



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $a = -q^4$ $\begin{cases} b = 6 - a & (1) \\ b^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \Rightarrow b^2 = 73q^4 + 48 \end{cases}$

(1): $b = 6 + q^4$ $36 + 72q^4 + q^8 = 73q^4 + 48$ $a = -q^4 \Rightarrow q^4 = -a$

$a^2 - 72a + 36 = -73a - 48$

$a^2 + a + 84 = 0$ $D = 7 - 4 \cdot 84 < 0$ корней нет.

Ответ: $x = 3, x = 20$

Проверим случаи: $a_1 = 4, a_2 = 27$

1) $a_1 = 4$ - подходит по ОДЗ (иногда по что под корнем > 0)

и при $a_1 = 4$ $b > 0$ и $b^4 > 0$, $b \cdot \frac{1}{q^0} > 0$ $\Rightarrow 4 = x + 7$ $x = 3$

2) $a_2 = 27$ - подходит по ОДЗ, но $b = 6 - a < 0 \Rightarrow$ все члены

происходят отрицательные (и.к. $q > 0$), но 7-ой и 13-ой члены положительны - противоречие?! \otimes

2) $a = -q^4$ $\begin{cases} b = 6 - a & \text{стр 26} \\ b^2 q^4 = -q^4 (-73q^4 - 48) \Rightarrow b^2 = 73q^4 + 48 & q^4 = -a \end{cases}$

$36 - 72a + a^2 = -73a + 48$

$a^2 + a - 72 = 0$

$a_1 = -4$ $-4 + 3 = -1$

$a_2 = 3$ $-4 + 3 = -1$

и.к. $a = -q^4 < 0$, но $a_2 = 3$ \times

$a_1 = -4$ - проверим по ОДЗ:

1) $\frac{73a - 48}{a^2} > 0$ \otimes

2) $(73a - 48) a > 0$ \otimes $b > 0 \Rightarrow a = -4$ подходит.

$-4 = x + 7 \Rightarrow x = -11$
 $x = -5$

Ответ: $x \in \{3; -5\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b + 5 = 2ab \quad a, b \geq 0$$

$$a = \sqrt{x+3}$$

$$a - b = 2ab - 5$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$x+3 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} + 4-x = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$\text{Пусть } d = \sqrt{(x+3)(4-x)} = ab, \quad d \geq 0$$

$$3 - 2d + 4 = 4d^2 - 20d + 25$$

$$7 - 2d = 4d^2 - 20d + 25$$

$$4d^2 - 18d + 18 = 0$$

$$2d^2 - 9d + 9 = 0$$

$$D_d = 81 - 8 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

$$d_1 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3 > 0 \quad \textcircled{1}$$

$$1) \quad d=3: \quad (x+3)(4-x) = 9$$

$$-x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

- корни.

Проверим по ОДЗ (!) $3 \leq \frac{1+\sqrt{13}}{4} \leq 4$

$$(!) \quad 7 + \sqrt{13} \leq 16$$

$$(!) \quad \sqrt{13} \leq 9 \quad \textcircled{1}$$

x_1 - подходит.

$$(!) \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \geq -3$$

$$(!) \quad 1 - \sqrt{13} \geq -6$$

$$(!) \quad 7 \geq \sqrt{13} \quad \textcircled{1}$$

(1)

$$2) \quad d = \frac{3}{2} \quad -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x + 39 = 0$$

$$x_1 = \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8}$$

$$x_2 = \frac{4 - 8\sqrt{70}}{8}$$

Проверим по ОДЗ!

$$(!) \quad \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8} \leq 4$$

$$(!) \quad 6\sqrt{70} \leq 32 - 4 = 28$$

$$(!) \quad 2\sqrt{70} \leq 7$$

$$(!) \quad 40 \leq 49 \quad \textcircled{1}$$

$$(!) \quad \frac{4 - 8\sqrt{70}}{8} \geq -3 \quad (!) \quad -8\sqrt{70} \geq -28$$

x_2 - не подходит.

