



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть a_1, a_2, a_3, \dots - это геометрическая прогрессия
 q -гачное жиб геометрической прогрессии.

Из условия геометрической прогрессии $a_1, a_2, \dots \neq 0$

По условию задачи:

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} ; a_{12} = 2-x ; a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~По св-ву геометрической прогр.~~

$$1) \begin{cases} (25x+34)(3x+2) > 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} > 0 \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$\text{Но } a_{12} = a_{10} \cdot q^2 > 0, \text{ тк. } q^2 > 0, a_{10} > 0$$

$$\Rightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Значит } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$$

2) По св-ву геометрической прогрессии:

$$a_{14} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{18}} = \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}} = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}}$$

$$a_{12} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{14}} = \sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2) \cdot (25x+34)}{3x+2}} = \sqrt{(25x+34)^2}$$

$$2-x = \sqrt{(25x+34)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(x^2-4x+4)^2 - (25x+34)^2 = 0$$

$$(x^2-29x-30)(x^2+21x+38) = 0$$

$$(x-30)(x+1)(x+2)(x+19) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \{-19; -2; -1; 30\}$$

$$3) \begin{cases} x \in \{-19; -2; -1; 30\} \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2) \end{cases} \Rightarrow x \in \{-19; -2\}$$

Ответ: $x \in \{-19; -2\}$

$$4) x = -19 \Rightarrow a_{12} = 2+19 = 31, a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-19) + 34)(3 \cdot (-19) + 2)} = \\ = \sqrt{(34-475) \cdot (2-57)} = \sqrt{441 \cdot 55} = 21\sqrt{55} \neq a_{12} - \text{не подходит}$$

$$5) x = -2 \Rightarrow a_{12} = 2+2 = 4, a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-2) + 34)(3 \cdot (-2) + 2)} = \\ = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \neq a_{12} - \text{не подходит}$$

Ответ: $x \in \{-19; -2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cdot (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 \cdot (2 \cos^2 x - 1) + (3p+12) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad | :4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1) = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$1) \quad p \cos x = 0 \quad ; \quad (p-1) \cdot 0^3 + (0+1)^3 = 1 = 1 \neq 0$$

\Rightarrow не решение при любом p .

$$2) \quad \cos x \neq 0 :$$

$$p-1 = -\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \Leftrightarrow p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

~~$$\cos x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$$~~

$$\cos x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$$

$$\Rightarrow -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Значит } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty) :$$

$$p - 1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1 - p$$

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1 - p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1 - p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1}$$

$$\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Для } \forall p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



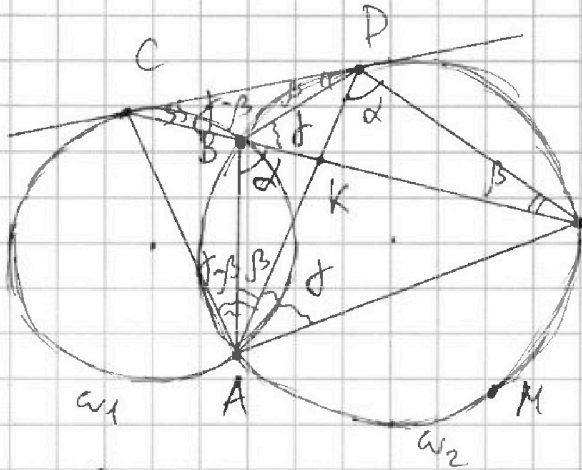
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



1) Пусть $\angle ADE = \alpha$,

тогда $\angle ABE = \angle ADE = \alpha$

E как вписанное, опирающееся на дугу $\cup AME$.

