



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

а/а/а

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - первый член геом. прогрессии. q - её шаг (знаменатель)

тогда по усл. $bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$bq^{12} = 5-x$

$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

(bq^n - $(n+1)$ -элемент прогрессии)

ОДЗ: $bq^6 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(13x-35) \geq 0, x \neq -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{35}{13}, +\infty)$

1) если b или $q \geq 0 \Rightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$

~~$bq^6 \geq 0$~~

$\Rightarrow \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 0 \Rightarrow$ при $x=5$ ~~$x \neq 5$~~

2) $b, q \neq 0 \Rightarrow 13x-35, x+1, 5-x \neq 0$, т.к. $bq^n \neq 0$

$\frac{bq^{14}}{bq^6} = q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(x+1)^4}{(x+1)^2}} = (x+1)$

~~$\frac{bq^{12}}{bq^6} = q^6 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(x+1)^4}{(x+1)^2}} = (x+1)$~~

$\begin{cases} q^4 = x+1 & (1) \\ q^4 = -x-1 & (2) \end{cases}$

$\frac{bq^{14}}{bq^{12}} = q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} \Rightarrow q^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$

(1): т.к. $x \neq -1 \Rightarrow \frac{13x-35}{(5-x)^2} = \frac{q^4}{x+1} = 1$

~~$13x-35 = 5-x$~~
 ~~$12x = 30$~~
 ~~$x = 2.5$~~

~~$\frac{13x-35}{5-x} = \frac{q^4}{x+1} \Rightarrow 13x-35 = \frac{q^4}{x+1}(5-x)$~~

Проверка: $25 - 10x + x^2 = 13x - 35 \Rightarrow x^2 - 23x + 60 = (x-20)(x-3)$

(2): $\frac{13x-35}{(5-x)^2} = \frac{q^4}{x+1} = -1$

$\begin{cases} x=20 \\ x=3 \end{cases}$

$x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2) = 0$

Проверка:

~~$x=20$~~ ~~$x=3$~~ ~~$x=2$~~ ~~$x=-5$~~

2) $x=2 \notin \text{ОДЗ}$ т.к. $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{35}{13}, +\infty)$ т.к. $bq^{12} = 5-x > 0, \text{ т.к. } b > 0$

3) $x=3$ $bq^6 = \frac{1}{4}, bq^{12} = 2, bq^{14} = 4 \Rightarrow$ это возможно при $b = \frac{1}{32}, q = \sqrt{2}$

4) $x=-5$ $bq^6 = \frac{10}{8}, bq^{12} = 10, bq^{14} = 20 \Rightarrow$ возможно при $b = \frac{5}{32}, q = \sqrt{2}$

Ответ: 3, -5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2} & (2) \end{cases}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = |y+1| + |12-y| + |y-12| + |12-y| \geq \sqrt{169}$$

каждый член суммы неотрицателен, сумма неотрицательна

(2):

1) $y \geq 12 \Rightarrow y+1+3y-36 = 4y-35 \geq \sqrt{169-2^2} = 13$
 $4y-35 \geq 13 \Rightarrow 4y \geq 48 \Rightarrow y \geq 12$ (т.к. $\sqrt{169-2^2} \leq 13$)

2) $12 \geq y \geq 1 \Rightarrow 36-3y+y+1 = 37-2y \geq 13$
 $37-2y \geq 13 \Rightarrow -2y \geq -24 \Rightarrow y \leq 12$

3) $y \leq -1 \Rightarrow 1-y+36-3y = 37-4y \geq 13$
 $37-4y \geq 13 \Rightarrow -4y \geq -24 \Rightarrow y \leq 6$ противоречие

$z=0, y=12$

(1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

кор: $-3 \leq x \leq 4$
 $\sqrt{x+3} = a$
 $\sqrt{4-x} = b$

$$\begin{cases} a-b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 7 = x+3+4-x \end{cases}$$

возведем: $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 = 5+7 = 12$
 $(a-b)^2 = -2ab + 12$
 $(a-b)^2 + (a-b) - 2 = (a-b+2)(a-b-1) = 0$

