



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$ , девятый член равен  $x+3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть  $a$  — шаг профессии. Тогда  $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3$   
 $\wedge (x+3)a^2 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$  т.к.  $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \geq 0$  и  $a^2 \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 0$   
 $\Rightarrow x \geq -3$

$\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0$   $(x-6)^3$  и  $x-6$  одного знака  $\Rightarrow \frac{25x-9}{x-6} \geq 0$

$\Rightarrow x \leq \frac{25}{9}$  или  $x > 6$  При таких ограничениях  $(25x-9)(x-6) \geq 0$

$\Rightarrow$  Наше ОДЗ:  $x \in [-3; \frac{25}{9}] \cup (6; +\infty)$

$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \Rightarrow a^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$

$\Rightarrow \frac{(x+3)^4}{(\sqrt{(25x-9)(x-6)})^3} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$  возведем обе части в квадрат

$\frac{(x+3)^8}{(25x-9)^3(x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$   $(x-6)^3 \neq 0 \Rightarrow$  мы можем сократить

$\Rightarrow (x+3)^8 = (25x-9)^4 \Rightarrow (x+3)^2 = |25x-9|$  если  $x \geq \frac{25}{9}$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$

$\Rightarrow x^2 - 19x + 18 = (x-18)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x=1$  или  $x=18$  оба значения подходят под ОДЗ.

или  $x < \frac{25}{9}$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$

$\Rightarrow x^2 + 31x = 0$

$x=0$  или  $x=-31$   $x=-31$  не подходит под ОДЗ

$\Rightarrow$  Возможные значения  $x=0; x=1; x=18$

Ответ:  $x=0; x=1; x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow p \cos 3x + 3(p+4)\cos x = 4p \cos^3 x + 12\cos x$$

$$6\cos 2x + 10 = 12\cos^2 x + 4$$

$$\Rightarrow 4p \cos^3 x - 12\cos^2 x + 12\cos x - 4 = 0 \quad \text{пусть } t = \cos x \text{ где } -1 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow 4p t^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad \text{на 4 можно сократить}$$

$$p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \quad \text{Заметим что } t \neq 0 \text{ т.к. тогда } p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \quad \text{Посмотрим какие значения будет принимать } p \text{ если } -1 \leq t \leq 1$$

~~Заметим что~~

Заметим что  $3t^2 - 3t + 1$  парабола с ветвями вверх у которой нет корней т.к.  $D = 9 - 12 = -3 < 0$ .  $\Rightarrow$  Значение  $3t^2 - 3t + 1 > 0$  при любом  $t$ . Вершина этой параболы будет в точке  $t = 0,5$ . Если  $t < 0$  то если  $t \downarrow$  то  $3t^2 - 3t + 1 \uparrow$  а  $t^3 \downarrow$

$\Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$   $\Rightarrow$  минимальное значение  $p$  будет  $-\infty$  т.к. если  $t$  очень близко стремится к 0, то  $\frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3}$  стремится к  $-\infty$

а максимальное отриц. значение  $p$  будет при  $t = -1$   $p = -7$

$\Rightarrow$  при  $-1 \leq t < 0$   $p \in (-\infty; -7]$  ( $t$ -возрастает,  $\downarrow$  удобов.)

Если  $t > 0$  при  $0 < t \leq 0,5$   $3t^2 - 3t + 1 \downarrow$   $t^3 \uparrow \Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \downarrow$

а при  $0,5 < t \leq 1$   $3t^2 - 3t + 1 \uparrow$   $t^3 \uparrow$  но  $3t^2 - 3t + 1$  будет расти медленнее чем  $t^3 \Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \downarrow$

$\Rightarrow$  максимальное значение  $p$   $+\infty$  при  $t \rightarrow 0$  а миним. полог.

