



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



*R*

1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим полученные значения т.к. если и  
подходят, но только они, но нужна проверка.

~~Вот~~

$$x = 3$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4} = ab^c$$

$$5-x = 2 = ab^c$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4 = ab^{14}$$

$$\text{Итого: } a = \frac{1}{32} \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = -5$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{5(13+1)}{4^3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 20}{4^3}} = ab^c = \frac{5}{4}$$

$$5-x = 10 = ab^c$$

$$\sqrt{(13x+15)(x+1)} = \sqrt{5 \cdot 20 \cdot 4} = ab^{14} = 5 \cdot 4$$

$$b = \sqrt{2} \quad a = \frac{5}{32}$$

Ответ:  $x \in \{-5, 3\}$

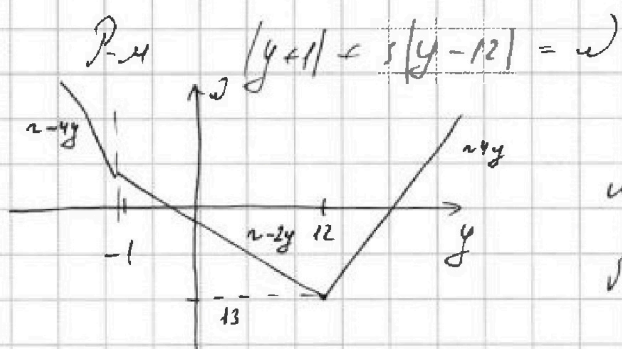


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$z_{\min} = 13$$

$$\sqrt{163 - z^2} \max = 13$$

$$z = 13 = \sqrt{163 - z^2}$$

⇐

$$\begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

⇐

$$\sqrt{x+5} \rightarrow \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+5)}$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} + \sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} - 5 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+5)})^2$$

$$x+5 - 2\sqrt{(4-x)\sqrt{x+5}} + 4-x = 4(4-x)(x+5)$$

$$4(4-x)(x+5) + 2\sqrt{(4-x)(x+5)} - 7 = 0$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} = \frac{7 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$(4-x)(x+5) = \frac{30 \pm 2\sqrt{29}}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} + 3+x + \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & \textcircled{1} \\ t = -2 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{У } \textcircled{1} \quad \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$x - x^2 + 12 = 9$$

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\text{У } \textcircled{2} \quad 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$4x - 4x^2 + 48 = 9$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 39}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

~~$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} & \textcircled{12} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$~~

$$4 - \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$4 - \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$\sqrt{x+3} \text{ и } \sqrt{4-x} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$|\cos x = t|$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$4\left(t^3 + 3t^2 \frac{1}{2} + 3t \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - 3 - \frac{1}{2} = p$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = p + 3,5$$

$$t + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \in [-1; 1]$$

$$\frac{2p+7}{8} \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{27}{8}\right]$$

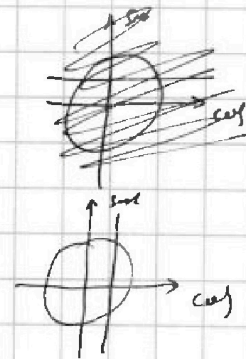
$$2p+7 \in [-1; 27]$$

$$2p \in [-8; 20]$$

$$p \in [-4; 10] \text{ - при таких } p \text{ } \exists \text{ решения}$$

и эти решения

$$x = \pm \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





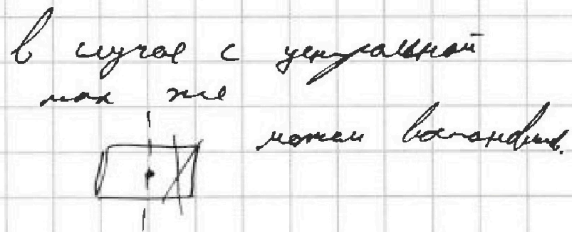
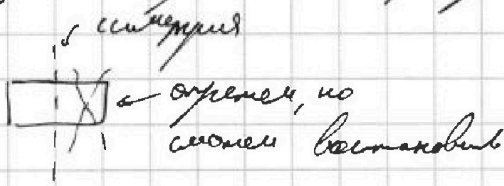
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается если взять и "углубить" покрытие  по узкой линии, но в дальнейшем от ширины не можем восстановить однозначно один вариант размещения.

