



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ① [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

- ② [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ⑥ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7. Пусть b - первый член прогрессии, q

q - ее знаменатель. Тогда, согласно условию:

$$bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad bq^{12} = 5-x, \quad bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Заметим, что $bq \neq 0$, т.к. иначе

$$bq^6 = 0 \Rightarrow 13x-35=0, \text{ однако } bq^{12} = 0 \Rightarrow 5-x=0,$$

но $13x-35 \neq 0$ и $5-x=0$ не могут ~~быть~~ быть
равны 0 одновременно.

Поэтому $\frac{bq^{14}}{bq^6} = q^8 = \frac{\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|13x-35|}} \cdot \sqrt{|x+1|^3} =$

$$= \sqrt{|x+1|^4} = |x+1|^2 = (x+1)^2, \quad q^8 = (x+1)^2.$$

$$bq^6 \cdot bq^{14} = b^2 \cdot q^{20} = \sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{|x+1|^3}} = |13x-35| \cdot \sqrt{\frac{1}{|x+1|^2}} = \left| \frac{13x-35}{x+1} \right|.$$

~~но $bq^{20} > 0$ и $bq^{20} =$ но $(13x-35)/(x+1) > 0$,~~

т.к. $(13x-35)(x+1)$ - имеет корень

bq^6 . Тогда имеем: $b^2 q^{20} = \frac{13x-35}{x+1}$

Заметим, что $b > 0$, т.к. $q^6 > 0$ и $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} > 0$

а $bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$. Откуда имеем:

$$bq^{10} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 = \frac{6q^{12}}{6q^{10}} = \frac{(5-x) \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{13x-35}} \cdot q^2 = \frac{(5-x) \sqrt{x+1}}{\sqrt{13x-35}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^8 = \frac{(5-x)^4 (x+1)^2}{(13x-35)^2}$$

$$\text{Следовательно: } (x+1)^2 = q^8 = \frac{(5-x)^4 (x+1)^2}{(13x-35)^2}$$

Из условия $x+1 \neq 0$, т.к. мы как минимум,

поэтому можно на него сократить:

$$1 = \frac{(5-x)^4}{(13x-35)^2} \Leftrightarrow (13x-35)^2 = (5-x)^4 = (x-5)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x-5)^2 - 13x + 35)((x-5)^2 + 13x - 35) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{или } (x-5)^2 - 13x + 35 = 0 \text{ или } (x-5)^2 + 13x - 35 = 0.$$

$$(x-5)^2 - 13x + 35 = x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 240}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{23 \pm 17}{2} = 20 \text{ или } 3.$$

$$(x-5)^2 + 13x - 35 = x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5 \text{ или } 2.$$

Следовательно имеем $x = -5, 2, 3, 20$.

$x = 20$ не подходит, т.к. $5-x = -15 < 0$, но

$$5-x = 6q^{12} > 0$$

$x = 2$ не подходит, т.к. $13x-35 = 26-35 < 0$,

но $(13x-35)(x+1) \geq 0$ — ~~$(13x-35)(x+1)$~~ т.к.

одно слагаемое не равно нулю.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Остаются: $x = -5$ или $x = 3$, которые как уже
удовлетворяют всем необходимым условиям.

Ответ: $x \in \{-5; 3\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. Обозначим $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$.

Есть 3 различных сегмента \in промежутку \in возможных в $f(y)$:

1) $y+1 \geq 0, y-12 \geq 0 \Rightarrow f(y) = 4y - 35$

2) $y+1 \geq 0, y-12 \leq 0 \Rightarrow f(y) = -2y + 37$

3) $y+1 \leq 0, y-12 \leq 0 \Rightarrow f(y) = -4y + 35$

(случай $y+1 \leq 0, y-12 \geq 0$ очевидно невозможен)

Во 2-ом и 3-ем случаях получаются линейная убывающая функция, а значит их \in минимумы достигаются \in в крайних правых точках: во 2-ом случае $\min f(y) =$

~~$f(12) = 13$~~ $f(12) = 13$. В 3-ем случае $\min f(y) =$

$f(12) = 13$. В 1-ом случае имеем линейно возрастающую функцию, а значит ее минимум достигается в крайней левой точке: $\min f(y) = f(12) = 13$.