$p$  будет при  $t = 1$   $p = 1$

$\Rightarrow$  при  $-1 \leq t \leq 1$   $t \neq 0$   $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

Это и будут значения  $p$  при которых есть хотя бы одно решение

Решая уравнение  $p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$  мы получили значение  $p$  в  $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t + 2\pi k$ . При чем  $-1 \leq t \leq 1$  что

будет  $t$  подходящее под ограничения будет только 1, т.к. мы доказали что при  $t < 0$   $p < 0$  и функция строго возрастает, а при  $p > 0$   $t > 0$  и функция строго убывает  $\Rightarrow$  двух подходящих значений  $t$  не может быть

Ответ:  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

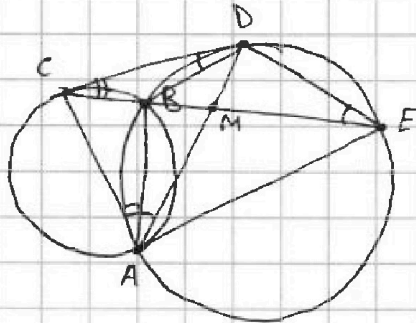


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



НЧ.

Пл.к. ABDE - вписанн.  $\Rightarrow \angle BAD = \angle BED = \alpha$

CD - касат.

$\Rightarrow \angle CDB = \angle BAD = \alpha \quad \angle CAB = \angle DCB = \beta$

$\Rightarrow \angle CAM = \alpha + \beta$

$\angle DBE$  - вписанн. в  $\triangle CBD \Rightarrow \angle DBE = \angle BCD + \angle BDC = \alpha + \beta$

ABDE - вписанн.  $\Rightarrow \angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \angle DAE = \angle CAM \Rightarrow AM$  - бисс. в  $\triangle CAE$

$$\Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5} \quad \angle DEB = \angle BDC \text{ и } \angle BCD - \text{общий}$$

$\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle CDE$  по двум углам  $\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$

По теореме синусов для  $\triangle CDE$   $\frac{DE}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

По т. син.  $\triangle ABM$   $\frac{BM}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin \angle ABM}$

По т. син.  $\triangle ABC$   $\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

$\sin \angle ABM = \sin \angle ABC$  т.к.  $\angle ABM + \angle ABC = 180$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB} \quad \frac{AC}{AE} = 0,4 \Rightarrow AC = 0,4AE$$

$\Rightarrow \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = 2,5 \left( \frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right)$  ABDE - впис.  $\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle BMD$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{BM}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \left( \frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = 2,5 \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \left( \frac{BD}{BC} \right)^2 = 2,5 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \sqrt{2,5} = \frac{ED}{CD}$$

Ответ:  $\sqrt{2,5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

В одной четверти кол-во клеток равно  $50 \cdot 200 = 10000$

$$\Rightarrow N_4 = C_{10000}^2$$

Заметим что каждый такой способ или посылка по одному разу в каждой кол-во  $N_1, N_2, N_3$ . Т.е. всего 3 раза

$\Rightarrow$  Общее кол-во раскрасок будет равно  $N_1 + N_2 + N_3 - 2N_4 =$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

если  $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3$   $b-c \equiv 1 \pmod 3$   $(a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$  не подходит  
если  $c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 1 \pmod 3$   $b-c \equiv 0 \pmod 3$   $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$  подходит

$\Rightarrow$  либо  $a \equiv 0 \pmod 3$   $b \equiv 2 \pmod 3$   $c \equiv 0 \pmod 3$  либо  $a \equiv 0 \pmod 3$   $b \equiv 2 \pmod 3$   $c \equiv 2 \pmod 3$

1)  $a \equiv 0 \pmod 3$   $b \equiv 2 \pmod 3$   $c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p=3$   
 $p^2=9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c)=9$   $a-c \equiv 0 \pmod 3$   $b-c \equiv 2 \pmod 3$  единственной случай  
когда так может быть если  $a-c=-9$   $b-c=-1$

$\Rightarrow b-a=8$   $b=a+8$

$\Rightarrow a^2+a+8=710$   $a^2+a-702=(a+27)(a-26)=0$   $a \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow a=-27$   $b=-19$   $c=-18$

2)  $a \equiv 0 \pmod 3$   $b \equiv 2 \pmod 3$   $c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p=3$   
 $p^2=9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c)=9$   $a-c \equiv 1 \pmod 3$   $b-c \equiv 0 \pmod 3$  единственной случай