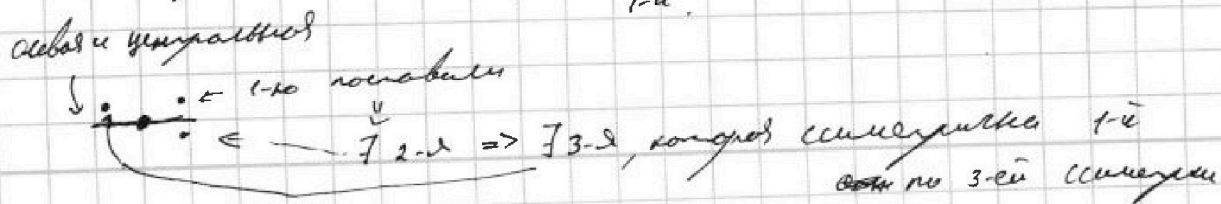
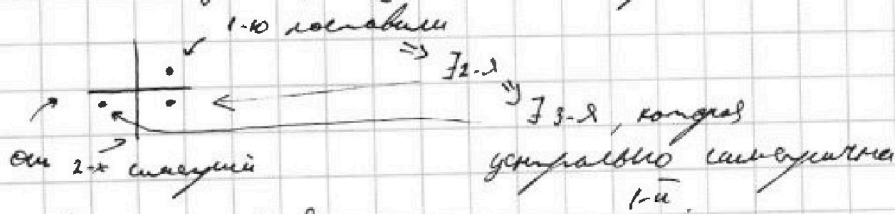


Получим образцы для каждой симметрии

$$\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 250 = 25000$$

$C_{25000}^4$  случаев, ~~каждый~~ как на половине линии (угловой) размещать 4 клетки и еще 4 для восстановления. Но если случаи когда покраска обходит 2 или 3 симметрии.

В случае, когда 2 симметрии  $\Rightarrow$  здесь все 3.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. палец готовано, это может быть только  
1 или 3, но не 2 симметрично.

И м.к. ~~тоже~~ клетки не лежат на  
средних линиях и центре

↓  
Любой расклад симметричной  
тригубы ~~задачи~~ можно  
восстановить по таблице паз.  
и закрашенными паз 2-й клетки.

П.е. наша рекурсия  $C_{11500}^2$ .

↓  
Ответ:  $C_{25000}^4 - 2 C_{11500}^2$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|a-c|$  и  $|b-c|$  - 1 и  $p^2$  при том  $a < b < c$

$$\Rightarrow a-c - (b-c) = a-b = p^2 - 1$$

$$a-b + 1 = p^2$$

$$a+b^2 = 560$$

$$a+b^2+p^2 = 560 + a-b + 1$$

$$p^2 = 561 - b - b^2 \Rightarrow p^2 \in [4; 9; 25; 49; 121; 169; 289; 361; 529]$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$b \neq 1$$

$$b^2+b \in [32; 200; 272; 392; 490; 572; 536; 552; 557]$$

$$\text{и } b \neq 1$$

$$b \in [16; -17; 23; -24]$$

$$b \in [23; -24]$$

$$b(b+1) : 2 \text{ кратно}$$

$$\text{кратно } (1) : 2$$

далее перебор и отбрасываем

$$\begin{cases} b = 23 & p^2 = 9 \\ a = 560 - 23^2 = 31 \\ b = -24 & p^2 = 9 \\ a = 31 - 48 = -16 \end{cases}$$

$$p^2 = 9 = (a-c)(b-c)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ c = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \\ c = 15 \end{cases}$$

Ответ: (31; 23; 22)  
(31; 23; 32)  
(-16; -24; -25)  
(-16; -24; 15)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$560 = a + b^2 > b^2 + b$$

$$b^2 + b - 560 < 0$$

↑  
коробочка вверх вверх вершина  $(-\frac{1}{2} = b)$

$$\text{Т.к. } b = 23 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 - 560 = -8 < 0$$

$$b = 24 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 + 24 + 23 + 1 - 560 = -8 + 48 > 0$$

$$b = -23 \quad b^2 + b - 560 = 529 - 23 - 560 = -54 < 0$$

$$b = -24 \quad b^2 + b - 560 = -54 + 24 + 23 - 1 = -8 < 0$$

$$b = -25 \quad b^2 + b - 560 = -8 + 25 - 24 - 1 > 0$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ р-простое число}$$