Заметим, что $\forall y f(y) \geq 13$, а ~~$f(12) = 13$~~ равенство достигается только при $y = 12$.

Заметим также, что $\forall z \sqrt{169 - 2^2} \leq \leq \sqrt{169} = 13$, а равенство достигается только

На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $z=0$. Всего имеем:

$$\sqrt{169-z^2} \leq 13 \leq f(y), \text{ а левенство}$$

возможное лишь при $z=0, y=12$, значит

y всегда равняется 12, а $z=0$.

Подставим эти значения y и z в равенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$. Осмысленно
лишь решить данное уравнение относи-
тельно x .

Пусть $x+3 = a \geq 0$, а $4-x = b \geq 0$.

Заметим, что $12+x-x^2 = ab$,

$a+b=7$. Исходное равенство примет вид:

$$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} + 5 = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (2\sqrt{ab} - 5)^2 \Leftrightarrow a+b - 2\sqrt{ab} =$$

$$= 4ab + 25 - 20\sqrt{ab} \Leftrightarrow 4ab - 18\sqrt{ab} + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2ab - 9\sqrt{ab} + 9 = 0$. — квадратное уравн.

относительно \sqrt{ab} . $\sqrt{ab} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} =$

$$= 3 \text{ или } \frac{3}{2}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{ab} = 3 \quad \text{или} \quad \sqrt{ab} = \frac{3}{2}$$

$$ab = 9 \quad \text{или} \quad 4ab = 9.$$

$$\downarrow$$
$$(x+3)(4-x) = 9$$

$$12 + x - x^2 = 9$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$4(x+3)(4-x) = 9$$

$$48 + 4x - 4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 39}}{8} =$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot 40}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

Ответ: $y = 12, z = 0$, ~~$x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} \right\}$~~

$$x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№9.

Обозначим,
 $\angle CAB = \alpha$,
 $\angle BAD = \beta$.

Итого, т.к.

CD-кае., имеем $\angle BCD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.

$\angle EBD = \angle DEB + \angle BDC = \alpha + \beta$ (сумм. гоня $\angle CPD$).

из вписанности: $\angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$.

Получаем, $\angle CAP = \angle PAE \Rightarrow AP$ -бисс. в $\triangle CAE \Rightarrow$

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CP}{PE} = \frac{3}{10}. \quad \text{Обозначим } \angle ADC = \gamma,$$

$$\angle ADE = \delta.$$

по т. синусов гоня $\triangle ADC$: ~~$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$~~ $\frac{AC}{CD} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$

гоня $\triangle AED$: $\frac{DE}{AE} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \delta}$.

Приведем полученные равенства:

$$\frac{AC \cdot DE}{AE \cdot CD} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \delta \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \delta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть радиусы $w_1 = R$, а $w_2 = r$, O_1 - центр w_1 , O_2 - центр w_2 . Пусть x - радиус окружности (ACD) . Показано, что $x = \sqrt{R \cdot r}$.
~~... $\angle O_1 A O_2 = 2\alpha + 2\beta$ как угловый центр, окружность.~~
Лемма: $x = \sqrt{R \cdot r}$. Док-во будет позже.

Заметим, что при повороте w_2 вокруг центра A на угол $2\alpha + 2\beta$ в w_1 (коэф. поворота = $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$).

Действительно, т.к. C, B, E - коллинеарны, то $E \rightarrow C$ (известный факт). ~~...~~

~~...~~ $\angle O_1 A O_2 = 2\alpha + 2\beta$, т.к. $\angle O_1 A C = \angle O_2 A E$,

т.к. $\angle C O_1 A = \angle A O_2 E$, т.к. равны дуги ~~...~~ w_1 и w_2 CA и AE , т.е. C, B, E - одна прямая. Показано $A O_2 \rightarrow A O_1$ (самый важный).