(1)

Ответ: $y = 12, z = 0, x \in \left\{ \frac{4 + 8\sqrt{70}}{8}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

(1)

(1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{23} \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+7| + 3|y-72| = \sqrt{73^2 - z^2} & (2) \end{cases} \quad \sqrt{73^2 - z^2} \leq \sqrt{73^2} = 73$$

из (2) получим: $|y+7| + 3|y-72| \leq 73$

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{+} \quad \text{---} \quad \text{+} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ -7 \quad \quad \quad 72 \quad \quad \quad y \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) y \geq 72 \\ 4y + 7 - 36 \leq 73 \end{array}$$

$$4y \leq 73 + 35$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 72 \Rightarrow \boxed{y = 72}$$

$$2) -7 \leq y < 72 \quad \text{то } y+7-3y+36 \leq 73$$

$$-2y + 37 - 73 \leq 0$$

$$2y \geq 24$$

$$y \geq 12 \quad \emptyset$$

$$3) y < -7 \quad -y-7-3y+36 \leq 73$$

$$4y \geq 35 - 73$$

$$4y \geq -38$$

$$y \geq \frac{-38}{4} > -7 \quad \emptyset$$

Значит (2) может выполняться только в случае:

$$y = 72 \quad \text{и} \quad z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{и} \quad y = 72 \quad \text{поэтому в (1)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-0} + 5 = 2\sqrt{72+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+72}$$

Заметим, что:

$$-x^2+x+72 = (x+3)(4-x)$$

Пусть $\sqrt{x+3} = a, a \geq 0$

$\sqrt{4-x} = b, b \geq 0$

тогда: $a - b + 5 = 2ab$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13) $\cos x = t \quad -1 \leq t \leq 1$

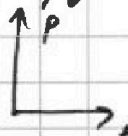
$\cos 2x = 2t^2 - 1$

$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$

$\cos 3x = 4t^3 - 3t$

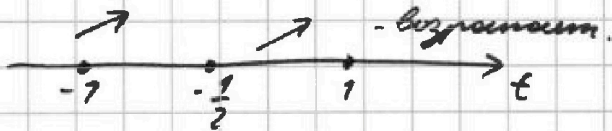
$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

выразим p от t $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$



$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$



$\forall t \neq -\frac{1}{2} \quad f'(t) > 0$

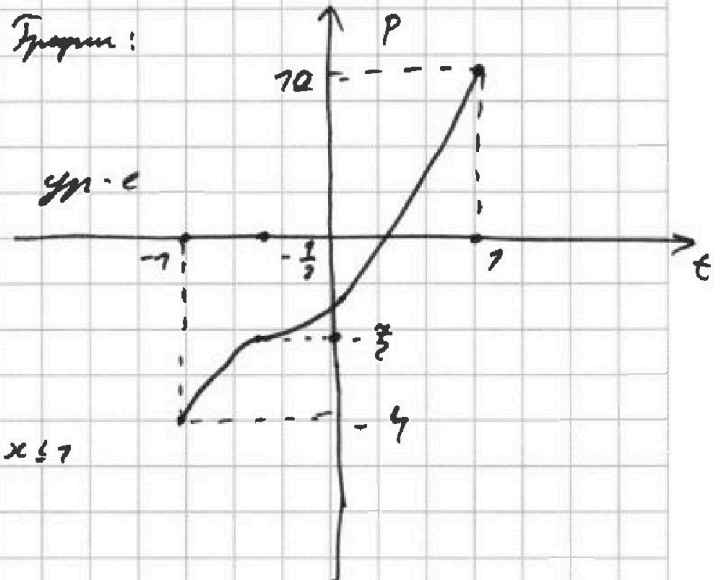
Значит, $-\frac{1}{2}$ - точка перегиба, а $f(t)$ монотонно возрастает;

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{2^2}{2^3} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$

$f(-1) = -4 + 6 + 3 - 3 = -4$

График:

$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$



Из графика видно, что при t от -1 до 1 (а следовательно и от $\cos x = -1$ до $\cos x = 1$)

имеет место только один

$p \in [-4; 10]$

$-1 \leq t \leq 1$

и.к. $-1 \leq \cos x \leq 1$

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем, что функция монотонно возрастает и имеет решение только при $p \in [-4; 10]$, при этом решение относительно t - единственное (при $p \in [-4; 10]$)

