МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z},\\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2}.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$\cos 3x+6\cos x=3\cos 2x+p$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9:25$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

№1

Пусть b_1 – первый член этой прогрессии, а q – её знаменатель. $b_1, q \in \mathbb{R}$. Тогда:

$b_4 = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, $b_{10} = x+4$, $b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$

~~$15x+6 \geq 0$ $x \geq -\frac{2}{5}$ $x-3 > 0$ $x > 3$. Значит либо $x > 3$ либо~~

$(15x+6)(x-3) \geq 0$ $\quad$ $+ \quad -\frac{2}{5} \quad - \quad 3 \quad + \quad x$

$x > 3$: $\quad \frac{b_{12}}{b_4} = q^8 = \sqrt{(x-3)^4}$ $\quad q = \sqrt[4]{x-3}$

$b_{10} = b_4 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6}$ $\quad x+4 = \sqrt{15x+6}$

$\begin{cases} x^2+8x+16 = 15x+6 \\ x \geq -4 \end{cases}$ $\quad x^2 - 7x + 10 = 0$ $\quad D = 49 - 40 = 3^2$ $\quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 2; 5$,

но $x = 2$ не подх., т.к. $x > 3$. Значит, $x = 5$.

$x \leq -\frac{2}{5}$: $\quad \frac{b_{12}}{b_4} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^3}{15x+6}} = \sqrt{(x-3)^4}$ $\quad q = \sqrt[4]{3-x}$

$b_{10} = b_4 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)}$ $\quad x+4 = \sqrt{-(15x+6)}$

$\begin{cases} x^2+8x+16 = -15x-6 \\ x \geq -4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2+23x+22 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -1; -22 \\ x \geq -4 \end{cases}$ $\quad x = -1$

Ответ: $x = -1; 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$-1+4\sqrt{2} > -1$. $-1+4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$, т.к. $4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$.

Получается, $x=-1+4\sqrt{2}$ не подходит.

$-1-\frac{3}{2}\sqrt{5} > -1-\frac{7}{2} > -5 > -7$. $-1-\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{-3\sqrt{5}-2}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$.

Получается, $x=-1-\frac{3}{2}\sqrt{5}$ подходит.

$-1+\frac{3}{2}\sqrt{5} > -1$ $\quad \frac{3}{2}\sqrt{5}-1 = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ $\quad 3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$

$45 \vee 27+6\sqrt{3}+1$ $\quad 18 \vee 6\sqrt{3}$ $\quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}-2}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$, и

значит $x=-1+\frac{3}{2}\sqrt{5}$ не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернёмся в систему и получим:

$$\begin{cases} x=-1-4\sqrt{2};\ -1-\frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y=35 \\ z=0 \end{cases}$$

Ответ: $x=-1-4\sqrt{2};\ -1-\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $y=35$, $z=0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (I)\\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2} & (II)\end{cases}$$

Рассмотрим II: Правая часть имеет выпуклый график корня по z, принимает значения ~~от~~ $[0;15]$ на $[-15;15]$. На $[-15;0]$ возрастает, в -15 минимум, мин. знач. равно 0, в 0 максимум, макс. знач. равно 15. На $[0;15]$ убывает, в 15 минимум, мин. знач. равно 0. Левая часть ур-я имеет график по y, напоминающий W:

В точках 20 и 35 локальные минимумы, один ~~из~~ из них глобальный, при нём функция принимает наим. знач. $y=20$: $2|20-35|=30$, $y=35$: $|35-20|=15$. $\Rightarrow$ при $y=35$ мин. знач., и это 15. Заметим, что ~~[illegible]~~ левая часть ур-я имеет наименьшее значение, достигаемое в одной точке, равное наибольшему значению правой части, достигаемому в одной точке, а значит у уравнения есть только единственное решение: $y=35$, $z=0$. Вернёмся в систему.

$$\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}+6=2\sqrt{35-2x-x^2}\\ y=35,\ z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}+6=2\sqrt{(5-x)(x+7)}\\ y=35,\ z=0\end{cases}$$

~~Пусть $a=\sqrt{x+7}$, $b=\sqrt{5-x}$. $a,b\in\mathbb{R}$ $a\ge0$, $b\ge0$. Решим 1 уравнение~~

Выйдем из системы, чтобы решить 1-е ур-е.