а) $a-b=+1 \Rightarrow 5+1=2ab \Rightarrow ab=3$
 $a=b+1$

(b) $b-3 = b-b-3 = 0$
 $a-b = -2$

$$\begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, & b = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ a = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, & b = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4): a - b = -2$$

$$a - b + \sqrt{5} = 3 = 2ab$$

$$a = b - 2 \quad 2(b-2)b - 3 = 2ab - 3 = 0 \quad \text{так как } D = 4^2 + 3 \cdot 8 = 40$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0 \quad \text{т.д. } 7 \pm 2\sqrt{13}$$

$$b = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \\ a = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Исходная задача! равносильна? $x = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) - 3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1 + \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

$$\sqrt{x+3} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow x = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{1 + 2\sqrt{13} + 13}{4} - 3 = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4} - 3 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{7 + \sqrt{13} - 6}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \rightarrow \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{x+3} \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{10} - 2}{2}\right)^2 - 3 = \frac{10 - 4\sqrt{10} + 4}{4} - 3 = \frac{14 - 4\sqrt{10}}{4} - 3 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} - 3 = \frac{7 - 2\sqrt{10} - 6}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \rightarrow \emptyset, \text{ т.к. } \sqrt{x+3} \geq 0$$

Ответ: $\left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{2}, 13\right), \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 14\right)$

$$\begin{aligned} 7 &> 2\sqrt{10} \\ 49 &> 40 \end{aligned}$$

если существует x , удовлетворяющей системе \Rightarrow

$$\exists a, b: \begin{cases} a - b + \sqrt{5} = 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - \sqrt{5}$$

$$(b^2 = 7 - a^2 \Rightarrow \text{если существует } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x =$$

$$= p \Leftrightarrow 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad | \cdot 2$$

$$8\cos^3 x + 12\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 2p$$

$$(2\cos x + 1)^3 - 7 = 8\cos^3 x + (2\cos x)^2 \cdot 1 \cdot 3 + \cancel{1} (2\cos x)^1 \cdot 3 + 1 - 7 = 2p$$

$$2\cos x + 1 = \sqrt[3]{2p+7}$$

$$-1 \leq \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \leq 1 \quad \leftarrow \text{D.D.3}$$

$$-1 \leq \sqrt[3]{2p+7} \leq 3$$

$$-8 \leq 2p \leq 20$$

$$\underline{-4 \leq p \leq 10}$$

~~Ответ~~

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi n \\ x = -\arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ: $\pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right), \quad p \in [4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

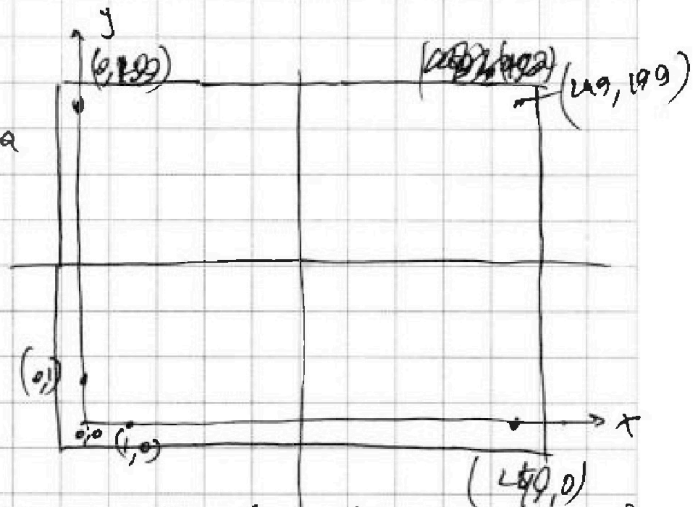
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем координаты как на рис:

0 - центр левого нижнего квадрата
сторона квадрата = 1

Назовем пару верш (x, y) и $(x, 249-y)$ В (вертикальной)



Т.к. $249 - y \neq y$ т.к. 249 нечетно \Rightarrow все ~~двое~~ клетки обходятся (не пересекаются), на пары

Аналогично назовем пару (x, y) и $(199-x, y)$ Г (горизонтальной) и пару (x, y) и $(199-x, 249-y)$ ЦС (центально симметричной)