Ответ: есть решение только при $p \in [-4; 10]$

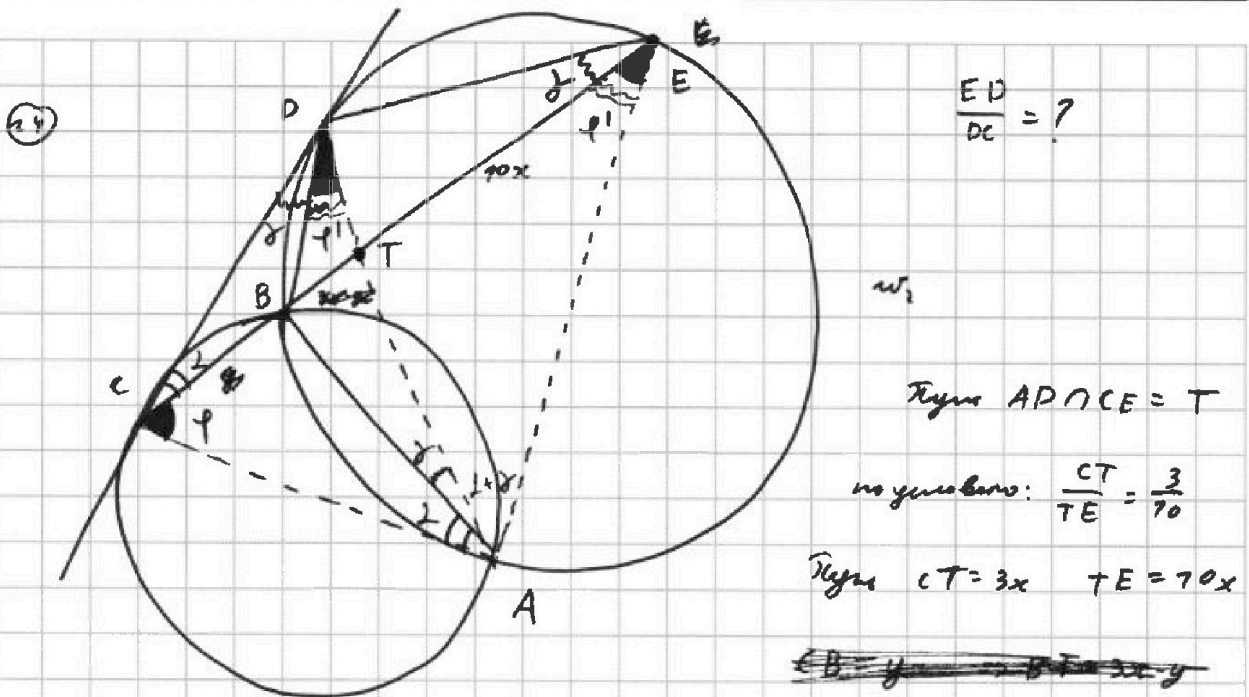


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Поиск, поиск~~
~~Т. сечение и касательная~~

~~$ED^2 = 8 \cdot 70x$~~

$\angle CDB = \alpha = \angle DEB = \angle DAB$
 $\angle DCB = \angle BAC$

Т. сеч. $\triangle CBP$: $\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{CB}{\sin \angle}$

$\frac{\sin \angle}{\sin \alpha} = \frac{BD}{BC}$

Т. сеч. $\triangle CDE$: $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin \angle} \Rightarrow \frac{\sin \angle}{\sin \alpha} = \frac{ED}{DC} = ?$

Значит: $\frac{BD}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{\sin \angle}{\sin \alpha}$

$\angle DBE = \angle DAE = \angle + \alpha = \angle DAC = \angle + \alpha$

Значит ~~AT~~ AT - диаметр $\triangle ACE$:

по свойству диаметра: $\frac{CT}{TE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{70}$

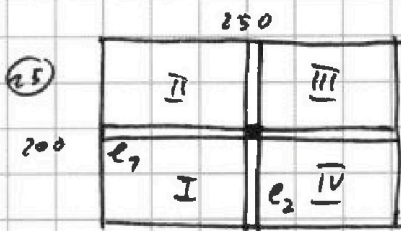


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) посчитаем кол-во монет, лежащих симметрично относительно угловой клетки e₁ (горизонтальной клетки)

~~Аналогично считаем кол-во монет в каждой из~~ в раз-

двух частях по паре. Достаточно выделить 4 клетки из верхнего прямоугольника 700 × 250, а остальные восстановиваются симметрично.

Всего клеток в прямоугольнике 700 × 150: 25000 клеток.

C_{25000}^4 - кол-во вариантов раскладки монет.

2) посчитаем кол-во монет, лежащих симметрично относительно вертикальной ср. линии e₂ в клетках

аналогично, они выделяются по паре, и нам достаточно выделить 4 клетки в прямоугольнике 200 × 125: клеток: 200 × 125 = 25000

Всего монет: ~~C_{35000}^4~~ C_{25000}^4

3) посчитаем кол-во монет, симметричных относительно центра. ~~Выводим сумму~~

~~7.7) Все клетки симметричны в III и I частях модели.~~

~~Значит, что эти случаи никак не учитываются, со стро-~~

~~дали (7) и (2). Но, кол-во случаев выделяется 4 клетки,~~

~~из I (в III они восстановиваются симметрично) равно:~~

~~$C_{77500}^4 = C_{77500}^4$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) посчитаем кол-во клеток, симметричных относительно центра. разобьем доску на 4 области.

700	2 l_1	l_2 7
700	7' 125	2' 125

Зам., что области 7' симметричны по области 7. Аналогично с 2 и 2'.
~~Значит симметрично выделены~~

Выберем какую-то расстановку из способа (1).