~~как вписанное~~

$\angle BAD = \beta$. Значит

$\angle BED = \beta = \angle BAD = \frac{\cup BD}{2}$

(как вписанное, опирающееся на дугу $\cup BD$), $\angle BDC = \beta = \frac{\cup BD}{2}$
(как угол между касательной и хордой)

Пусть также $\angle DBE = \gamma$. Аналогично

$\angle DAE = \angle DRE = \gamma$ (как вписанное, опирающееся на $\cup DE$)

2) $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle BDC = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - \beta = \gamma - \beta$
(из $\triangle CBD$)

Но DC - касательная к $\omega_1 \Rightarrow \angle CDB = 2\angle DCB = 2(\gamma - \beta)$

$\Rightarrow \angle CAB = \frac{\angle CDB}{2} = \gamma - \beta$ как вписанный

$CE \cap AD = K$

$\angle CAK = \angle CAB + \angle BAK = \gamma - \beta + \beta = \gamma = \angle KAE$

$\Rightarrow AK$ - биссектриса $\angle CAE$ в $\triangle CAE$

$\Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$ по св-ву биссектрисы

3) $\angle ACB = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (\gamma - \beta) = \alpha - \gamma + \beta$ (из $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \alpha - \gamma + \beta + \gamma - \beta = \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE = \alpha \\ \angle CAD = \angle DAE = \beta \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \quad (\text{по 2 углам})$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \quad \rightarrow AE \cdot AC = AD^2$$

$$\begin{cases} \frac{AE}{AC} = \frac{20}{7} \\ AE \cdot AC = AD^2 \end{cases} \Rightarrow AE^2 = \frac{20}{7} AD^2 \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{CD} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$1) (a-c)(b-c) = p^2, \quad p - \text{простое}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p+c \\ b = p+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{не подходит, т.к. отсюда} \\ \text{следует, что } a=b, \\ \text{но } a < b. \end{array}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2+c \\ b = 1+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{не подходит, т.к.} \\ \text{отсюда следует, что} \\ b < a, \text{ т.к. } p^2 > 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{т.к. } p - \text{простое} \end{array}$$

$$2) \begin{cases} a = p^2+c \\ b = 1+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases}$$

$$b-a = p^2+c-c-1 = p^2-1 = (p-1)(p+1) \quad \text{!} \quad 3$$

$$\Rightarrow p-1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ и } p+1 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow p \equiv 1 \pmod 3 \text{ и } p \equiv 2 \pmod 3$$

$$\Rightarrow p-1 \equiv 0 \pmod 3 \text{ и } p+1 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Rightarrow 2p \equiv p-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod 3 \\ p \not\equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3$$

т.к. ~~у нас~~ ~~все~~ ~~на~~ ~~много~~ ~~3~~ ~~три~~ ~~остатка~~

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3, \quad p - \text{простое}, \quad \text{значит } p=3$$

$$\Rightarrow a = 1+c, \quad b = p^2+c = 3^2+c = 9+c$$

$$3) a^2 + b = 1000$$

$$(1+c)^2 + 9+c = 1000$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
11 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0 \quad D = 9 + 4 \cdot 990 = 9 \cdot (440 + 1) =$$

$$= 9 \cdot 441 = 3^2 \cdot 21^2 = (63)^2$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-3 + 63}{2} = 30, \quad c_2 = \frac{-3 - 63}{2} = -33$$

Значит $a_1 = 1 + c_1 = 30 + 1 = 31, \quad b_1 = 9 + c_1 = 9 + 30 = 39$

$$a_2 = 1 + c_2 = 1 - 33 = -32, \quad b_2 = 9 + c_2 = 9 - 33 = -24$$

Ответ: $(31, 39; 30), (-32, -24; -33)$



1 2 3 4 5 6 7

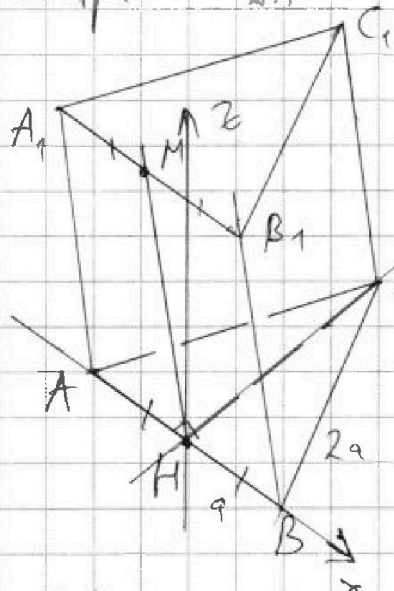
СТРАНИЦА
7 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

1) Пусть ^{призмы} основанием ~~параллелепипеда~~ $ABC A_1 B_1 C_1$ является $\triangle ABC$. По условию $\triangle ABC$ - равносторонний.