Всего Г-пар, В-пар, ЦС-пар по $\frac{200 \cdot 250}{2} = 25000$

Если мы-во центрально симметрично \Rightarrow в любой Ц-паре 0 или 2 закраш. клетки \Rightarrow всего ~~двое~~ раскрасок C_{25000}^4 (всего 4 пары) $8 = 2 \cdot 4$ и пар

В них красятся обе клетки, остальные должны быть не закрашенными. Аналогично если мы-во симметрично отн. вертикальной/горизонтальной ср. линии, то надо наоборот 4 В/Г пары и закрасить там обе клетки \Rightarrow по C_{25000}^4 способов.

Но мы посчитали лишней раз варианты, когда мы-во симметрично отн. двух ср. линий или ср. линии и центра. В таком случае сум также разделим), Возвв закрасимую клетку, нетрудно убедиться в том, что весь прямоугольник

из 4-х: (x, y) , $(199-x, 249-y)$, $(199-x, y)$, $(x, 249-y)$ закрасит. (т.к. клетка участвует сразу в двух типах пар (В и Г, ЦС и Г или ЦС и В) закрасит 2 клетки из перемешанных в прямоугольнике \Rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(пример, когда метка стоит в B-паре и yc-паре)

⇒ закрашена и 4-ая

и метка в южной на 2 прямоугольника.

Всего код клеток $(x, y), (199-x, 249-y), (x, 249-y), (199-x, 249-x) - \frac{200 \cdot 250}{4} = 12500$

(и они не пересекаются (что, в целом, видно

из зарисовки) и каждая для Г или В или У с паре пересекаются (внутри их типа)

Всего таких раскрасок

$$C_{12500}^2$$

↑ выделяем 2 прямоугол.

красим все ~~клетки~~ метки в них (остальные прямоугол.

должна быть пометка пути) ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~

Каждая раскраска была посчитана 3 раза (при подсчете

В, Г, У с симметрией) → всего раскрасок $C_{12500}^2 \cdot 3 =$

$- 2 \cdot C_{12500}^2$ (или из формулы включения-исключения

или из $C_{25000}^4 - 3$ считаем все попарные пересечения

(которые на самом деле пересечение всех 3-х или 2-х раскрасок) и прибавляем пересечение всех 3-х или 2-х.)

Ответ: $C_{25000}^4 - 3 - C_{12500}^2 \cdot 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b, a \neq b$ $(a-c)(b-c) = p^2, a+b^2 = 560$

Заметим, что если $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \\ a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \\ a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases}$$

(т.к. по осн. Т. Арифметики разложения

числа на простые слагаемые, а так как p^2 лишь 2 простых

множ-ля \Rightarrow либо оба слагаемых в одной скобке, либо в разных)

если $a-c = \pm p = b-c \Rightarrow a=b \Rightarrow a=b$

(1) $a-c = p^2, b-c = 1$ (иначе $a-c = -p^2 < -1 = b-c \Rightarrow b > a$)

(2) $a-c = -1, b-c = -p^2$ (иначе $a-c = 1 < p^2 = b-c \Rightarrow b > a$)

$a+b^2 = 560 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Разобьем на пары делителей 560

- (1, 560) (2, 280) (4, 140) (8, 70) (16, 35)
- (5, 112) (10, 56) (20, 28) (40, 14)

но $(a-c)(b-c) = p^2$
 все делители $\neq 0$
 $(a-c)(b-c) = 20$ (по формуле)
 пар всего $\frac{20}{2} = 10$

(1) $a-c - (b-c) = a-b = p^2 - 1 \neq 0$ (иначе $a=b$)

(2) $a-c - (b-c) = a-b = -1 + p^2 = p^2 - 1 \neq 0$

если $a-b = 0 \Rightarrow a=b$

(1) $a+b^2 = (p^2+1) + (1+c)^2 = 560 \Rightarrow p^2 + c^2 + 2c + 1 = 560$

(2) $a+b^2 = (c-1) + (c-p^2)^2 = 560$

(1) $4p^2 + 4c^2 + 12c + 4 = 560 \Rightarrow 4p^2 + (2c+3)^2 = 560 \Rightarrow 4 + x = 2245$