$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$ $\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{(5-x)(x+7)} - 3)$ $x \in [-7; 5]$ всегда в этой задаче

$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{5-x}$ $x+7 \geq 5-x$ $2x \geq -2$ $x \geq -1$ $\Rightarrow \sqrt{x+7} < \sqrt{5-x}$ для $x < -1$

$\sqrt{(5-x)(x+7)} \geq 3$ $-x^2 - 2x + 35 \geq 9$ $x^2 + 2x - 26 \leq 0$ $\frac{D}{4} = 1 + 26 = 27$

$+$ $-\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ $-$ $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ $+$ x $x \in [-\frac{3\sqrt{3}-1}{2}; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}]$. $x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}}{2}$

Получается, что либо $x \in [-7; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}]$, либо $x \in [-1; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}]$

При $x \in [-7; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}] \cup [-1; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}]$: $12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(5-x)(x+7) + 36 - 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{(x+7)(5-x)}$. Пусть $t = \sqrt{(x+7)(5-x)}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$4t^2 - 22t + 24 = 0$ $D_{/4} = 121 - 96 = 5^2$ $t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = \frac{3}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ 4x^2 + 8x - 131 = 0 \end{array}\right.$ $\frac{D}{4} = 1 + 31 = 32 = (4\sqrt{2})^2$; $\frac{D}{4} = 16 + 131 \cdot 4 = 540 = (6\sqrt{5})^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm 4\sqrt{2}}{1} = -1 \pm 4\sqrt{2} \\ x = \frac{-4 \pm 6\sqrt{5}}{4} = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{array}\right.$

Получившиеся корни должны подходить в $[-7; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}] \cup [-1; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}]$.

$-1 - 4\sqrt{2} \overset{>}{\vee} -7$ $-4\sqrt{2} \overset{>}{\vee} -6$ $-\sqrt{32} > -\sqrt{36}$ $-1 - 4\sqrt{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$, т.к.

$-1 - 4\sqrt{2} < -6 < \frac{-6-1}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$. Получается, $x = -1 - 4\sqrt{2}$ подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$

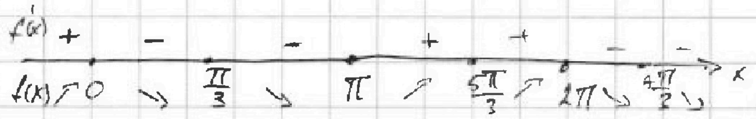
$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$

$4\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos^2 x + 3 - p = 0 \qquad p = 4\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos^2 x + 3$

Пусть $f(x) = 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3$

$f'(x) = 12\cos^2 \cdot (-\sin x) - 12\cos x \cdot (-\sin x) - 3\sin x = -3\sin x(2\cos x - 1)^2$

$f'(x) = 0 \qquad \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \sin x = 0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$



Получается, $f(x)$, хоть и не строго, но монотонно, убывает на $[2\pi n; 2\pi n + \pi]$ и возрастает на $[2\pi n + \pi; 2\pi(n+1)]$, а $2\pi m$ и $\pi + 2\pi m$ – это точки максимума и минимума, $m \in \mathbb{Z}$. И так как $p = f(x)$, то чтобы было хотя бы одно решение, $f(\pi) \le p \le f(0)$

$-4 - 6 - 3 + 3 \le p \le 4 + 3 - 6 + 3 \qquad -10 \le p \le 4$. Значит, найдены все значения параметра p, при которых ур-е имеет хотя бы одно решение, и это: $p \in [-10; 4]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

Заметим, что если в прямоугольнике симметрия по обеим „средним линиям", то в нём есть и симметрия по центру. Это верно, потому что если в прямоугольнике симметрия по обеим „средним линиям", то прямоугольник можно разделить на 4 прямоугольника помянутыми этими средними линиями, и тогда точке из одного прямоугольника будет соответствовать по точке из соседних, а в свою очередь то же, и это получится точка на прямой с центром и первой взятой точкой. Кол-во таких случаев сводится к кол-ву способов выбрать 2 точки в четверти прямоугольника, и это будет $C_{7500}^{2} = \frac{7500\cdot 7499}{2} = 3750\cdot 7499$.

Остальное кол-во случаев для каждой средней линии это: $C_{15000}^{4} - C_{7500}^{2}$. А значит всего случаев будет: $2C_{15000}^{4} - C_{7500}^{2}$.