Выберем, где ставить выделенные в областях 7' и 2' и

симметричные им относительно l_1 (при этом они

могут не быть там). Очевидно, что мы

получим расстановку, симметричную относительно

центра таблицы. Это аналогично способу (2). Зам., что таким образом мы

получим всевозможные расстановки вида (3).

Заметим, что некоторые расстановки мы посчитали некоего раз, а именно те, которые симметричны относительно l_1 и l_2 .

Их мы посчитали 4 раза. ~~Эт~~ значит надо отнять 3 умноженных на кол-во таких расстановок.

Рассчитаем их количество.

область 7

Заметим, что симметрично выделены 2 клетки в ~~область 7~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и остальные восстанавливаются однозначно.

I: 200 и 775. Значит количество машин составляет: C_{77500}^2

Всего изобретений по этим изобретениям:

$$C_{25000}^4 + C_{23000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2 =$$

$$= 2 \cdot C_{25000}^4 + 2 \cdot C_{23000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2 = 4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2$$

Ответ: ~~$4 \cdot C_{25000}^4$~~ $4 \cdot C_{25000}^4 - 3 \cdot C_{77500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} a-c=7 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=7 \Rightarrow -c=7-a \\ b-c=9 \Rightarrow b+7-a=9 \Rightarrow a=b-8 \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+b-8=560 \\ b^2+b-568=0 \end{cases}$$

$$D_0 = 7 + 4 \cdot 568 = 2273 \quad 47^2 < 2273 < 48^2 \Rightarrow D_0 \text{ не кв} \Rightarrow \Rightarrow \text{нет целых решений.}$$

$$6) \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-7 \end{cases} \Rightarrow a-b=-(p^2-7) \quad \text{аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a-c=-9 \Rightarrow -c=-9-b \\ b-c=-7 \Rightarrow -c=-7-b \\ a+b^2=560 \end{cases} \Rightarrow a-b=-8 \Rightarrow a=b-8$$

$$b^2+b-568=0 \quad \text{аналогично случаю (5) нет целых решений.}$$

Значит найдем все возможные тройки:

(a, b, c)
(37, 23, 32)
(-16, -24, -75)
(37, 23, 22)
(-16, -24, -25)

~~Ответ: (a, b, c)
(37, 23, 32)
(-16, -24, -75)~~

Ответ: (a, b, c):
(37, 23, 32), (37, 23, 22)
(-16, -24, -75), (-16, -24, -25)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ $a > b$

$$\begin{cases} 3 + a - b \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad p \in \mathbb{P}$$

$(a-c)(b-c) = p^2$

1) $\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$
X

~~Решаем, какие варианты~~

2) $\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow a = b \quad ?!$
X

~~или другие~~

3) $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 7 \end{cases} \Rightarrow -c = 7 - b$

Возьмем, какие варианты при делении на 3

квадраты:

x	x ²	если 3 x	x ² ≡ 0
0	0		
1	1		
2	1	если 3 ∤ x	x ² ≡ 1

(МТФ для 3)

$a - b = p^2 - 7$

\Rightarrow если $p \neq 3$, то $p \nmid 3 + p$
и значит $p^2 - 7 \not\equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 3 \nmid a - b \quad X$

$b^2 + b + 8 = 560 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$

$D_b = 2209 = 47^2 \Rightarrow b_1 = 23 \Rightarrow a_1 = 37$

$c_1 = b_1 - 7 = 22$ $b_2 = -24 \Rightarrow a_2 = -16$

$c_2 = b_2 - 7 = -25$

Эти варианты подходят
(37, 23, 22)
(-16, -24, -25) ✓

значит $p = 3$

$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 7 \end{cases} \Rightarrow -c = 7 - b$
 $a + b^2 = 560$

$a = 8 + b$

$\begin{cases} a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b \\ a + b^2 = 560 \Rightarrow 8 - b + b^2 = 560 \end{cases}$

~~и другие варианты~~

~~и другие варианты~~

~~и другие варианты~~

~~и другие варианты~~

~~$b^2 + b - 552 = 0$~~

~~$\begin{cases} b_1 = 23 \\ b_2 = -24 \end{cases}$~~

~~$D_b = 2209 = 47^2 \Rightarrow b_1 = 23$~~



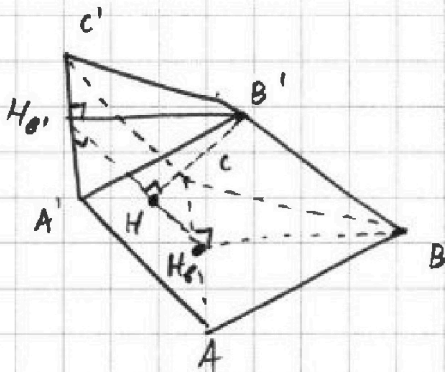
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⊛ Введите обозначения как показано на рисунке.



$$AB = BC = AC = A'B' = A'C' = B'C' = 7$$

по условию.

