



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть  $b_1$  - первый член этой прогрессии, а  $q$  - её знаменатель.  $b_n, q \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} = b_1 \cdot q^{11}$$

~~$(15x+6)(x-3) \geq 0$~~   ~~$x > 3$~~   ~~$x < -\frac{2}{5}$~~   ~~$x > 3$~~

$$(15x+6)(x-3) \geq 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{2}{5} \quad 3 \end{array} \rightarrow x$$

$$x > 3: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(x-3)^8} \quad q = \sqrt[4]{x-3}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} \quad x+4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 3^2 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$$

но  $x=2$  не подходит. Так.  $x > 3$  подходит,  $x=5$ .

$$x < -\frac{2}{5}: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^8}{(15x+6)^4}} = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{3-x}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)} \quad x+4 = \sqrt{-(15x+6)}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 23x + 22 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; 22 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x = -1$$

Ответ:  $x = -1; 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 + 4\sqrt{2} > -1 \quad -1 + 4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к. } 4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается,  $x = -1 + 4\sqrt{2}$  не подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 - \frac{7}{2} > -5 > -7, \quad -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{-3\sqrt{5}-2}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается,  $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$  подходит.

$$-1 + \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 \quad \frac{3\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$$

$$45 \vee 27 + 6\sqrt{3} < 18 \vee 6\sqrt{3} \quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}-2}{2} > \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

значит  $x = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{5}$  не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернёмся в систему и найдём  $z$ :

$$\begin{cases} x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

~~Ответ:  $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$~~

Ответ:  $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = 35, z = 0.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

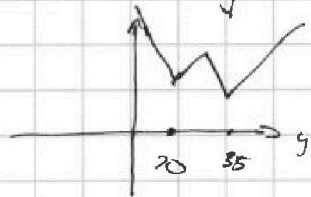
СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (I) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (II) \end{cases}$$

Рассмотрим II: Правая часть имеет обычный график корня по  $z$ , принимает значения на  $[0; 15]$  на  $[-15; 15]$ . При  $[-15; 0]$  возрастает, в  $-15$  минимум, мин. значение равно 0, в 0 максимум, макс. значение равно 15. При  $[0; 15]$  убывает, в 15 максимум, макс. значение равно 0.

Левая часть гр-я имеет график по  $y$ , минимумы в  $20$  и  $35$ .



В точках  $20$  и  $35$  достигается максимум, если  $y$  не минимальный, при мин. график.

График принимает миним. значение.  $y=20$ :  $2|20-35| = 30$ ,  $y=35$ :

$|25-20| = 15$ .  $\Rightarrow$  при  $y=35$  макс. значение, и это 15. Заметим,

что ~~левая~~ левая часть гр-я имеет максимальное значение, достигаемое в одной точке, равное максимуму значения правой части, достигаемому в одной точке, а значения

$y$  уравнения есть только единственное решение:

$y=35, z=0$ . Вернемся в систему.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \\ y=35, z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)} \\ y=35, z=0 \end{cases}$$

~~Пусть  $a = \sqrt{x+7}, b = \sqrt{5-x}$ .  $a, b \in \mathbb{R}$   $a \geq 0, b \geq 0$ . Вернемся к системе~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~4x-6 > 6 > 2 > 6~~ Выведем из системы, чтобы решить 1-е уравнение.

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{(5-x)(x+7)} - 3)$$

$x \in [-7; 5]$  всегда в этом промежутке

$$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{5-x} \quad x+7 \geq 5-x \quad 2x \geq -2 \quad x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+7} < \sqrt{5-x} \text{ при } x < -1$$

$$\sqrt{(5-x)(x+7)} \geq 3 \quad -x^2 - 2x + 35 \geq 9 \quad x^2 + 2x - 26 \leq 0 \quad D_x = 1 + 28 = 29$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} < x < \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x \in \left[ \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \right]$$

$$x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Получается, что можно  $x \in [-7; \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}]$ , можно  $x \in [\frac{-1 + \sqrt{29}}{2}; 5]$

$$\text{При } x \in [-7; \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-1 + \sqrt{29}}{2}; 5]: 12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(5-x)(x+7) + 35 -$$

$$- 9 = 3 \cdot \sqrt{(x+7)(5-x)}. \text{ Пусть } t = \sqrt{(x+7)(5-x)}, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad D_{4t} = 121 - 96 = 5^2 \quad t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = \frac{3}{2} \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \quad D_x = 1 + 31^2 \\ x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0 \quad D_x = 16 + 131^2 \end{cases}$$

$$= 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$= 600 = (6\sqrt{5})^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2} \\ x = \frac{-1 \pm 6\sqrt{5}}{4} = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{cases}$$