Для подбора случаев непосчитанных можно тоже разделить прямоугольник пополам для удобства, т.к. точки из одной половины спроектируются в другую, ведь симметрия относительно центра — это когда для каждой точки найдётся точка с таким же расстоянием до центра, на той же

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

прямой, где лежат данная точка и центр, но не другом луче. Для центральной симметрии случаев всего будет: C_{15000}^{4}. Всего случаев будет: $(2C_{15000}^{4} - C_{7500}^{2}) + C_{15000}^{4} - C_{7500}^{2} =$

$= 3C_{15000}^{4} - 2C_{7500}^{2} = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - \frac{7500 \cdot 7999}{1}$

Ответ: $3C_{15000}^{4} - 2C_{7500}^{2} = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - 7500 \cdot 7499$ способов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть p - простое число, подходящее под условие задачи:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \not\vdots\, 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}
\quad
\begin{cases} a > b \\ a \not\equiv_3 b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ a + b^2 = 820 \end{cases}
\quad
\begin{cases} a > b \\ a \not\equiv_3 b \Rightarrow c + p^2 \not\equiv_3 c \pm 1 \Rightarrow p^2 \not\equiv_3 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases} \\ \begin{cases} a = c-1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$p \vdots 3$

$\Downarrow$

$p = 3$, т.к. простое

$$\begin{cases} a > b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases} \\ \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases} \end{array}\right. \\ a + b^2 = 820 \end{cases}
\quad
\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ 9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \end{cases} \\ \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \\ c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820 \end{cases} \end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ c^2 + 3c - 810 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \\ c^2 - 17c - 740 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$D = 9 + 3240 = 57^2$

$D = 289 + 2960 = 57^2$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27 \end{cases} \\ \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-21; -29; -30)$, $(36; 28; 27)$, $(-21; -29; -20)$, $(36; 28; 37)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

	4	−6	2	3
1	4	−2	1	4
2	4	2	2	A
−1	4	−10	13	−10
−3	4	−18		
$\frac{3}{4}$	4	−3	$\frac{3}{4}$	—
$-\frac{3}{2}$	4	−9		
$\frac{1}{2}$	4	−4	1	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	4	−8	7	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	4	−5	$\frac{9}{4}$	—
$-\frac{1}{4}$	4	−7	$\frac{15}{4}$	—

$k_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + \dots + k_0 = 0 \;|\cdot b^n$

$a^n k_n + \dots + k_0 \cdot b^n = 0$

$k_n \vdots b$, $a \neq b$

3249 | 9 ; 361 | 19

$3249 = 57^2$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$\exists\, a>b>0: \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = p^2+c \\ b = c+1 \end{cases}$

$p^2 \neq 1$, $p \vdots 3$, $p = 3$

$a = c+9$, $b = c+1$, $a-b = 1$

$a+b = 810$, $c+9+c^2+2c+1 = 810$

$a-c > b-c$, $a > b$

$c^2 + 3c - 810 = 0$, $D = 9 + 810\cdot 4 = 3249 = 57^2$, $c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30;\,27$

$(-21; -29; -30)$, $(36; 28; 27)$

$\sqrt{225-z^2} \in [0; 15]$

$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

$\exists\, 0>a>b: \begin{cases} (a-c) = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$ $p^2 \neq 1$, $p = 3$, $a = c-1$, $b = c-9$

$a(1-b)+6 = b(1-a)$

$(5-x)(x+2) = 5x+35-x^2-2x$

$y>35: \; 3y-55 = \sqrt{225-z^2}$

$y=35: \; 105-55 = 50 > \dots$

$(y-20)+2(y-35) = 15$

$y>35: \; 3y-90 = 15$, $3y = 105$, $y = 35$

$35>y>20: \; y-20-2y+70 = -y+50 = 15$, $y = 35$

$y<20: \; 20-y-2y+70 = 90-3y = 15$

$30-y = 5$, $y = 25$

$\begin{cases} y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+6 = 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-\dots} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2+\dots}$

$a+6 = b(2a+1) \;|\cdot 2$

$2a+12 = 2b(2a+1)$, $(2b-1)(2a+1) = 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$b_4 = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ $\frac{b_{12}}{b_4} = q^8 = \sqrt{(x-3)^4}$ $q = \sqrt{|x-3|}$

$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = x+4$ $x+4 = q^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (15x+6)(x-3)} = q^2 \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$

$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$ $b_8 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$ $q^4 = (x-3)$ $q = \sqrt[4]{(x-3)}$

$15x+6>0$

$x > -\frac{6}{15}$

$x > -\frac{2}{5}$

$b_{10} = x+4 = \sqrt{15x+6}$ $x^2+8x+16 = 15x+6$ $x^2-7x+10=0$

$-1+4\sqrt{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$ $D = 49-40 = 3^2$

$x = \frac{7 \pm 3}{2} = 5;\ 2$

$\frac{1}{2} + \cos 4x$ $\frac{2\sqrt{5}-2}{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$