$p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ или $p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, но $a^2 \equiv 1$ или $0 \pmod{3} \forall a \in \mathbb{Z}$

$p^2 \equiv 2 \pmod{3}$ - невозможно $\Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{3}$ (если $a \equiv 1, 2 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod{3}$)
 $\Rightarrow a+b^2 = 560, a-b = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = b+8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + b + 3 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0 = (b + 24)(b - 23) = 0 \rightarrow \begin{matrix} b = 23 & a = 8 + b = 31 \\ b = -24 & a = -16 \end{matrix}$$

действительно $a \neq b$, т.к. $a - b \equiv 8 \equiv 2 \pmod 3$ и $a + b^2 = 560$
 $a > b$, т.к. $a = b + 8$

Остаток от 3: $\begin{cases} b - c \equiv 1, & a - c \equiv 9 \pmod 3 \rightarrow c = 22 \text{ или } c = -25 \\ a - c \equiv -1, & b - c \equiv 9 \pmod 3 \rightarrow c = -15 \end{cases}$

проверка: $(31 - 22)(23 - 22) = 9 = 3^2$ или $c = 32$

$$(-16 - (-15))(-24 - (-15)) = 3^2 = 9$$

$$(-16 - 25)(-24 - (-25)) = 3^2 \quad \text{ответ: } (31, 23, 22) \quad (31, 23, 32)$$

$$(31 - 32)(23 - 32) = 9 = 3^2 \quad (-16, -24, 25) \quad (-16, -24, 15)$$

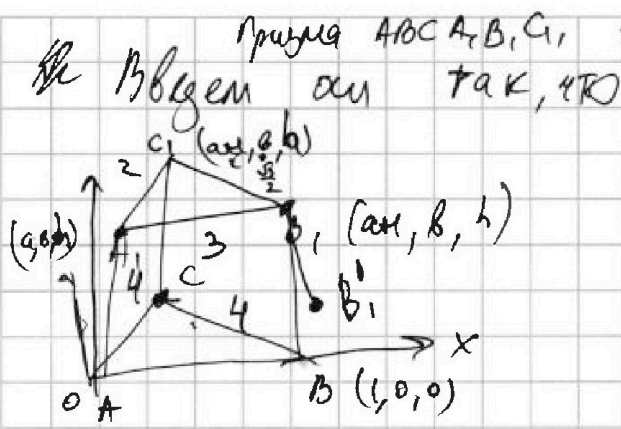


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

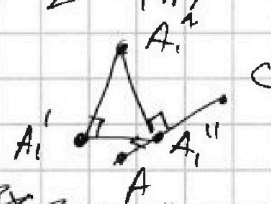
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пряма ABC в xy -плоскости, а боковые грани с ребром AA_1 имеют $S=4$
 $A: 0, 0, 0$
 $B: 1, 0, 0$
 $C: \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$
 $A_1: a, b, h$
 $B_1: a+1, b, h$
 $C_1: \frac{1}{2}+a, \frac{\sqrt{3}}{2}+b, h$
 h - высота боковой грани

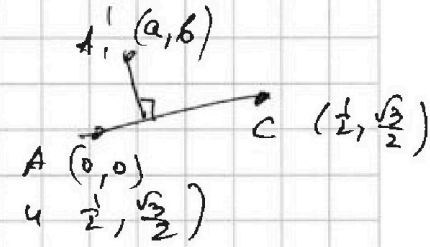


A_1' - проекция A_1 на AC , $A_1': (a, b)$
 A_1'' - проекция A_1 на xy -плоскость

Т. Пифагора $A_1'A_1''^2 + h^2 = (A_1'A_1'')^2 + AC^2$ (по т. о 3-х перпен.)

$S_{\triangle A_1'CA_1} = \frac{1}{2} AC \cdot A_1'A_1'' = 4 \Rightarrow A_1'A_1''^2 = 16$

в $\triangle ABC$: найдем $A_1'A_1''$.