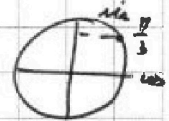
$$\text{Пусть } S_{A'B'B'} = S_{B'B'C'C'} = 4$$

$$S_{A'C'C'} = 3$$

Нр. Опустим высоту $B'H_0$ в $\triangle ABC$.
 β -плоскость $(B'B'H_0)$

Заметим, что призма симметрична относительно этого β . $\Rightarrow S_{A'A'H_0H_0'} = \frac{3}{2}$ ($H_0' = \beta \cap A'C'$)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\text{Пусть } h - \text{высота призмы} \Rightarrow V_{A'B'B'} = V_{A'B'C'} = V_{A'B'C'C'} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Пусть α - высота из точки A' на плоскость $(B'B'C'C')$

В силу симметрии высота из C' на плоскость $(A'A'B'B')$ тоже равна α .

Пусть β - высота из B' на плоскость $(A'A'C'C')$.

$$V^{\text{пр}} - \text{объем призмы } ABCB': V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \alpha \cdot 2$$

$$V = \frac{2}{3} \alpha \quad \text{т.к. } S_{A'B'B'} = \frac{S_{A'B'C'}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$$

$$\text{т.к. } B'H_0' \parallel (ABC) \quad S_{A'H_0'C} = \frac{S_{A'C'C'}}{2} = \frac{3}{2} \quad V_{A'B'C'H_0'} = V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \beta = 2\beta$$

$$2\beta = \frac{2}{3} \alpha \Rightarrow 3\beta = \alpha$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{2}{3} \cdot 3\beta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} h = 2\beta$$

$$h = \frac{24\beta}{\sqrt{3}}$$

Пусть H - основание β в силу симметрии β
высоты. $B'H = \beta$ $H \in H_0H_0'$



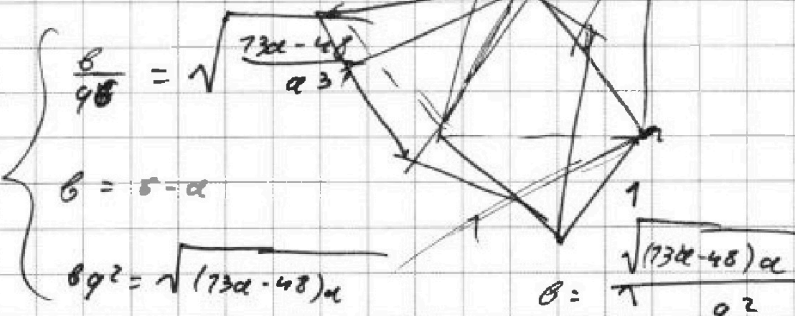
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\theta = 73$
 $\frac{\theta}{9^6} = \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}}$
 $\theta = 6 - \alpha$
 $\theta^2 = \sqrt{(73\alpha - 48)\alpha}$



$x + 1 = \alpha$
 $73x - 35 = 73\alpha - 48$
 $36 - 73\alpha + \alpha^2 = -35$
 $\alpha = 46$

$\theta^2 \cdot 9^4 = \alpha(73\alpha - 48)$
 $\theta = 9^6 \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}}$

$\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3} = \frac{73\alpha - 48 \cdot \alpha}{60 \cdot 9^4}$

$|y + 1 + 3|y - 72|| \leq 73$
 $9 > 72$
 $4y - 35 \leq 73$
 $4y \leq 108$
 $y \leq 27$

$9^{16} = \alpha^4 \Rightarrow \alpha = \pm 9^4$

$7) \alpha = 9^4$
 $\theta^2 \cdot 9^4 = \alpha(73\alpha - 48)$

$\alpha \in \mathbb{O}$
 $-2y + 1 + 36 \leq 73$

$36 - 72\alpha + \alpha^2 = 73\alpha - 48$



$\alpha^2 - 25\alpha + 84 = 0$

$\alpha_1 = 27$
 $\alpha_2 = 7$

$27 \cdot 4 = 108$
 $108 - 54 = 54$



$\theta = 6 - \alpha$

$-4y + 35 \leq 73$

$\theta \geq 0$

$4 - 73 > 48$
 72

$7) \alpha = 9^4$
 $9^4 = -\alpha \Rightarrow \alpha \leq 0$

$\theta = 6 - \alpha$

$\theta^2 \cdot 9^4 = \alpha(73\alpha - 48)$

$-(36 + 72\alpha + \alpha^2) = 73\alpha - 48$

$\theta = 6 + 4 > 0$

$\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$

$\alpha_1 = -4$
 $\alpha_2 = 3$

$9^4 = 4$
 $\alpha = 5 \sqrt[4]{4}$

$-4 = x + 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5$$

$$\begin{array}{r} \alpha - c = 7 \\ \beta - c = p^2 \\ \hline 36 \\ 48 \\ \hline 48 \\ 383 \\ \hline 792 \\ 233 \\ \hline 568 \\ 4 \\ \hline 2272 \end{array}$$