Но т.к. $AE \rightarrow AC$, то а центр окружности w_2 переместится на середину AC , получаем, что $O_2 \rightarrow O_1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Значит, } \frac{r}{R} = \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AC} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{3}$$

То есть:

$$\frac{AC}{\sin \delta} = \frac{AC}{\sin \delta} = 2\sqrt{Rr}$$

$$\frac{AE}{AC} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \delta} = \frac{1}{2\sqrt{Rr}} \cdot \frac{AE}{\sin \delta} = \frac{1}{2\sqrt{Rr}} \cdot 2r = \frac{r}{\sqrt{Rr}} = \sqrt{\frac{r}{R}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{DE}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Лемма доказывается применением:

синусов в $\triangle ACD$ и использованием того, что $\angle ACD = \angle ADE$ дуга CD

$$\frac{AE}{\sin \delta} = 2R = \frac{AC}{\sin \angle ACD}$$

$$2r = \frac{AD}{\sin \angle ADC}$$

$$4Rr = \frac{AC \cdot AD}{\sin \angle ACD \cdot \sin \angle ADC}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. $a > b$. $a - b \nmid 3$. $(a-c)(b-c) = p^2 - p + \text{крешное}$
 $\Rightarrow a + b^2 = 560$

Ищем p -крешное и $(a-c)(b-c) = p^2$

Поскольку $a-c > b-c$ получаем $\frac{2}{3}$ случая

1) $a-c = p^2$
 $b-c = 1$

2) $a-c = -1$ ~~3) $a-c =$~~
 ~~$a = b$~~
 $b-c = -p^2$

В обоих случаях $|(a-c) - (b-c)| = |a-b| = |p^2 - 1| =$
 $= |(p-1)(p+1)|$

Заметим, что среди чисел $p-1, p, p+1$

всегда есть число $\div 3$. $a-b \div 3$ ($p-1, p+1 \equiv$)

$\Rightarrow p-1 \nmid 3, p+1 \nmid 3 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p=3$ т.к. p -крешное.

Поэтому в первом случае имеем:

1) $a-c = 9 \Rightarrow a-b = 8$ $a+b^2 = 560$
 $b-c = 1$

~~$a+b^2 - (a-b) = 560 - 8 = 552$~~

~~$b^2 = 552$, откуда $b \in \mathbb{N}$~~

~~т.е. Выходит находим $b=24$ или $b=23$.~~

~~$b=24 \Rightarrow c=23 \Rightarrow a=32$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{b = -23 \Rightarrow c = -24 \Rightarrow a = -15.}$$

~~Имеем 2 тройки не удовлетворяющих условию:~~

$$\cancel{(a, b, c) = (32, 24, 23), (215, -23, -24)}$$

$$b^2 + b = 552, \text{ решаем по т. Виета находим}$$

$$b = 23 \text{ или } b = -24.$$

$$b = 23 \Rightarrow c = 22 \Rightarrow a = 31.$$

$$b = -24 \Rightarrow c = -25 \Rightarrow a = -16$$

Имеем 2 удовлетворяющих тройки $(a, b, c) = (31, 23, 22)$

$$(-16, -24, -25)$$

$$2) \quad p = 3 \quad \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \end{cases} \Rightarrow a - b = 8$$

$$a - b = 8$$

$$a + b^2 = 560. \text{ Аналогично 1-ому случаю}$$

$$b = -24 \text{ или } b = +23$$

$$b = -24 \Rightarrow c = -15 \Rightarrow a = -16.$$

$$b = 23 \Rightarrow c = 32 \Rightarrow a = 31.$$

Итого, ответ: $(a, b, c) = (31, 23, 22), (-16, -24, -25)$

$$(-16, -24, -15), (31, 23, 32).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$f'(x) = -3 \sin 3x - 6 \sin 2x - 6 \sin x$$