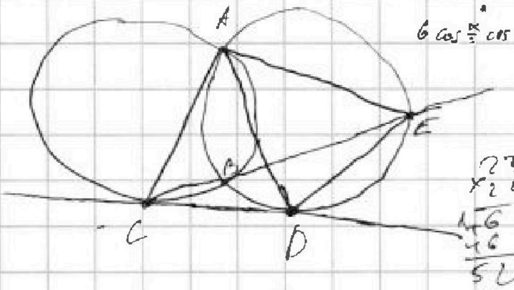
$2\cos 2x \cos x + 5\cos x = 3\cos 2x + p$ $3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$

$2\cos x(\cos 2x + 1) = 3\cos 2x - 3\cos x + p$ $45 \vee 27 + 12\sqrt{3} + 1$

$17 \vee 2\sqrt{3}$

$3\cos 2x + 3\cos x$

$6\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$



$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$

$= \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x(1 - 2\sin^2 x) = \cos x(4\cos^2 x - 3) =$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$ $p = \frac{1}{2} \cdot \cos 4x$ $D = 23^2 - 8\ldots$ $\frac{-23 \pm 21}{2} = -22;\ -1$

$4\cos^3 x + 3\cos x = 3\cos 2x + p$ $4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$

$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$

$\boxed{\cos x(4\cos^2 x - 6\cos x + 3) + 3 - p = 0}$ $\cos x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 3\right) + 3 - p = 0$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + 3 - p = 0$ $p = \frac{9}{16} + 3 = \frac{25}{16}$

$f(x) = 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x$ $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$ $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t-1)^2$

$f'(x) = 12\cos^2 x(-\sin x) - 12\cos x(-\sin x) - 3\sin x = -3\sin x(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) =$ $t = \frac{1}{2}$

$= -3\sin x(2\cos x - 1)^2$ $f'(x) = 0$

$- \quad 0 \quad - \quad + \quad + \quad +$

$0 \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} \quad 2\pi$

$f(\pi) = -1(4+6+3) + 3 - p = 0$ $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}(1 - 3 + 3) + \ldots$

$-10 - p = 0$ $p = -10$ $f(0) = 1(4-6+3) + 3 - p = 4 - p$ $p = 4$ $3 - p = 0$

$p = \frac{1}{2} + 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

1) ~~Подсказка~~ Пусть p - простое число: $(a-c)(b-c)=p^2$

Т.к. $a>b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, p-простое: $\begin{cases}a-c=p^2\\ b-c=1^2\end{cases}$ $\begin{cases}a=p^2+c\\ b=1+c\end{cases}$ Из условия $(a-b)\not\vdots\, 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\overset{3}{\not\equiv} b \Rightarrow p^2+c\overset{3}{\not\equiv}1+c$ $\quad p^2\overset{3}{\not\equiv}1 \Rightarrow p\,\vdots\,3$, а т.к. p - простое

число, то $p=3$, а значит $\begin{cases}a=9+c\\ b=1+c\end{cases}$ $\quad a+b^2=820$ из усл.

$9+c+c^2+2c+1=820 \quad c^2+3c-810=0 \quad D=9+3240=3249=$

$=57^2 \quad c=\dfrac{-3\pm57}{2}=-30;\ 27.$ $\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=36\\ b=28\\ c=27\end{cases}\\ \begin{cases}a=-21\\ b=-29\\ c=-30\end{cases}\end{array}\right.$ - не подходят, т.к. $a>b\geq 0$

$a=36,\ b=28;\ c=27.$

2) Пусть $0>a>b$: Пусть p - простое число, такое что:

$(a-c)(b-c)=p^2$. Т.к. $a>b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, p-прост: $\begin{cases}a-c=-1\\ b-c=-p^2\end{cases}$

$\begin{cases}a=c-1\\ b=c-p^2\end{cases}$ $\quad a\overset{3}{\not\equiv}b \Rightarrow c-1\overset{3}{\not\equiv}c-p^2 \Rightarrow p^2\overset{3}{\not\equiv}1 \Rightarrow p\,\vdots\,3 \Rightarrow p=3$, т.к. простое

$\begin{cases}a=c-1\\ b=c-9\end{cases}$ $\quad a+b^2=820 \quad c-1+c^2-18c+81=820$

$c^2-17c-740=0 \quad D=289+2960=3249=57^2 \quad c=\dfrac{17\pm57}{2}=$

$=-20;\ 37.$ $\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-21\\ b=-29\\ c=-20\end{cases}\\ \begin{cases}a=36\\ b=28\\ c=37\end{cases}\end{array}\right.$ - не подходят, т.к. $0>a>b$ $\qquad a=-21,\ b=-29,\ c=-20$