Получившиеся корни функции подпадают в  $[-7; \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-1 + \sqrt{29}}{2}; 5]$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -7 \quad -4\sqrt{2} < -6 \quad -\sqrt{32} > -\sqrt{36} \quad -1 - 4\sqrt{2} < -\frac{3\sqrt{5}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -6 < \frac{-5-1}{2} < \frac{-\sqrt{3}-1}{2}. \text{ Получается, } x = -1 - 4\sqrt{2} \text{ подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

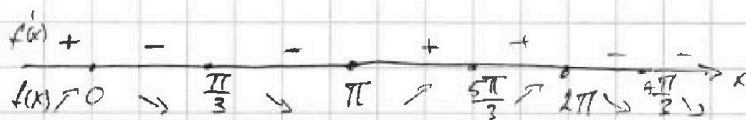
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p = 0 \quad p = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

Пусть  $f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$

$$f'(x) = 12 \cos^2 \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \sin x = -3 \sin x (2 \cos x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Получается,  $f(x)$ , хотя и не строго, но монотонно, убывает на

$[2\pi k; 2\pi k + \pi]$  и возрастает на  $[2\pi k + \pi; 2\pi(k+1)]$ , а  $2\pi k$  и

$\pi + 2\pi k$  — это точки максимума и минимума,  $k \in \mathbb{Z}$ , и так

как  $p = f(x)$ , то чтобы было хотя бы одно решение,  $f(\pi) \leq p \leq f(0)$

$$-4 - 6 - 3 + 3 \leq p \leq 4 + 3 - 6 + 3 \quad -10 \leq p \leq 4. \quad \text{Значит, всегда}$$

для все заданных значений  $p$ , при которых уже имеет хотя бы одно ре-

шение, и это:  $p \in [-10; 4]$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Знаем, что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то в нём есть и симметрия по центру. Это верно, потому что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то треугольник можно разрезать на 4 прямоугольника попарно симметричными средними линиями, и тогда точка из одной крайней половины будет соответствовать точке из соседней, и наоборот, а это означает, что точка на краях с центром и первой взятой точкой. Как-то так случаев соответствия к каждой стороне выбрать 2 точки в центре ~~каждой~~ прямоугольника, и это даёт  $C_{7500}^2 = \frac{7500 \cdot 7499}{2} = 3750 \cdot 7499$ .

Остальные как-то случаев для каждой средней линии это:

$$C_{15000}^4 - C_{7500}^2, \text{ а значит всего случаев даёт: } 2C_{15000}^4 - C_{7500}^2.$$

Для выбора случаев несчётных можно тоже разрезать прямоугольник на 4 части, т.к. точки из одной половины проектируются в другую, все симметрично по центру — это концы для каждой точки кончается ~~тогда~~ в точке с такой же расстоянием до центра, но той же



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рядом, где лежат другие точки с центр, но не другие  
луче. Для центральной симметрии случаев всего будет

$$C_{15000}^4 \cdot C_{15000}^2 \text{ всего случаев будет: } (2C_{15000}^4 - C_{7500}^2) + C_{15000}^4 - C_{7500}^2 =$$

$$= 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - \frac{7500 \cdot 7499}{4}$$

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - 7500 \cdot 7499 \text{ случаев}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $p$  - простое число, тогда имеем следующие задачи:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} u > b \\ u \neq b \\ \text{или} \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a > b \\ u \neq b \Rightarrow c + p^2 \neq c = 1 \Rightarrow p^2 \neq 1 \\ \begin{cases} a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases}$$

$p = 3$   
 $p = 3$ , т.к.  
простое

$$\begin{cases} a > b \\ a = y + c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - 9 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ y + c + c^2 + 1 = 820 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820 \\ c^2 - 17c - 740 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c^2 + 3c - 160 = 0 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c^2 - 17c - 740 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D = 9 + 640 = 57^2$$

$$D = 119 + 2960 = 57^2$$

$$\begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $(-21; -29; -30)$ ,  $(36; 28; 27)$ ,  $(-21; -29; -20)$ ,  $(36; 28; 37)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	4	-6	3	3
1	4	-2	1	4
2	4	2	2	4
3	4	-12	13	-10
4	4	-18		
5	4	-3	$\frac{3}{4}$	-
6	4	-3		$\frac{1}{2}$
7	4	-4	1	$\frac{1}{2}$
8	4	-8	2	$-\frac{1}{2}$
9	4	-5	$\frac{2}{3}$	-
10	4	-7	$\frac{2}{3}$	-

$$k_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + \dots + k_0 = 0 \quad (1, 1)^n$$

$$a^n k_n + \dots + k_0 \cdot b^n = 0$$

$L_n 1.5$

$$u \neq b$$

$$\begin{array}{r} 3299 \mid 9 \\ -22 \\ \hline 34 \quad 1 \\ -22 \\ \hline 56 \quad 1 \\ -45 \\ \hline 11 \quad 1 \\ -9 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$3299 = 369 \cdot 9$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$\exists p > a > 0$

$$\begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = p^2 + c \\ a = c + 1 \end{cases}$$