$$-f'(x) = 3 \sin 3x + 6 \sin 2x + 6 \sin x =$$

$$= 3 \sin 3x + 3 \sin x + 6 \sin 2x + 3 \sin x$$

$$6q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$6q^{20} = |13x-35| \cdot \frac{1}{|x+1|} =$$

$$6q^{12} = 5-x$$

$$= \frac{13x-35}{x+1}$$

$$6q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^8 = \frac{6q^{14}}{6q^6} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^2$$

$$6q^{10} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$

$$6q^{12} = 5-x$$

$$q^2 = 5-x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{13x-35}}$$

$$q^{48} = (5-x)^4 \cdot \frac{(x+1)^2}{(13x-35)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-5)^4 \cdot (x+1)^2}{(13x-35)^2} = (x+1)^2$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 460 \\ \hline 529 \\ 240 \\ \hline 289 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 \\ x = -5 \end{array}$$

$$-5, 3.$$

$$q^8 =$$

$$q^4 = x+1$$

$$q = \sqrt[4]{x+1}$$

$$x \neq -1$$

$$(x-5)^4 =$$

$$23^2 - 240 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b \neq 3 \quad (a-b)(b-c) = p^2 \quad a+b^2 = 560$$

$$a-b \neq b-c$$

$$a-c > b-c$$

$$a-c = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$\text{или } a-c = -1$$

$$b-c = -p^2$$

$$b^2 - b = 552$$

$$b(b-1) = 552$$

$$b = 24$$

$$b = -23$$

$$b(b+1)$$

$$23 \cdot 24 (a-c) - (b-c) = a-b = (p-1)(p+1)$$

$$b = -24$$

$$p = 3$$

$$(a-c)(b-c) : p^2$$

$$a-c = 9$$

$$b-c = 1$$

$$a-b = 8$$

$$a+b \geq 560$$

$$a-24 =$$

$$= 1$$

$$b^2 - b = 552$$

$$a+b \geq 560$$

$$a-b = 8$$

$$ab - b^2 \geq 8b$$

$$a+ab = 560+8b$$

$$a(b+1) - 8(b+1) = 560-8$$

$$(a-8)(b+1) = 552 = 8 \cdot 3 \cdot 23$$

$$b+1 : 23$$

$$b \geq$$

$$a-b = 8$$

$$a+b^2 = 560$$

$$b^2 + b$$

$$24^2 =$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline + 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \\ b^2 = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 23 \\ \hline + 48 \\ \hline 552 \end{array}$$

$$a-c = p$$

$$b-c = -p$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ \hline + 69 \\ \hline + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 8 \\ \hline 70 \cdot 8 = 560 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{16y-z^2}$$

$$x \geq -3 \quad x+z \leq 4 \quad x+y+z \geq x^2$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