$$7 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 81 = 0 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$t_2 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 = 3 \\ x \in [-3; 4]$$

$$1) -x^2 + x + 12 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 x_2 = -3$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \leq 4$$

$$1 + \sqrt{13} \leq 8$$

$$\sqrt{13} \leq 9 \quad \textcircled{1}$$

$$2) -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$D = 16 + 76 \cdot 39 = 4^2 \cdot 40 = 4^2 \cdot 4 \cdot 10 = 4 \cdot 2 \sqrt{10} = 8\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4 + 8\sqrt{10}}{8} \leq 4$$

$$4 + 8\sqrt{10} \leq 4 \cdot 8$$

$$1 + 2\sqrt{10} \leq 8$$

$$2\sqrt{10} \leq 7$$

$$x_2 = \frac{4 - 8\sqrt{10}}{8} \geq -3$$

$$\frac{4 - 8\sqrt{10}}{2} \geq -3 \cdot 2$$

$$1 - \sqrt{13} \geq -6 \quad \sqrt{13} \leq 7 \quad \textcircled{2}$$

$$7t^2 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$-4 + 3 - 3 + 6 - 6 = -4$$

$$7t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p$$

$$f(t) = 7t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = 3(2t+1)^2$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$7 - 3 + 6 - 3 + 6 = 20$$

$$4t^3 -$$

$$4 \cos^3 x + 3(\cos 2x + \cos x)$$

$$(37-22)(23-22)$$

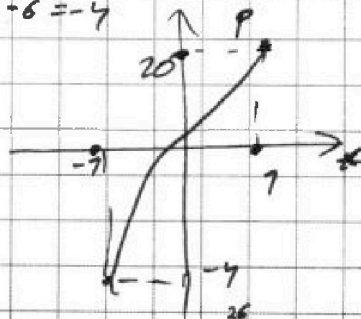
$$(-16+25)(-24+25)$$

$$9$$

$$1$$

$$9$$

$$1$$



$$f(-1) = -4 + 6 + 3 - 3 =$$

$$= -4$$

$$f(1) = 4 - 3 - 3 \cos 0 =$$

$$= 20$$

$$69 \cdot 8 \cdot 8 = 47$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 47 \\ \hline 48 \\ 384 \\ \hline 752 \\ 2304 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \in \mathbb{R}$

$(76+75)(-24+75)$

552
 $\frac{552}{4} = 138$

2208
 $\frac{2208}{4} = 552$

550
 $\frac{550}{4} = 137.5$

2200

$\sqrt{\frac{73x-35}{(x+7)^3}}$

11
 $5-x$
 $\frac{ED}{CD}$

725
 $\frac{725}{25000} = 0.029$
 $\frac{725}{725} = 1$
 $\frac{200}{73000}$

$\frac{6}{9^4}, \frac{6}{9^3}, \frac{6}{9^2}, \frac{6}{9}, 6, 6^2, 6^3, 6^4, 6^5, 6^6, 6^7, 6^8, 6^9, 6^{10}, 6^{11}, 6^{12}$

$9, 70, 77, 72, 73, 74, 75$

$\frac{6}{96} = \sqrt{\frac{73x-35}{(x+7)^3}}$

$73x + 73 \Rightarrow 73 - x = -35$
 $x = 40$

$550 = 5 \cdot 770 \neq 5 \cdot 70 \cdot 77$

$73x - 35 = 73x - 48$
 $x = 40$
 $-x = -1 - x$
 $6 - x = 5 - x$

$6 = 6 - x$

$\frac{6}{96} = \sqrt{\frac{73x-48}{x^3}}$

$6^2 = 4 \cdot \frac{x(73x-48)}{9^4}$

$6^2 = 9 \cdot \frac{73x-48}{x^3}$

$9^4 \cdot 11$

$9^{16} = x^4$
 $x = \pm 9^4$

$|y+7| + 3|y-72| = \sqrt{76y-22} \leq 73$

$|z| \leq 73$
 $HYD \quad 0 > B$
 $x-c = p^2$
 $x-c = 7$

$y \geq 72$
 $y+7+3y-36 \leq 73$
 $4y+7 \leq 49$
 $4y \leq 42$
 $y \leq 10.5 \Rightarrow y = 12$