прямая AC - это $y - \sqrt{3}x = 0$

$dist(A_1', AC) = \frac{|b - \sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}} = \frac{|b - \sqrt{3}a|}{2}$

получаем: $(b - \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 16 \cdot 4 = 64$ (1)

Найдем аналогичное уравнение для двух других граней:

$B_1': (a+1, b)$ AD (в. мн-ч ABC) задается $0 \cdot x + y = 0$
 $dist(B_1', AB)^2 + h^2 = \left(\frac{|b|}{1}\right)^2 + h^2 = b^2 + h^2 = 4^2 = 16$ (проходит через $(0,0)$ и $(1,0)$)

$C_1': (1/2+a, \sqrt{3}/2+b)$ $dist(C_1', BC)^2 + h^2 = \left(\frac{|b\sqrt{3} + b - \sqrt{3}|}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{(b\sqrt{3} + b - \sqrt{3})^2}{4} + h^2 = 4^2 = 16$ (проходит через $(0,0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$)

$\Rightarrow dist(B_1', BC) = \frac{|\sqrt{3}(a+1) + b - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|\sqrt{3}a + b|}{2}$

Аналогично $4dist(B_1', BC)^2 + 4h^2 = (\sqrt{3}a + b)^2 + 4h^2 = 4dist(B_1', BC)^2 = 4 \cdot \left(\frac{S_{\triangle ABC}}{BC}\right)^2 = 36$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 (1): & \quad (b - \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 64 \\
 (2): & \quad b^2 + h^2 = 16 \quad h^2 = 16 - b^2 \\
 (3): & \quad (b + \sqrt{3}a)^2 + 4h^2 = 36
 \end{aligned}$$

находим (1) и (3):

$$2(3a^2 + b^2 + 4h^2) = 100$$

$$3a^2 + b^2 + 4h^2 = 50 = 3a^2 + b^2 + 64 - 4b^2$$

$$36^2 = 3a^2 + 14b^2$$

$$(1) - (3): \quad 4ab\sqrt{3} = -28$$

$$ab\sqrt{3} = -7 \quad a = -\frac{7}{b\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$(4), (5): \quad 3a^2 + 14 = 3 \frac{49}{3b^2} + 14 = \frac{49}{b^2} + 14 = 3b^2$$

$$3b^4 - 14b^2 + 49 = (3b^2 + 7)(b^2 - 7) = 0$$

$\begin{cases} b^2 = 7 \\ b^2 = -\frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{49}{7} = 7 \\ h^2 = 16 - 7 = 9 \end{cases}$

$$b = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$h^2 = 16 - 7 = 9$$

$$h = 3$$



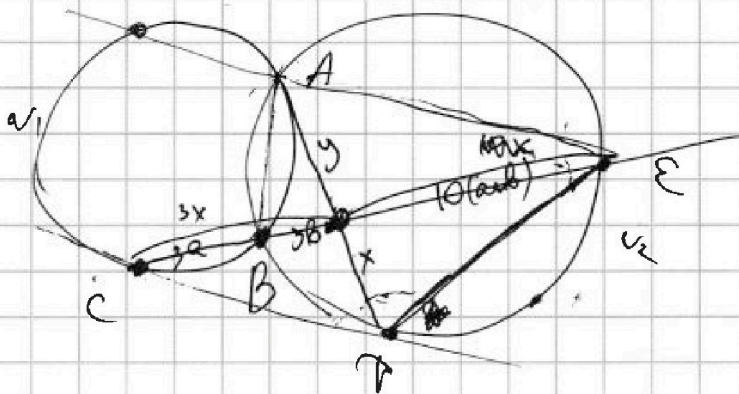
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

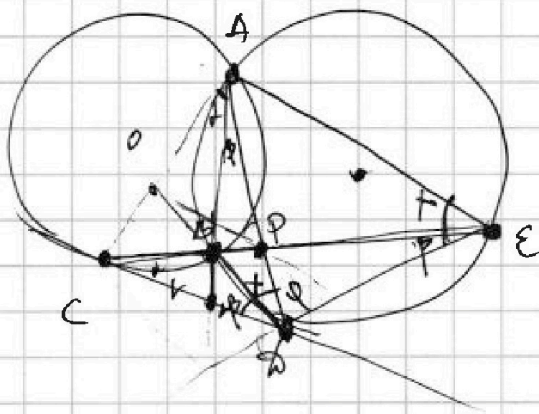


$\frac{CA}{CB}$
 $\frac{14}{9}$
 $\frac{14}{9}$
 $\frac{14}{9}$
 $\frac{14}{9}$
 $\frac{14}{9}$
 $\frac{14}{9}$