$$(|y+1| + |2(12-y)| + 2|y-12| = \sqrt{16y-z^2})$$

$$y+1+3y-36 \leq 4y+37$$

$$x+y \leq 4$$

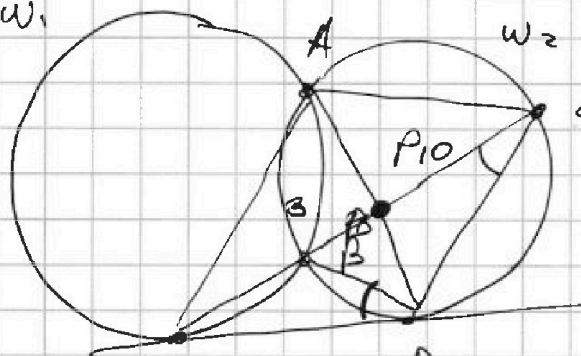
$$z-3 \leq x+z \leq 4$$

$$x \geq -3$$

$$z-3 \leq 4$$

$$z \leq 7$$

$$z^2 \leq 49$$



$$\frac{ED}{CD}$$

$$4.3.10$$

$$\sqrt{16y-z^2} \leq \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

$\triangle CED \sim \triangle P_1 P_2$

$\triangle CDB \sim \triangle CED$

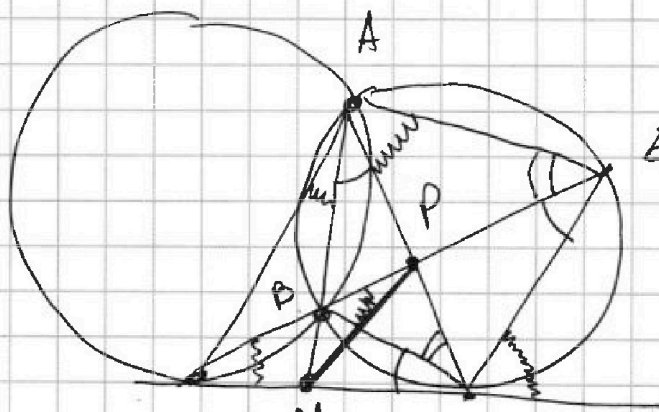
$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$x+y+z \geq 10$$

$$4+y \geq 0$$

$$y \geq -4$$

$$4y+37 \geq 21$$



$$y+1-3y+36 \leq 4y+37$$

$$4.30$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$q^8 = \frac{\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$bq^{12} = 5-x$$

$$= (x+1)^2$$

$$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a > b$$

$$a-b \neq 3$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = -p \end{cases}$$

$$a+b = 560$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = -p \end{cases}$$

$$bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b = \frac{13x-35}{(x+1)^3(5-x)}$$

$$\frac{a+b}{2} = c$$

$$bq^{12} = 5-x$$

$$a-b = 2p \quad p \neq 3$$

$$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{bq^{14}}{bq^6} = \frac{\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{|13x-35|}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\begin{array}{l} x+1 < 0 \\ 43 < 35 \\ x < \frac{35}{13} \\ 5-x > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ 13x-35 > 0 \\ 5-x \end{array}$$

$$bq^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}$$

$$bq^{20} = |13x-35| \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} = \left| \frac{13x-35}{x+1} \right| =$$

$$bq^{12} = \frac{13x-35}{5-x} = bq^8 = \frac{13x-35}{(x+1)(5-x)} = \frac{13x-35}{x+1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

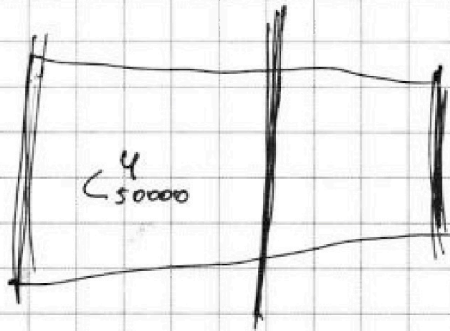


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$200 \cdot 250 = 250000 \approx 5$$



$$\cos \alpha + \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{x + y}{2} = \alpha$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 3 \cdot \cos 2x + 5 \cos x = P$$

$$3 \cos 2x + 2 \cos 2x \cdot \cos x + 5 \cos x = P$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \cos x = t$$

$$6t^2 - 3 + 2(2t^2 - 1) \cdot t + 5t =$$

$$= 6t^2 - 3 + 4t^3 - 2t + 5t = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$3u + 2w + 5v \quad 2t^2(2t + 3) + 3t - 3 =$$