$\exists a > b > 0$ :

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = p^2 + c \\ b = p^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 31 \\ \times 4 \\ \hline 524 \\ + 16 \\ \hline 1240 \end{array}$$

$$\frac{y}{4} - 35$$

$$\frac{y-110}{1}$$

$$p^2 \neq 1$$

$$p: 3$$

$$p = 3$$

$$a = c + 1$$

$$a = c + 9$$

$$b = c + 1$$

$$a + b = 820$$

$$c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$a - c > b - c$$

$$c > b$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 3299 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27$$

$$(-24; -29; -30), (36; 28; 27)$$

$$\sqrt{225 - 2^2} \in [0; 10] \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 5 - x \geq 0 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$\exists 0 > a > b$ :

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$$

$$p^2 \neq 1$$

$$p = 3$$

$$a = c - 1$$

$$b = c - 9$$

$$\begin{array}{r} 540 \mid 36 \\ 36 \mid 35 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$a(1-b) + b(1-a)$$

$$x + 2$$

$$(5-x)(x+1) = 5x + 35 - x^2 - x \Rightarrow y = 35: 3y - 55 = \sqrt{225 - 2^2}$$

$$5 - x - 3$$

$$-x^2 + x + 35: 25 - 55 = 30$$

$$y - 2x - x^2 = 2$$

$$\sqrt{a - b} + 6 = 2 \sqrt{ab}$$



$$(y-20) \times 2(9-35) = 15$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$$

$$\frac{360 \mid 4}{36 \mid 20}$$

$$30 < y < 20: y - 20 - 2y + 40 = 9 + 50 = 15$$

$$y > 35: 3y - 95 = 15$$

$$3y = 110$$

$$y = \frac{110}{3} \approx 36$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{5-x} + 6 \Rightarrow 16 = 35 - 2x - x^2 + 12\sqrt{(5-x)(x+1)}$$

$$y < 20: 20 - y - 2y + 40 = 90 - 3y = 15$$

$$u + 6 = b(2u + 1) \quad | \cdot 2$$

$$2u + 12 = 2b(2u + 1) \Rightarrow 11$$

$$4ab - 2a - 2b = 5 = 25$$

$$30 - 9 = 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \quad \frac{b_{12}}{b_1} = q^9 = \sqrt{(x-3)^9} \quad q = \sqrt{x-3}$$

$$b_{10} > b_1 \cdot q^9 = x+9 \quad x+9 = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3} \cdot (15x+6)(x-3)} = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \quad b_9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \quad q = (x-3) \quad q = \sqrt[4]{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$b_{10} = x+9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}(x-3)} \quad x+9 = \sqrt{15x+6} \quad x^2 - 2x - 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{2 \pm 3}{2} = 2.5$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

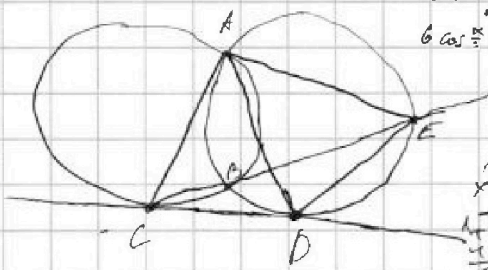
$$2 \cos 2x \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 2 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$6 \cos^2 x - 2 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$6 \cos^2 x - 2 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^2 x - 2 \cos x + 3 = p$$



$$4 \cos^2 x - 2 \cos x + 3 = p$$

$$4 \cos^2 x + 3 \cos x = 8 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3 - p = 0$$

$$\cos x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(4-p)(3-p)}}{8}$$

$$\frac{3}{4} \left( \frac{4}{4} - \frac{4}{4} + 3 \right) + 3 - p = 0 \quad \frac{3}{4} \cdot 3 + 3 - p = 0 \quad p = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

$$f(x) = 4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3 - p$$

$$f'(x) = -8 \cos x \sin x + 6 \sin x = -2 \sin x (4 \cos x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ or } 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \arccos \frac{3}{4}$$

$$f\left(\arccos \frac{3}{4}\right) = 4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{4} + 3 - p = 9 - 9 + 3 - p = 3 - p$$