↑  
↑, ↑, ↑, ↑, ↑  
↑, ↑, ↑, ↑, ↑

$$a-c = b-c, \text{ но не может быть}$$

$$\text{или } (a-c) \text{ и } (b-c) \text{ это } 1 \text{ и } p^2$$

$$560 \equiv 2$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow b \not\equiv 1$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 0 \\ a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \\ b \equiv 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$$

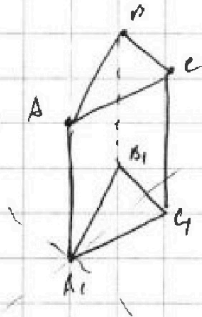


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По усл. задачи  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

$AB \parallel A_1B_1$ ,  $BC \parallel B_1C_1$ ,  $A_1C_1 \parallel AC$ .

$$S_{\triangle AA_1B_1} = S_{\triangle AA_1C_1} = 4$$

$$S_{\triangle AA_1C_1} = 3 \quad \Downarrow$$

т.к. основ.

равны

$A$  равно удалено от

$A_1B_1$  и  $A_1C_1$ .

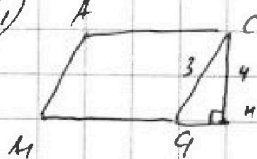
Треугольн  $\triangle AA_1C_1$  тупой  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  высота на  $B_1C_1$  угла  $\triangle AA_1C_1$  или  
~~или~~ смежного с ним.

В случае  $B_1C_1$  угла  $\triangle AA_1C_1$  у нас очевидно  
возникает ситуация отклонения

$AA_1$  и  $B_1C_1 \Rightarrow$  т.к.  $B_1C_1 = BC$  ~~то~~  $B_1C_1$

симметрично ~~то~~  $B_1C_1$  - прямоугольн. и  $CC_1 = 3$

д.л.  $(ACC_1A_1)$



$$CH \perp A_1C_1$$

$$CH = 4 \leq CC_1 = 3, \text{ то}$$

невозможно

~~Т~~ ~~то~~ ~~лучше~~  $\triangle AA_1C_1$  тупой  
на  $B_1C_1$  смежн. угла с  $\triangle AA_1C_1$   
и ~~заменим~~ т.к.  $B_1C_1$  ~~осн~~  $\parallel$   
 $B_1C_1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\vec{A_1A} = \vec{h} + k \vec{B_1C_1}$

$\vec{h}$  — вектор высоты,  $k$  — коэффициент

$$|\vec{A_1A} \times \vec{B_1C_1}| = s = \left| (\vec{h} \times \vec{B_1C_1}) \right| = h \cdot B_1C_1 = h$$

$h = s$

$$y = |\vec{A_1A} \times \vec{A_1B_1}| = \left| \left[ \vec{h} \times \vec{A_1B_1} \right] + k \left[ \vec{B_1C_1} \times \vec{A_1B_1} \right] \right|$$

Для  $k=0$  это решение  $s \Rightarrow \exists k$ , что это  $y$ .

Ответ:  $h = s$

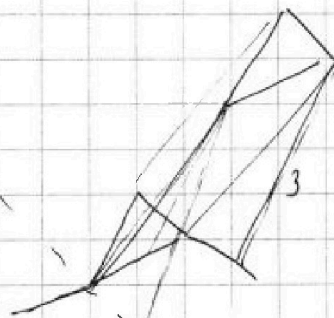
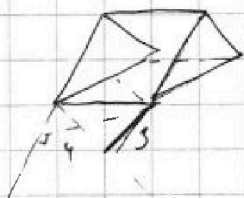
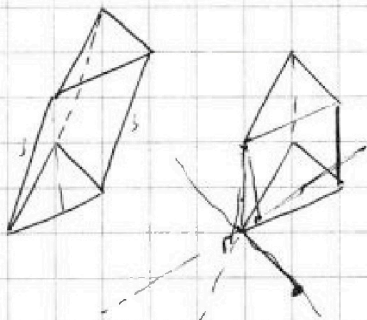