$$= \frac{2}{3} (3t^3 + 6t^2 + 3t - 3) + 2$$

$$x \cdot 3 = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

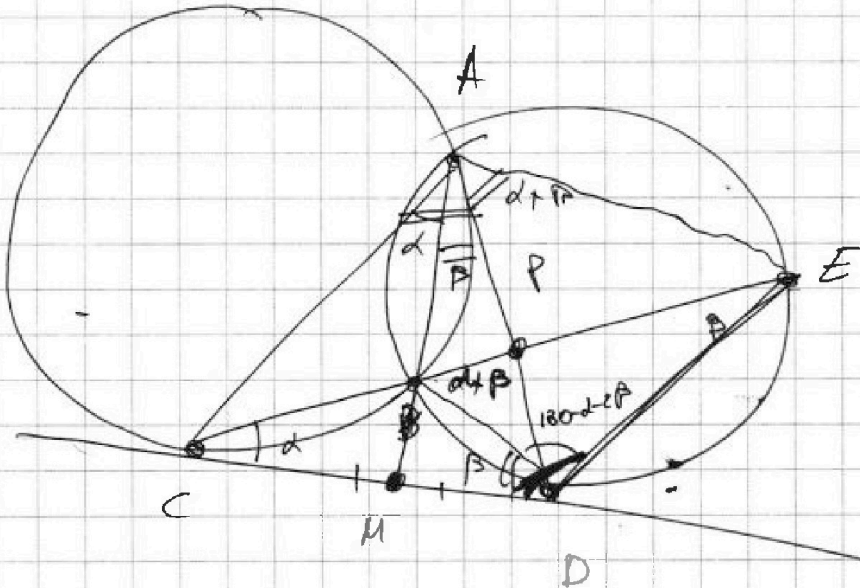
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$48-9=39$$

$$y+1-3y \times 36 = -2y+37$$



$\triangle CDB \sim \triangle CED$

$$\frac{ED}{DB} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{DB}{CE}$$

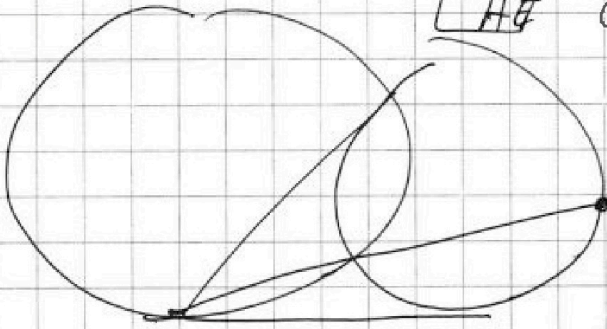
$$\frac{CD}{PE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{ED}{CD}$$