$$39a(a+b) = CD^2 = z$$

$$3a(10a+13b) = CD^2 = x(xy)$$

$$xy = 30b(a+b)$$



~~39a~~

$$\frac{CA}{PE} = \frac{3}{b}$$

a, b, h

~~max~~

$$\frac{CA}{PE} = \frac{3}{b}$$

$$y = 0$$

$$y_0$$

$$x = 0$$

$$x + y = 0$$

$$0 - x + y = 0$$

$$|b| + h$$

$$y - \sqrt{3}x = 0$$

$$\left(\frac{b - \sqrt{3}a}{2}\right)^2 + h^2 = 16$$

$$b^2 + h^2 = 16$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}a + b}{2}\right)^2 + h^2 = 9$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4h^2 - 6h + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}(x-1)$$

$$4a^2 = 36$$

$$a = 9$$

$$y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$$

$$\left| \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + a\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + b\right) - \sqrt{3} \right|$$

$$|\sqrt{3}a + b|$$

$$b^2 - 2ab\sqrt{3} + 3a^2 + 4h^2 = 64$$

$$3a^2 + 2ab\sqrt{3} + b^2 + 4h^2 = 36$$

$$b^2 + h^2 = 16$$

$$a = 3$$

$$b^2 - 6\sqrt{3}b + 4h^2 = 37$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

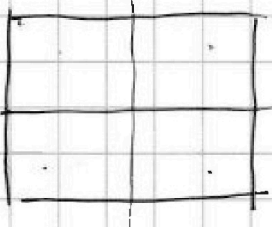
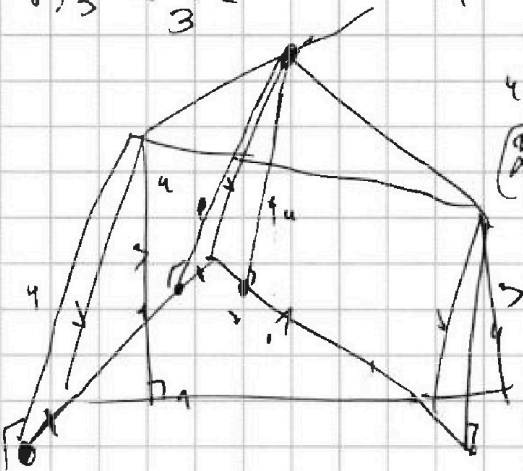
СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 560$$

$$a \times 3$$

$$b \div 3 \quad a \approx 2$$



$$(a-c) = p^2 \quad b-c=1$$

$$a + b^2 = 560 \quad \approx 2$$

$$a - b = p^2 - 1 \approx 0 \quad 1 \quad 2$$

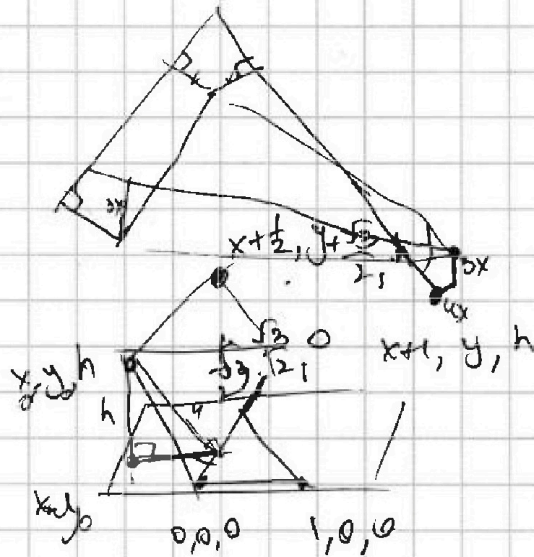
$$p^2 - 1 + b + b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 1 + p^2 = 560$$

