 или $C_{\frac{1}{2}}^{250 \cdot 60}$

Суммарное число вариантов



$$\sum_{40} = \sum_{1,2} + \sum_{1,3} + \sum_{2,3} - \sum_{1,2,3} - \sum_{1,2} - \sum_{1,3} - \sum_{2,3} + \sum_{1,2,3}$$

$$= C_4^{250 \cdot 60} + C_4^{500 \cdot 60} + C_4^{500 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} - C_2^{250 \cdot 60} + \frac{C_2^{250 \cdot 60}}{2} =$$

$$= 3 \frac{(500 \cdot 60)!}{(500 \cdot 60 - 4)! \cdot 4!} - 3 \frac{250 \cdot 60!}{(250 \cdot 60 - 2)! \cdot 2!} + \frac{250 \cdot 60}{2} =$$

$$\neq 3 \frac{(500 \cdot 60)(500 \cdot 60 - 1)(500 \cdot 60 - 2)(500 \cdot 60 - 3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{250 \cdot 60(250 \cdot 60 - 1)}{2}$$

$$= 3 \frac{30000!}{29996! \cdot 4!} - 3 \frac{15000!}{14998! \cdot 2!} + 4500$$

Ответ: $\frac{3 \cdot 30000!}{29996! \cdot 4!} - \frac{3 \cdot 15000!}{14998! \cdot 2!} + 4500$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$a < b \quad b-a \neq 3 \quad (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \text{ — нек. пр. число}$$

$$a^2 + b = 1000$$

если $(a-c)(b-c) = p^2 \rightarrow$

$$\begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = p^2+c \\ b = 1+c \end{cases} \text{ — неважно, } p^2 > 0 \Rightarrow a^2 > b \text{ — } \times$$

$$\begin{cases} a = p+c \\ b = p+c \end{cases} \text{ — неважно } \times \text{ с } a < b$$

$$\Rightarrow a = 1+c; b = p^2+c$$

$$b-a = p^2-1 = (p-1)(p+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} p-1 \neq 0 \pmod{3} \\ p+1 \neq 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \neq 1 \pmod{3} \\ p \neq 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}; \text{ эквивалентно } p \text{ простое число } \equiv 0 \pmod{3} = 3m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = 9+c \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = 1000 \Leftrightarrow c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3c - 990 = 0 \quad c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 990}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{441}}{2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -33 \end{cases}$$

$$c = 30 \rightarrow a = 31 \quad b = 39, \quad c = -33 \rightarrow a = -32 \quad b = -24$$

проверим $(31; 39; 30) \rightarrow a < b; b-a = 8; 1 \cdot 9 = 9 = 3^2;$

$$31 \cdot 31 + 39 = 961 + 39 = 1000$$

проверим $(-32; -24; -33) \rightarrow a < b; b-a = 8; 1 \cdot 9 = 9 = 3^2;$

$$32 \cdot 32 - 24 = 1024 - 24 = 1000$$

Ответ: $\{(31, 39, 30); (-32, -24, -33)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(400 - 3y + 34)(20 + 3y - 34) \geq 0$$

$$(54 - 3y)(3y - 14) \geq 0 \quad D = 49 + 80 = 129$$

$$18 \pm 3x - x^2 = 16 \quad x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{x+4.5} - \sqrt{4.5-x} + 4 = 2\sqrt{4.5-t}\sqrt{4.5+t}$$

$$-3\sqrt{3-16} + 4 = 2\sqrt{3}\sqrt{16} - \frac{6}{4}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 4 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}$$

$$u = \sqrt{x+6}$$

$$u - v + 4 = 2uv$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$4 = 2uv + u + v \quad 4t^2 + 34t +$$

$$4 = u(2v+1)$$

$$\sqrt{2x+12}\sqrt{6-2x}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{5} + 4 = 2\sqrt{5}$$

$$9 = 4$$

$$\frac{4-v}{2v-1} = u \quad \sqrt{x+6} + 4 = \sqrt{3-x}(\sqrt{x+6} + 2)$$

$$x+6+49+14\sqrt{x+6} = 3-x(x+6+2\sqrt{x+6}+1)$$

$$x+6+49+$$

$$-\frac{5}{2} \quad \sqrt{\frac{4}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}} + 4 = 2\sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$\frac{4}{2} - \frac{4}{2}$$

$$\frac{4 - \sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1} = \sqrt{x+6}$$

$$x+6 = \frac{49-3+x-14\sqrt{3-x}}{4(12-4x+1-4\sqrt{3-x})}$$

$$-\frac{5}{2}$$

$$\frac{12-9}{2} = \sqrt{\frac{11}{2}} \quad \sqrt{\frac{11}{2}} - 4 = \sqrt{\frac{44}{2}}$$