$$\frac{AC}{HE}$$

$$\frac{DB}{CE}$$

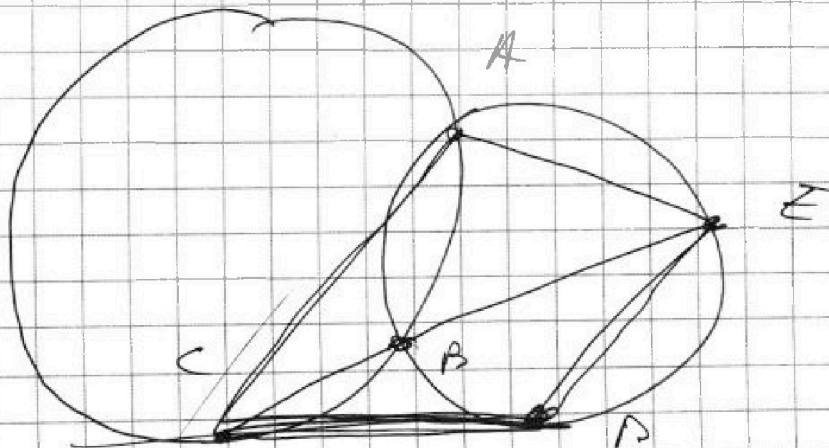
$$CD^2 = CB \cdot CE$$



$$\frac{ED}{CD} = f\left(\frac{AC}{AE}\right)$$

$$\frac{AC}{CE}$$

$$\frac{DE}{CD}$$



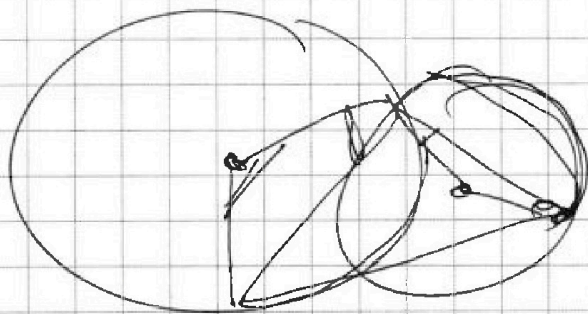


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

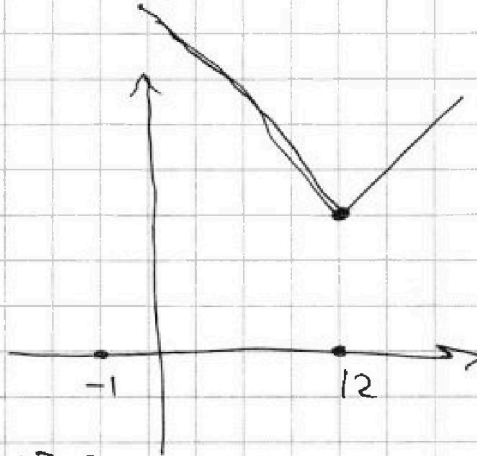
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{x+y+2-x^2}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{109-2^2}$$



1) $y+1 \geq 0$ $y \geq 12$
 $y-12 \geq 0$

$$y+1 + 3y-36 =$$

$$= 4y-35$$

$$y=12$$

2) $y+1 \geq 0$
 $y-12 \leq 0$
 $-1 \leq y \leq 12$

$$y+1 - 3y+36 =$$

$$= -2y+37$$

$$-2y \quad 35$$

1) $y+1 \geq 0$
 $y-12 \geq 0$

$$f(y) = 4y - 35$$

$$f(y) \geq 13$$

2) $y+1 \leq 0$
 $y-12 \geq 0$

$$f(y) = -2y$$

3) $y+1 \leq 0$
 $y-12 \leq 0$

$$y \leq -1$$

$$-y-1 - 3y+36 =$$

$$= -4y+35$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2+4} (2\sqrt{x+3}+1) \leq 5$$

~~$$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = 2\sqrt{ab} - 5$$~~

$$a+b - 2\sqrt{ab} = 4ab + 25 -$$

$\frac{4}{7}$

$$81 - 72 = 9$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

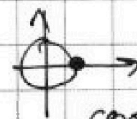
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 36}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$1 + 3 + 6$$

$$3x =$$

$$-10 \leq p \leq 10$$



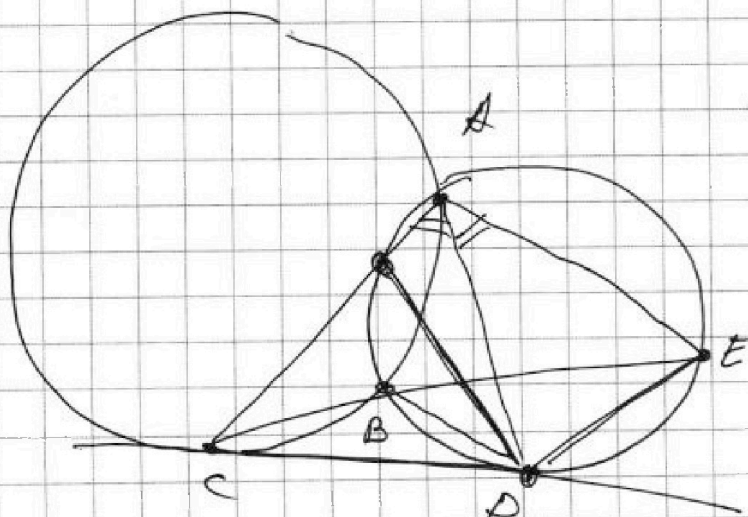
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \\ &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$2xy + 3x + 5y = p$$

~~$$x = 2y^2 - 1$$~~



$$\begin{aligned} \frac{AC}{AE} &= \frac{3}{10} \\ \frac{ED}{CD} &=? \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R \cdot r$
 $\frac{AE}{\sin \beta} = 2r$