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

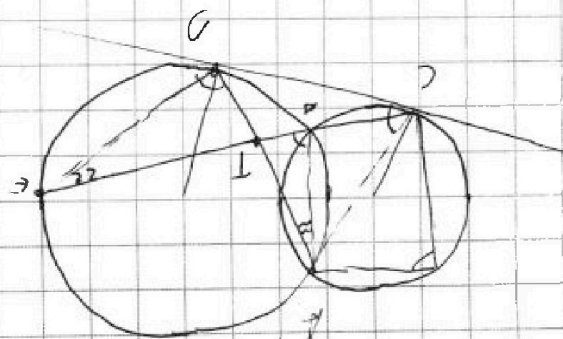
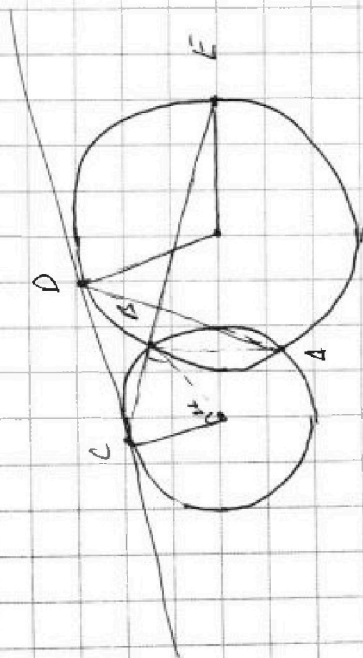
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h \cdot a = s$$

$$\left| \left( \frac{h}{a} + a \right) \cdot a \right| = s$$

$$\left| \left( h + a^2 \right) \cdot a \right| = s$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-b) + 12 = (a+b)^2$

$\cos x + 5 \cos 2x + 6 \cos x = p$

$\cos x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$   
 $\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x (2 \sin x \cos x)$

$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$

$4 \cos^2 x + 6 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = p$

$\cos^2 x + 3 \cos x (\cos x + 1)^2 - 3 = p$

$4 \cos^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{3}{4} \cos x - \frac{3}{4} = \frac{p}{4}$

$(\cos x + \frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4} =$

$560 < b^2 + b$   
 $b^2 + b - 560 > 0$

$|[C \times D]| = |[D \times C]|$

$CD^2 = CS \cdot SE =$   
 $= AS \cdot SA$   
 $BT \cdot TE = AT \cdot TD$

$ED = AB \cdot \frac{AT}{TE} = AS \cdot \frac{BT}{DT}$

$625$   
 $91$   
 $89$   
 $81$   
 $88$

$a \equiv 2$   
 $a \equiv 1$

$b \equiv 3$   
 $b \equiv 2$

$a =$   
 $b = 255 - 195$

$10 \cdot 6$   
 $300 - 18$   
 $282$   
 $22$   
 $22$   
 $695$

$49$   
 $169$   
 $591$

$25$   
 $121$   
 $289$   
 $529$

$16$   
 $64$   
 $144$   
 $256$

$4$   
 $5$

$24$   
 $25$   
 $26$   
 $27$   
 $28$   
 $29$   
 $30$   
 $31$   
 $32$   
 $33$   
 $34$   
 $35$   
 $36$   
 $37$   
 $38$   
 $39$   
 $40$   
 $41$   
 $42$   
 $43$   
 $44$   
 $45$   
 $46$   
 $47$   
 $48$   
 $49$   
 $50$   
 $51$   
 $52$   
 $53$   
 $54$   
 $55$   
 $56$   
 $57$   
 $58$   
 $59$   
 $60$   
 $61$   
 $62$   
 $63$   
 $64$   
 $65$   
 $66$   
 $67$   
 $68$   
 $69$   
 $70$   
 $71$   
 $72$   
 $73$   
 $74$   
 $75$   
 $76$   
 $77$   
 $78$   
 $79$   
 $80$   
 $81$   
 $82$   
 $83$   
 $84$   
 $85$   
 $86$   
 $87$   
 $88$   
 $89$   
 $90$   
 $91$   
 $92$   
 $93$   
 $94$   
 $95$   
 $96$   
 $97$   
 $98$   
 $99$   
 $100$