$a \neq b$
 3
 $(a-c)(b-c) = p^2$

$-754 \leq 72$
 $\alpha - c = p$
 $\beta - c = p$

$y+7-3y+36 \leq 73$
 $-2y+37-73 \leq 0$
 $-2y \leq -37+73$
 $-2y \leq 36$
 $2y \geq -36$
 $y \geq -18$

$84 | 4$
 $8 | 27$
 x_7

$7 \cdot 72$
 48
 $\frac{36}{84}$
 84

$x_1 x_2 = 76$
 $x_1 x_2 = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$(x+3)(4-x) = -x^2 + 4x - 3x + 12$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

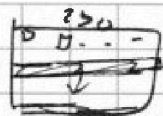
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$27-3 \\ x \leq 4$$

$$\alpha - \theta + 5 = 2\alpha\theta \leq 2 \cdot 7 = 14$$

$$\alpha + \theta \leq 9$$



$$\sqrt{x+3} \leq \sqrt{7}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 \leq \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \leq 2x$$

$$\sqrt{4-x} \leq \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

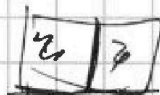
$$\alpha^2 - 2\alpha\theta + \theta^2 = 25 - 20\alpha\theta + 4\alpha^2\theta^2$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} \geq 7 \Leftrightarrow \alpha\theta$$

$$\sqrt{x+3} \leq 9$$

$$x+3 \leq 81$$

$$x \leq 78$$



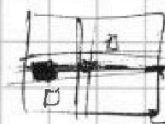
$$DB = t$$

$$\sqrt{x+3} + 5 \leq \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2$$

$$x+3 \leq 4$$

$$x \leq 1$$



$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \gamma}$$

$$\alpha - \theta + 5 \leq \alpha^2 + \theta^2$$

$$\frac{t}{8} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\alpha^2 - \alpha + \theta^2 + \theta - 5 \geq 0$$

$$\frac{DB}{DE} = \frac{4}{\sqrt{73xy}} = Da \geq 0$$

$$7 - 4\theta^2 - 4\theta + 20 \geq 0$$

$$= \sqrt{\frac{4}{73x}}$$

$$4\theta^2 + 4\theta - 27 \leq 0$$



$$-\frac{2}{3} + \frac{x-3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$$

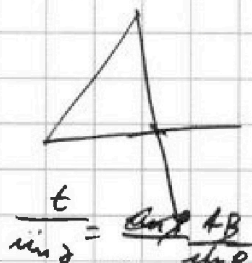
$$= -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} = -\frac{x}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

$$x_1 =$$

$$D = 7 + 4 \cdot 3 = 25$$



$$\cos x = t$$

$$\cos 2x = 2t^2 - 1$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

9

$$\frac{t}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2x + AB}{\sin \beta}$$

$$t(2t^2 - 1) - 2(1-t^2)t =$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}$$

$$\sin^2 x = 1 - t^2$$

3-p

$$\text{tg } \alpha = t'$$

$$2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$-24 - 4$$

$$\frac{98}{39}$$

$$D = 76 + 76 \cdot 39 =$$

$$= 76(40) = 4^2 \cdot 8 \cdot 5 =$$

$$= 4^2 \cdot 4 \cdot 70$$

$$\sqrt{D} = 4 \cdot 2 \sqrt{70} = 8\sqrt{70}$$

$$x_1 =$$

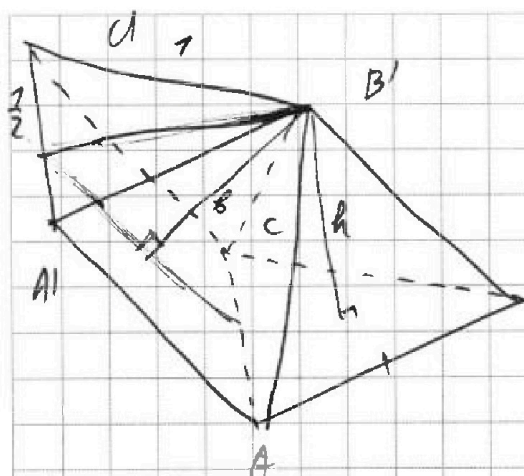


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

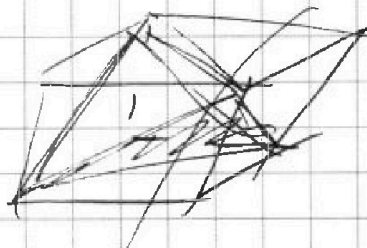
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