$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$

$\frac{AC \sin \alpha}{AE} = \frac{ED}{CD}$

$PD^2 = PE \cdot PA$

$\frac{AC}{AP} = \frac{CD}{DP}$

$\frac{AE}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin \delta}$

$\frac{AD}{AE} ?$

$PC^2 =$

$\frac{DE}{AD} = \frac{DP}{AP}$

$\frac{AC}{AP} = \frac{CD}{DP}$

$\frac{DE \cdot AC}{AD \cdot AP} = \frac{DP \cdot CD}{AP \cdot DP}$

$DE \cdot AC = AD \cdot CD$

$\frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC}$

$PD^2 = PE \cdot (PE + AE)$

$\frac{AE}{DE} = \frac{\sin \delta}{\sin(\alpha + \beta)}$

$\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{DE}$

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

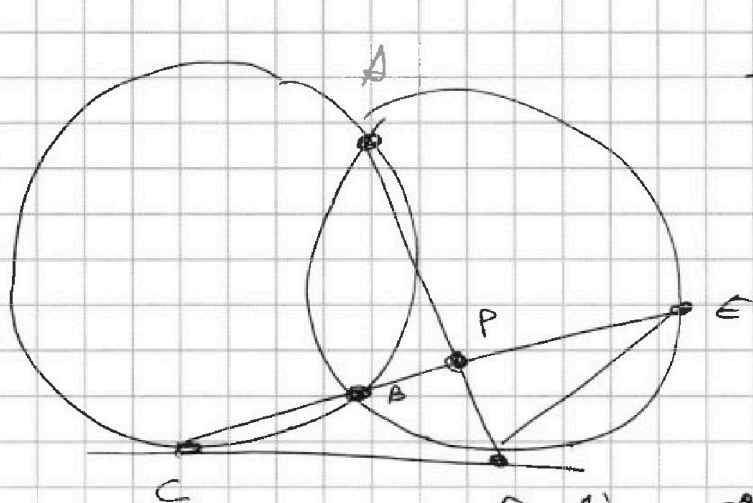


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

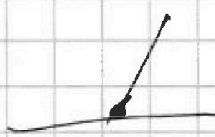
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



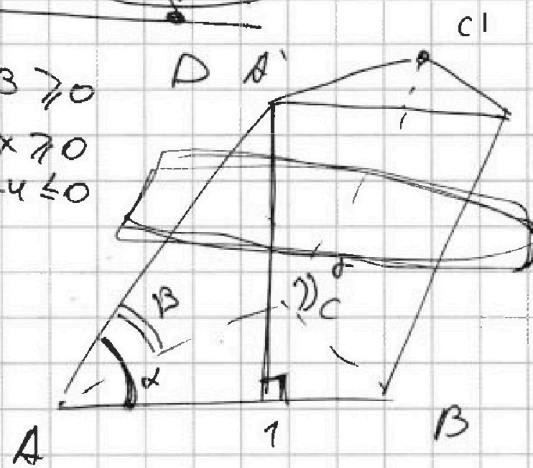
$$\frac{CP}{PE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{EP}{CD}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\begin{aligned} x+3 &\geq 0 \\ 4-x &\geq 0 \\ x-4 &\leq 0 \end{aligned}$$



$$S_{ABC} \cdot h = S_{A'B'C'}$$

$$\sqrt{a^2}$$

$$x^2 - x + 12$$

$$(x+3)(x-4) \quad S_{AA'B'B} = 4 = S_{AA'C'C}$$

$$S_{BCC'B'} = 3$$

$$A = AB \cdot AA' \cdot \sin \alpha = 4$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab} \quad AA' \cdot \sin \alpha = 4$$

$$\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \beta$$

$$\sqrt{a} - 2\sqrt{ab}$$

$$AA' \cdot \sin \beta = 4$$

$$CC' \cdot \sin \beta = 3$$

$$(a+b+c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc$$

$$(y+1)^2 + 9(y-12)^2 + 6|y+1| \cdot |y-12| = 169 - z^2$$

a

$$2\sqrt{(4-x)(x+3)} + \sqrt{4-x} = \sqrt{4-x}(2\sqrt{x+3} + 1)$$