когда так может быть если  $a-c=1$   $b-c=9$

$\Rightarrow b-a=8$   $b=a+8$

$\Rightarrow a^2+a+8=710$   $a^2+a-702=(a+27)(a-26)=0$   $a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a=-27$

$b=-19$   $c=-28$

Или нашли все возможные тройки

Ответ:  $(26; 34; 25)$ ;  $(26; 34; 35)$ ;  $(-27; -19; -18)$ ;  $(-27; -19; -28)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



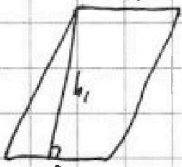
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

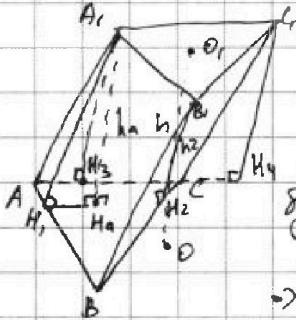
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.

Боковые стороны будут параллелограмми - площадь параллелограмма будет  $h_1 \cdot a$ .  $\Rightarrow$  Выс. в двух параллелограммах будет равно  $3/a$ , а в другом  $2/a$



Пусть с.о.о. в паралл.  $ABB_1A_1$  и  $ACC_1A_1$  равно  $3/a$ , а в паралл.  $BCC_1B_1$  высота равна  $2/a$ . Пусть  $h_a$  высота из точки  $A_1$  на осн.  $ABC$ , аналогично определяются  $h_b$  и  $h_c$ .  $h_a = h_b = h_c$



Заметим что т.к.  $A_1H_1 \perp AB$ , то по теореме 3-х перпенд. проекция  $A_1H_1$  на плоскость  $ABC$  будет перпендикулярна  $AB \Rightarrow H_1H_1 \perp AB$  и  $H_1H_1 \perp A_1H_1$  т.к.  $A_1H_1 \perp$  плоскости  $ABC$

$\Rightarrow h_a^2 = A_1H_1^2 - H_1H_1^2$  Аналогично получим что

$$h_a^2 = H_3A_1^2 - H_3H_3^2 \quad A_1H_1 = A_1H_3 \Rightarrow H_3H_3 = H_1H_1 = \sqrt{9 - h_a^2}$$

$\Rightarrow$  Пусть  $H_a$  лежит на бисс.  $\angle BAC \Rightarrow \angle H_aAC = \angle H_aAB = 30$

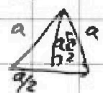
$$\Rightarrow A_1H_a = 2H_aH_3 \quad A_1H_a \perp A_1H_1 \Rightarrow AA_1^2 = BB_1^2 = CC_1^2 = 4H_aH_3^2 + h_a^2 = 9 + 3H_aH_3^2$$

Пусть  $h$  высота из центра  $\triangle ABC$  на основание  $ABC$  ( $h$  по  $O_1$ )

Тогда  $h_a = h_b = h_c = h$   $\Leftarrow$  Тогда  $A_1H_aO_1$  - прямоугол.  $\Rightarrow A_1O_1 \parallel H_aO$

и  $A_1O_1 = H_aO$   $A_1H_a \parallel A_1O_1 \Rightarrow$  точки  $A_1, H_a, O$  лежат на одной прямой

Найдем сторону  $a$ .



$$S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow h_2 = \sqrt{3}$$

Площадь всей поверхности будет равен  $h \cdot S_{ABC} = h$

Заметим что  $H_aH_3 = H_cH_4$  и  $H_aH_3 \parallel H_cH_4$   $H_cH_4 \perp H_3H_4$

$$\Rightarrow H_aH_3H_4H_c \text{ - прямоугол. } \Rightarrow H_aH_c = H_3H_4 = A_1C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