$$4b^2 + 4b - 4 + 4p^2 = 560 - 4$$

$$(2b+1)^2 + 4p^2 = 560 - 4 + 1$$

$$\begin{array}{r} 24 \quad 23 \\ 124 \\ 144 - 4 \\ 560 \end{array}$$



$$C \begin{array}{l} 2 \\ 25 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} y = \sqrt{3} x$$

$$\sqrt{3} x - y = 0$$

$$-(\sqrt{3} x_0 - y_0)$$

$$\frac{y - \sqrt{3} x_0}{\sqrt{4}} = \frac{y - \sqrt{3} x_0}{2}$$

$$16 = h^2 + \left(\frac{y - \sqrt{3} x_0}{2} \right)^2$$

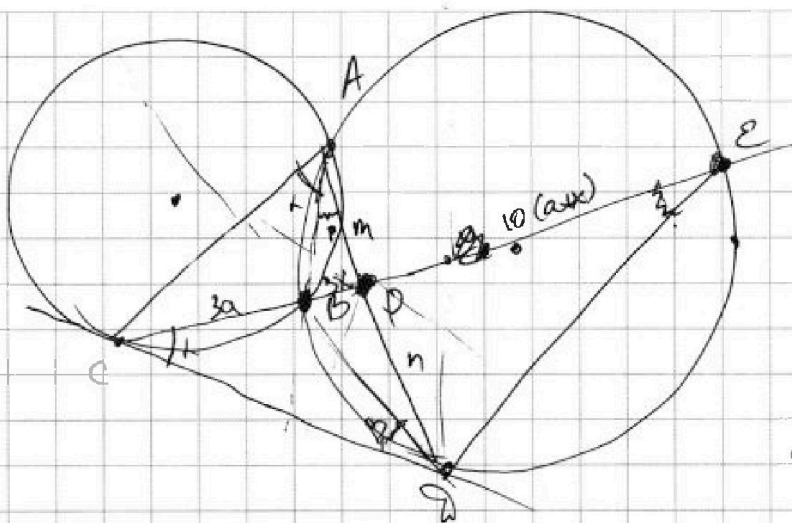


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{BE}$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CB}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$$

$$CD^2 = 3a \cdot 10(a+x)$$

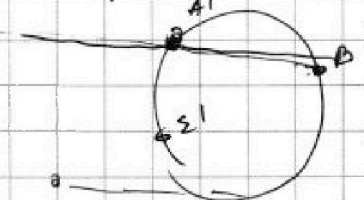
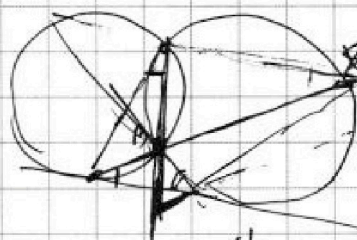
$$\frac{\sin \angle C}{\sin \angle D} = \frac{CA}{AB} = \frac{a}{x}$$

$$30 \cdot 10(a+x)$$

$$30 \cdot x(a+x) = mn$$

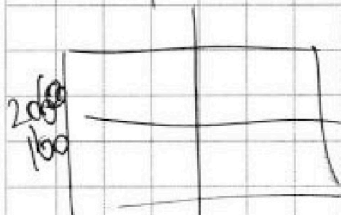
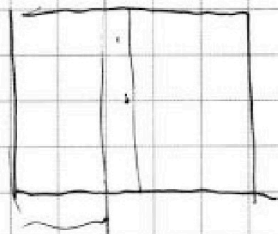
$$30 \cdot a(a+x) = CD^2$$

$$\frac{30a}{10x} = CD$$



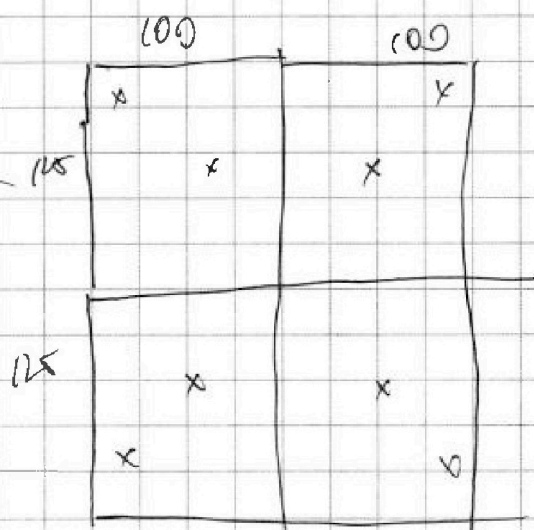
$$C_{100-2x}^4 + C_{200-12x}^4$$

$$+ C_{100-2x}^9$$



$$C_{10}^2 +$$

$$C_{100}^4 +$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

или cos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{Черновик.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