$$2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} + 4 = -\frac{9}{2}$$

$$\sqrt{15} - \sqrt{15} + 4 = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6+3-x-2z+49 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x-2z} + 4\sqrt{x+6} - 4\sqrt{3-x-2z} = 4y-2x-4x^2+4z \\ y^2+4y+4 + 4y^2 - 4 \cdot 18 \cdot 2y + 4 \cdot 18^2 = 400-z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+12x-6z-4y+58 - 2\sqrt{3x-x^2-2zx+(8-6x-12z)} + 4\sqrt{x+6} - 4\sqrt{3-x-2z} = 0 \\ 5y^2 - 4 \cdot 35y + 4 + (2 \cdot 18 - 20)(2 \cdot 18 + 20) + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+12x-6z-4y+58 - 2\sqrt{-x^2-3x-2zx-12z+18} + 4\sqrt{x+6} - 4\sqrt{3-x-2z} = 0 \\ 5y^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7y + z^2 + 900 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 4 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ 5(y-14)^2 + z^2 = -900 \end{cases}$$

400 + 3y

$$4 - 4 \cdot 18 \cdot 2$$

$$\frac{34}{3} - \frac{102 \cdot 302}{72} \sqrt{456 \cdot 9}$$

$$5(y^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14y + 180)$$

$$(y-14)(54-3y)$$

$$(y - \frac{14}{3})(18-y)$$

$$y \in [\frac{14}{3}, 18]$$

456 y

20-y+32

20+y-38

(y-18)(58-y)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

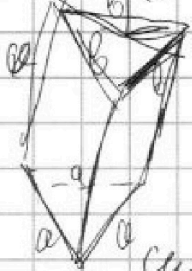
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\cos x + 1 + t \cos x) (\cos^2 x + 2t \cos x + 1 + t \cos^2 x - t \cos^2 x - t \cos x) = 0$$

$$\cos x (t + 1) = -1$$

$$(t^2 - t + 1) \cos^2 x + (t - 1) \cos x + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{t+1}, \text{ если решим} \\ -1 \leq -\frac{1}{t+1} \leq 1 \\ \text{дискриминант} \\ D \geq 0 \Rightarrow 4 + t^2 - 4t - 4t^2 + 4t - 4 \geq 0 \\ -3t^2 \geq 0 \text{ только} \\ \text{при } t = 0 \end{array} \right.$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^3 = 4$$

$$a^3 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

и 5 разрезаем грань куба

размер 250 250

симметричная отн центра по 4 точкам в A и B

одна из задает квадрат В и Г

симм. отн. центр. куба

одна из точек из АВ задает ВГ либо из АБ задает ВГ

случаев, когда разрез симметрична отн центру куба

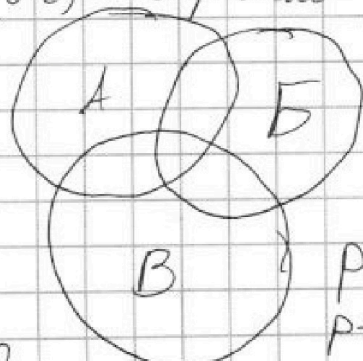
что по одну сторону 2-х точек в В задает

все остальные

$$(a-c)(b-c) - \text{всп. число} = p^2$$

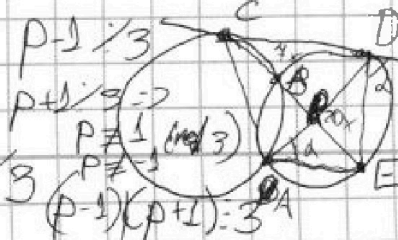
$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \text{ кев } a < b$$

$$\begin{cases} a = 1+c \\ b = 9+c \\ c = \end{cases}$$



$$A+B+C - AB - AC - BC = \frac{b-a}{2} = \frac{p^2-1}{2}$$

$$b-a = p^2 - 1 \cdot \frac{1}{3}$$



$$p = 3 \Rightarrow b = 1+c$$

$$b = 9+c$$

$$a = 1+c$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{|x+6|} - \sqrt{|3-x-2z|} + 4 = 2\sqrt{|y-3x-x^2+z|}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

30000-29999+29998-29994 - 12-14999-1500
4.3-2
15000+14999(2-29999-29994)
4.3-2 - 4500

$$x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \quad 400-z^2 \geq 0 \Rightarrow -20 \leq z \leq 20$$

$$3-x-2z \geq 0 \Rightarrow x \leq 3-2z \quad 2z \leq 3-x \quad x \geq -6 \Rightarrow 2z \leq 9 \Rightarrow z \leq \frac{9}{2}$$

4500(29998-29999-29994-1)

$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 2|y+2||y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = (\cos 2x + \cos x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos^2 x - 2) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$p \cdot 4 \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$f(\cos x) = p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 =$$

$$f'(\cos x) = 3p \cos^2 x + 6 \cos x + 3 \quad D = 36 -$$

$$D > 0 \rightarrow \text{3 реальных корня, 2虚数}$$

$$D < 0$$

$$= \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 + (p-1) \cos^3 x = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 + (p-1) \cos^3 x = 0 \quad \text{выстав } \sqrt[3]{p-1} = t,$$