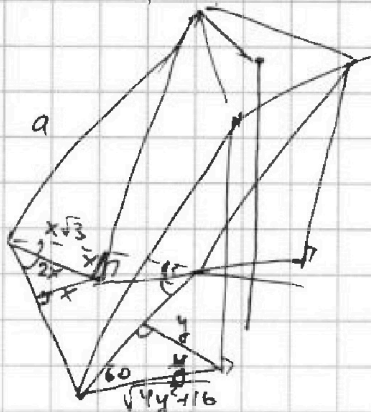
На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{4}$$



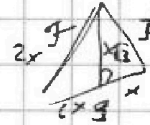
$$a^2 - 4x^2 = h_a^2 = 9 - x^2 = 5 - y^2$$

$$a^2 = 9 + 3x^2 = 4 + 3y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$y^2 = a^2 - h_a^2 = 4x^2 = 4y^2 + 16$$

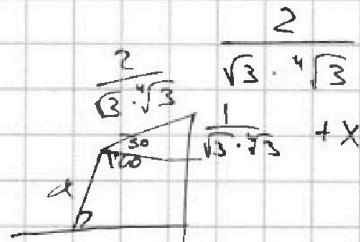
$$3y^2 + 16 + 4 = 20 + 3y^2 = 9 + 3x^2$$



$$x^2 \sqrt{3} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}$$



$$x^2 = y^2 + 4$$

$$x^2 = 4x^2 + 4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} + 2a = x+3 \quad x+3 + 6a = \sqrt{25x-9}$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \quad (x+3)a^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}} \quad \frac{(x+3)^3 (x+3)}{(25x-9)(x-6)\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$(x+3) \quad (25x-9)(x-6) \geq 0 \quad \begin{matrix} + & - & - & + \\ \hline & 25/9 & & 6 \end{matrix}$$

$$\frac{(x+3)^3}{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3}$$

$$(x+3)^3 = (25x-9)^4$$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \quad (x-18)(x-1) = 0$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x=0 \quad x=-31$$

$$\frac{ED}{CD} = ? \quad \frac{CM}{EM} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin(\angle))}{\sin(\angle))} = \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AM}{\sin x} = \frac{BM}{\sin(\angle))} \quad \frac{AC}{\sin x} = \frac{CB}{\sin(\angle))}$$

$$\sin(\angle)) = \frac{CB \cdot \sin x}{AC} \quad \frac{1}{\sin(\angle))} = \frac{AM \cdot \sin x}{BM}$$

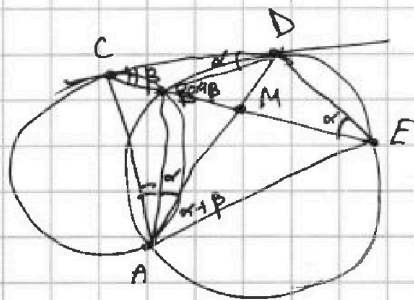
$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} \quad \frac{CB}{AC} \cdot \frac{EM}{DM} = \frac{BD}{CB} = \frac{1}{\sqrt{2.5}}$$

$$\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{CB}{DM} \cdot \frac{EM}{DM} = 2.5 \quad \frac{CB}{DM} \cdot \frac{BD}{DM} = \frac{BD}{CB}$$

$$2.5 \frac{CB}{BD} = \frac{BD}{CB} \quad 2.5 CB^2 = BD^2 \quad BD = CB \sqrt{2.5}$$

$$2.5 \left( \frac{CB}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = \frac{BM}{BD} = \frac{2.5 CB}{BD} = \frac{BD}{CB}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a^2 + b = 710$$