$$f(0) = 4 - 6 + 3 - p = 1 - p$$

$$f(\pi) = 4 - 6 + 3 - p = 1 - p$$

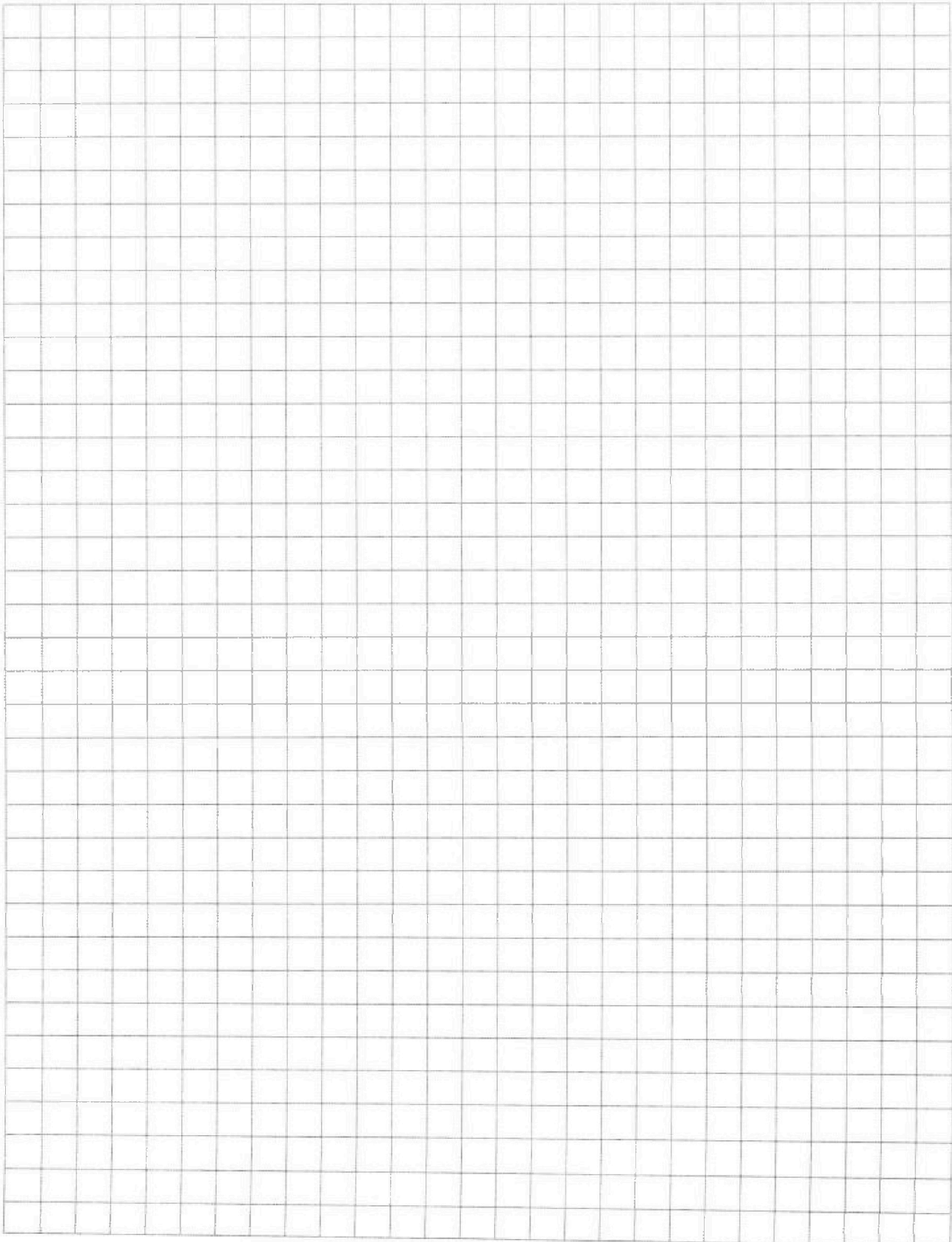


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа,  $p$  — простое число:  $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к.  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  — простое:  $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$  Из условия  $(a-b) \div 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \not\equiv b \Rightarrow p^2 + c \not\equiv 1 + c \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3$ , и т.к.  $p$  — простое

число, то  $p = 3$ , а значит  $\begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$   $a + b^2 = 820$  а значит

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \quad c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 3240 = 3249 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27$$

$a = 36, b = 28, c = 27$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases} \text{ — не подходит, т.к. } a > b \geq 0$$

2) Пусть  $0 > a > b$ : Пусть  $p$  — простое число, тогда  $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к.  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  — простое:  $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$   $a \not\equiv b \Rightarrow c - 1 \not\equiv c - p^2 \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3$ , т.к. простое

$$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases} \quad a + b^2 = 820 \quad c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \quad D = 289 + 2960 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{17 \pm 57}{2} =$$

$$= -20; 37$$

$$\begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -20 \end{cases}$$

$a = -21, b = -29, c = -20$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \text{ — не подходит, т.к. } 0 > a > b$$