B

$$V = \frac{1}{3} A \cdot S$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.7)

β - 73й этаж

q - высота

$q \neq 0$

$\frac{\beta}{q^6}$ - 7й этаж

Хочу $x + 7 = \alpha$

βq^2 - 75й этаж

$$73x - 35 = 73\alpha - 48$$

$$5 - x = 6 - \alpha$$

По условию:

$$\begin{cases} \beta = 6 - \alpha & (1) \\ \frac{\beta}{q^6} = \sqrt{\frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}} & (2) \\ \beta q^2 = \sqrt{\alpha(73\alpha - 48)} & (3) \end{cases}$$

$$(3): \beta^2 = \frac{\alpha(73\alpha - 48)}{q^4}$$

$$(2): \beta^2 = q^{12} \cdot \frac{73\alpha - 48}{\alpha^3}$$

$$q^{16} = \frac{(73\alpha - 48)}{(73\alpha - 48)} \cdot \alpha^4$$

$$7) \alpha = q^4 \begin{cases} \beta = 6 - \alpha & (1) \\ \beta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48) & (4) \end{cases}$$

$$q^{16} = \alpha^4 \Rightarrow \alpha = \pm q^4$$

$$(4): \beta^2 q^4 = q^4(73q^4 - 48)$$

$$(6 - q^4)^2 = 6 \cdot 73q^4 - 48$$

$$(1) \beta = 6 - \alpha = 6 - q^4$$

$$(6 - \alpha)^2 = 73\alpha - 48$$

$$36 - 12\alpha + \alpha^2 = 73\alpha - 48$$

$$\alpha^2 - 25\alpha + 84 = 0$$

по т. Виетта: $\alpha_1 = 4$

$\alpha_2 = 27$

~~$4 = 2 + 2$~~

~~$27 = 20 + 7 = 2x + 7$~~

~~$\beta = 6 - \alpha$
 $\beta^2 q^4 = \alpha(73\alpha - 48)$~~

~~Проверим 3 возможных варианта.~~

~~1. $\alpha_1 = 4$ $4 \cdot (73 \cdot 4 - 48) = 70 \cdot 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 = x + 7$ $x = 3$~~

~~2. $\alpha_2 = 27$ $27 \cdot (73 \cdot 27 - 48) = 70 \cdot 27 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 27 = x + 7 \Rightarrow x = 20$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AC}{EA} = \frac{3}{70}$$

$$\angle ECA = \varphi \cdot \angle BDA = \angle BFA = \varphi'$$

Т. треугол. $\triangle ACE$: $\frac{AC}{\sin \varphi'} = \frac{AE}{\sin \varphi}$ $\frac{AC}{EA} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{3}{70}$

Т. треугол. $\triangle CBA$: $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{CB}{\sin \angle C}$ (1)

Т. треугол. $\triangle ABD$: $\frac{AB}{\sin \varphi'} = \frac{BD}{\sin \angle D}$ (2)

(1) / (2): $\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{\sin \angle D}{\sin \angle C} \cdot \frac{CB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{BD}{BC} = t, t = ?$

$t = \frac{\sin \angle D}{\sin \varphi} \Rightarrow \frac{\sin \angle D}{\sin \varphi} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}$

$t^2 = \left(\frac{3}{70}\right)^{-2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{70}{3}}$

$t = \frac{ED}{DC} = \left(\sqrt{\frac{3}{70}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{70}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{70}{3}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{70}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
2
3
4
5
6
7
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \begin{cases} a-c = -7 \\ b-c = -9 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{указано условие } a > b \\ \text{стало бы } a < b \end{array} \right)$$

$$a-b = +7+p^2 \quad \text{случаю (3) получили } p=3$$

$$\begin{cases} a-c = -7 \Rightarrow c = a+7 \\ b-c = -9 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a-7 = -9 \Rightarrow a = b+8 \\ a+b^2 = 560 \Rightarrow b+8+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$D = 7^2 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2 \quad b_1 = \frac{-7+47}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$b_2 = \frac{-7-47}{2} = \frac{-54}{2} = -27$$

$$1) b_1 = 20 \Rightarrow a = 28 \Rightarrow c = 35$$

$$a-b = 28-20 = 8 \cdot 3 \quad \text{D}$$

$$28^2 + 20^2 = 560 \quad \text{D}$$

227

$$2) b_2 = -27 \Rightarrow a = -19 \Rightarrow c = -8$$

$$-19 - (-27) = 8 \cdot 3 \quad \text{D}$$

$$-19^2 + (-27)^2 = 560 \quad \text{D}$$

~~Ответ: 1) $a = -19$ $b = -27$ $c = -8$
2) $a = 28$ $b = 20$ $c = 35$~~