$$a^2 \equiv 0 \quad a^2 \equiv 1$$

$$a^2 \equiv 1 \quad b \equiv 1 \quad \times$$

$$a^2 \equiv 0 \quad a \equiv 3 \quad b \equiv 2$$

$$c \equiv 1 \quad a - c \equiv 2 \quad b - c \equiv 1$$

$$c \equiv 2 \quad a - c \equiv 1 \quad b - c \equiv 0$$

$$c \equiv 0 \quad a - c \equiv 0 \quad b - c \equiv 2$$

$$ab - c(a + b) + c^2 = p^2$$

$$ab - c(a + b) = (p - c)(p + c) \quad c : 3$$

$$(a - c)(b - c) = 9$$

$$9 \cdot 78 \quad 27 \cdot 26$$

$$a - c = -9 \quad b - c = -1$$

$$b - a = 8 \quad b = a + 8$$

$$a - c = 1 \quad b - a = 8$$

$$a, 5y = 1$$

$$y = 2$$

$$x = 3$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$(a + 27)(a - 26)$$

$$a = -27 \quad b = -19 \quad c = -18$$

$$a = 26 \quad b = 34 \quad c = 35$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-42} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+2} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-2^2} \end{cases}$$

$$-9 \leq 2 \leq 9$$

$$x \geq -5$$

$$1-x-42 \geq 0$$

$$y-4x-x^2+2 \geq 0$$

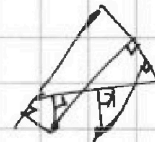
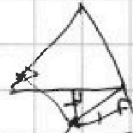
$$1-x \leq 6$$

$$y \geq 5$$

$$y+4 + 4y-20 = \sqrt{81-2^2}$$

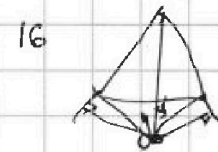
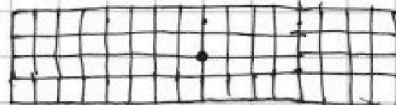
$$5y-16 = \sqrt{81-2^2}$$

$$256 - 81 = 175$$

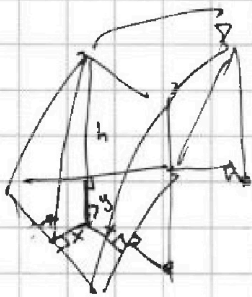


$$28 - 42 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x-42} + 8\sqrt{x+5} - 8\sqrt{1-x-42} = 4y - 16x - 4x^2 + 42$$

$$4x^2 - 16x \quad h = 2 \quad h = 16 + 8 + 8 = 32$$



$$3y^2 + 4y + 16 = 0$$



$$x - \frac{1}{2}y = 1$$

$$9 - x^2 = 4 - y^2 \quad y^2 = x^2 - 5$$

$$y^2 = 1 + 0,25y^2 - y - 5$$

$$C_{100,200}^2 + C_{100,200}^3 + C_{100,200}^2 - C_{100,400}^1$$

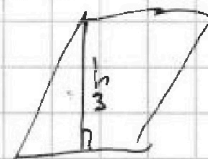
$$x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$x = 1 - 0,5y$$

$$0,75y^2 + y + 4 = 0$$

$$-\frac{1}{1,5} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА / ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Квадрат целого числа даёт либо остаток 0, либо остаток 1 при делении на 3

$\Rightarrow$  либо  $a^2 \equiv 1 \pmod 3$  либо  $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ . Если  $a^2 \equiv 1 \pmod 3$  тогда  $b \equiv 1 \pmod 3$  (н.к.  $710 \equiv 2 \pmod 3$  и  $a^2 + b = 710$ ). П.к.  $a^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$  либо  $a \equiv 1 \pmod 3$  либо  $a \equiv 2 \pmod 3$  если  $a \equiv 1 \pmod 3$  тогда  $b - a \equiv 0 \pmod 3$ , а такого быть не может  $\Rightarrow a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$   
если  $a^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$   ~~$b \equiv 1 \pmod 3$~~   $a \equiv 0 \pmod 3$  и  $b \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow b - a \not\equiv 0 \pmod 3$  подходит.