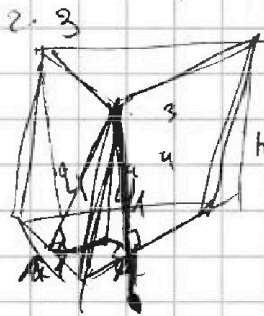
$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 2p$$

$$4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$8\cos^3 x + 12\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 2p$$

$$(2\cos^2 x + 1)^3 = 2p - 7 \Rightarrow 2\cos^2 x + 1 = \sqrt[3]{2p-7} - 1 < 1$$



$$h \cdot l = 4$$

$$a \neq b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$ab = 560$$

$$16 \cdot 7 = 112$$

$$a-c = p \quad b-c = p$$

$$a = b$$

$$560 = 7 \cdot 8 \cdot 10 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7$$

$$(p^2+c)(1+c) = 560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$$

$$1-560 \quad 2-280 \quad 4-140 \quad 8-70 \quad 16-35$$

$$5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 5 \quad 2^3 \cdot 5 \quad 2^4 \cdot 5$$

$$5-112 \quad 10-56 \quad 20-28 \quad 40-7 \quad 80-7$$

$$7 \cdot 2 \cdot 7 \quad 2^2 \cdot 7 \quad 2^3 \cdot 7 \quad 2^4 \cdot 7$$

$$(p^2+c)(1+c) = 560$$

$$(p^2+c) + (1+c)^2$$

$$(c+\frac{3}{2})^2$$

$$2000$$

$$p=2 \quad 3$$

$$c^2 + 2c + 1 + p^2 = 560$$

$$9^2 + 4c^2 + 12c + 4 + 5 = 4 \cdot 560 + 5$$

$$10^2 + 30c + 560 = 2000$$

$$549 = 9 \cdot 61 = 81 \cdot 7$$

$$c^2 + 30c - 549$$

$$9 \cdot 9 \cdot 7$$

$$22 \cdot 21$$

$$2196$$

$$1000$$

$$9 + 4 \cdot 549$$

$$2000$$

$$4005$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$6, 6q^2, 6q^4, 6q^6, 6q^8$
 $q^2 = 2$
 $2^6 = 64 \cdot \frac{1}{32}$
 $5\sqrt{2} = 4 \cdot 138$
 Черновик
 $8 \cdot 3 \cdot 28$
 $q = 0 \rightarrow x = 5$
 $100 \cdot 4$
 $240 + 64 = 304$
 244

$\sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$
 $5-x$
 $(13x-35)(x+1)$
 $(x+1)^2$
 $q^4 = x+1$
 $q^4 = -x-1$
 $b = \frac{5-x}{(x+1)^3}$
 $13x-35 = 25-x$
 $13x - 65 - 35 = 100$
 $13x - 100 = 100$
 $13x = 200$
 $x = \frac{200}{13}$
 $q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$
 $q^{12} = 5-x$
 $q^{14} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$
 $q^2 = \frac{13x-35}{(5-x)^2}$
 $q^2 = \frac{13x-35}{(5-x)^2}$
 $\frac{35}{13} > \frac{5}{2}$
 $\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$
 $4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$
 $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - (p+3) = 0$
 $4x^3 + 6x^2 + 3x - (p+3) = 0$
 $12x^2 + 12x + 3 = 0$
 $4x^2 + 4x + 1 = 0$
 $(2x+1)^2 = 0$
 $x = -\frac{1}{2}$
 $p \geq 0$
 $0 \leq p \leq 10$
 $p < 0$
 $4 \leq p \leq 10$