$\Rightarrow$  либо  $a \equiv 2 \pmod 3$  и  $b \equiv 1 \pmod 3$  либо  $a \equiv 0 \pmod 3$  и  $b \equiv 2 \pmod 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$  \*  ~~$\equiv 0 \pmod 3$~~   $\Rightarrow$  либо  $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$  либо  $(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod 3$

Если  $a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$ . Посмотрим какой остаток при делении на 3 может давать число  $c$ . если  $c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3$   $b-c \equiv 1 \pmod 3$  тогда  $(a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$  но такого быть не может  
если  $c \equiv 1 \pmod 3$   $a-c \equiv 1 \pmod 3$   $b-c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$  подходит  
если  $c \equiv 2 \pmod 3$   $a-c \equiv 0 \pmod 3$   $b-c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$  подходит  
 $\Rightarrow$  либо  $a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$   $c \equiv 1 \pmod 3$  либо  $a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$   $c \equiv 2 \pmod 3$

1)  $a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$   $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3$  а н.к.  $p$  - простое число  $\Rightarrow p = 3$   $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$   $a-c \equiv 1 \pmod 3$   $b-c \equiv 0 \pmod 3$  единственной парой когда так может быть если  $a-c = 1$   $b-c = 9$  (н.к. числа целые)

$\Rightarrow b - a = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$

$\Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0$   $a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a = 26$   $b = 34$   $c = 25$

2)  $a \equiv 2 \pmod 3$   $b \equiv 1 \pmod 3$   $c \equiv 2 \pmod 3$   $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p = 3$   $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$   $a-c \equiv 0 \pmod 3$   $b-c \equiv 2 \pmod 3$  единственной парой когда так может быть если  $a-c = -9$   $b-c = -1 \Rightarrow b - a = 8$   $b = a + 8$

$a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0$   $a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a = 26$

$b = 34$   $c = 35$

Если  $a \equiv 0 \pmod 3$   $b \equiv 2 \pmod 3$ . Посмотрим какой остаток при делении на 3 будет давать число  $c$ , если  $c \equiv 0 \pmod 3$   $a-c \equiv 0 \pmod 3$   $b-c \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$  подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

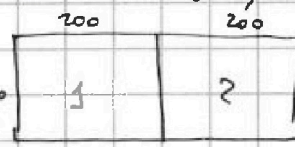
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

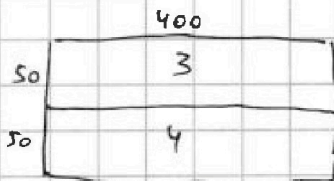
NS.

Найдем кол-во раскрасок симметричных относительно центра.  
Заметим что по одной точке однозначно



определяется вторая симметричная ей. и если первая клетка в 1 половине прямоуго. то вторая будет лежать во 2 и наоборот.  $\Rightarrow$  Кол-во раскрасок симметричных относительно центра будет равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине. в ней кол-во клеток равно  $100 \times 200 = 20000$  кол-во способов  $N_1 = C_{20000}^4$

Аналогично кол-во раскрасок симметр. отн. верт. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине и.е.  $N_2 = C_{20000}^4$

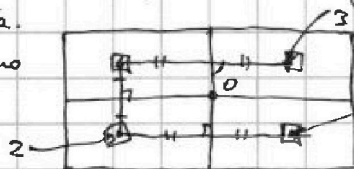


Кол-во раскрасок симметр. отн. гор. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки из 3 половины. в 3 половине клеток  $50 \cdot 400 = 20000$

$\Rightarrow N_3 = C_{20000}^4$

Заметим что если раскраска симметрична относительно любых 2-х способов, то она будет симметрична и относительно 3-его способа.

Докажем это



Пусть например раскраска симметрична относительно фронтальной ос. есть клетка 1.

Тогда по ней однозначно выстраиваются клетки 2, 3 симм. ей. А по клетке 2 однозначно выстраивается клетка 4 симм. ей. Заметим что в этом случае точки 1 2 3 4 образуют прямоуго. и ср. линии исходного прямоуго. будут ср. линии в нем. Тогда точка 3 симм. 4 отн. ср. линии и точки 1, 4, и 2 и 3 симм. относительно 0.  $\Rightarrow$  Эти 4 точки симм. отн. центра

Аналогично другие 4 точки будут симм. отн. центра. Для 2-х других вариантов. доказываемся аналогично, что тогда будет симм. отн. центру. Тогда кол-во раскрасок симм. относительно 3-х. будет равно кол-ву способов выбрать 2 клетки в одной четверти прямоуго.