Пусть H - середина $AB \Rightarrow CH$ - высота, медиана, биссектриса $\triangle ABC$ (т.к. $\triangle ABC$ - равносторонний).



Аналогично $C_1 M$ - высота $\triangle A_1 B_1 C_1$,
 M - середина $A_1 B_1$

Пусть $AH = HB = a \Rightarrow AC = BC =$
 $= A_1 B_1 = A_1 C_1 = B_1 C_1 = 2a$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \Rightarrow 2a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow CH = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

2) Введём прямоугольную декартову систему координат в виде с центром в точке $H(0; 0; 0)$

$$A(-a; 0; 0), B(a; 0; 0), M(x, y, z), A_1(x-a, y, z)$$

$$B_1(x+a, y, z), C(0; a\sqrt{3}; 0), C_1(x, y+a\sqrt{3}; z)$$

$$\vec{AB} \{2a; 0; 0\} \quad \vec{AA_1} \{x, y, z\}; \vec{BB_1} \{x, y, z\}$$

$$\vec{AC} \{a; a\sqrt{3}; 0\} \quad \vec{BC} \{-a; a\sqrt{3}; 0\}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 2az\vec{j} + 2ay\vec{k}$$

$$\Rightarrow S_{AA_1 B_1 B} = |\vec{n}_1| = \sqrt{4a^2 z^2 + 4a^2 y^2} = 5 \text{ - параллелограмма}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow z^2 + y^2 = \frac{25}{4a^2} = \frac{25}{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{25\sqrt{3}}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} - z^2$$

$$3) \vec{n}_2 = \vec{AA}_1 \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot a z \sqrt{3} + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot a(x\sqrt{3} - y)$$

$$S_{AA_1C_1C} = |\vec{n}_2| = \sqrt{a^2 z^2 \cdot 3 + a^2 z^2 + a^2 \cdot (3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2)} = 6 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow 4z^2 + 3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2 = \frac{36}{a^2} = \frac{36}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 9\sqrt{3}$$

~~$$3) \vec{n}_2 = \vec{BB}_1 \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot (a z \sqrt{3}) + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot (a x \sqrt{3} + a y)$$~~

$$4) \vec{n}_3 = \vec{BB}_1 \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot (a z \sqrt{3}) + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot (a x \sqrt{3} + a y)$$

$$S_{BB_1C_1C} = |\vec{n}_3| = a \sqrt{3z^2 + z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2} = 6 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow 4z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2 = \frac{36}{a^2} = 9\sqrt{3}$$

$$5) \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2 = 9\sqrt{3} \\ 4z^2 + 3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2 = 9\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ 2xy\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ x=0 \\ 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4z^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \quad (a) \\ y=0 \\ 4z^2 + 3x^2 = 9\sqrt{3} \quad (b) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
9 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 d) \quad y=0 &\Rightarrow z^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} - y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} \Rightarrow 3x^2 = 9\sqrt{3} - 4z^2 = \\
 &= 9\sqrt{3} - \frac{100\sqrt{3}}{16} = \frac{44\sqrt{3}}{16} = \frac{22\sqrt{3}}{8} = \frac{11\sqrt{3}}{4} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot h = S_{\triangle ABC} \cdot z = \sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{16}} \cdot 4 = \frac{25\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad x=0 &\Rightarrow 4z^2 + y^2 = 4z^2 + \frac{25\sqrt{3}}{16} - z^2 = 3z^2 + \frac{25\sqrt{3}}{16} \\
 &= 9\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{104\sqrt{3} - 25\sqrt{3}}{16 \cdot 3} = \frac{119\sqrt{3}}{48}$$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot h = 4 \cdot z = 4 \cdot \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3 \cdot 16}} = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} V_{ABCA_1B_1C_1} = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}} \\ V_{ABCA_1B_1C_1} = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

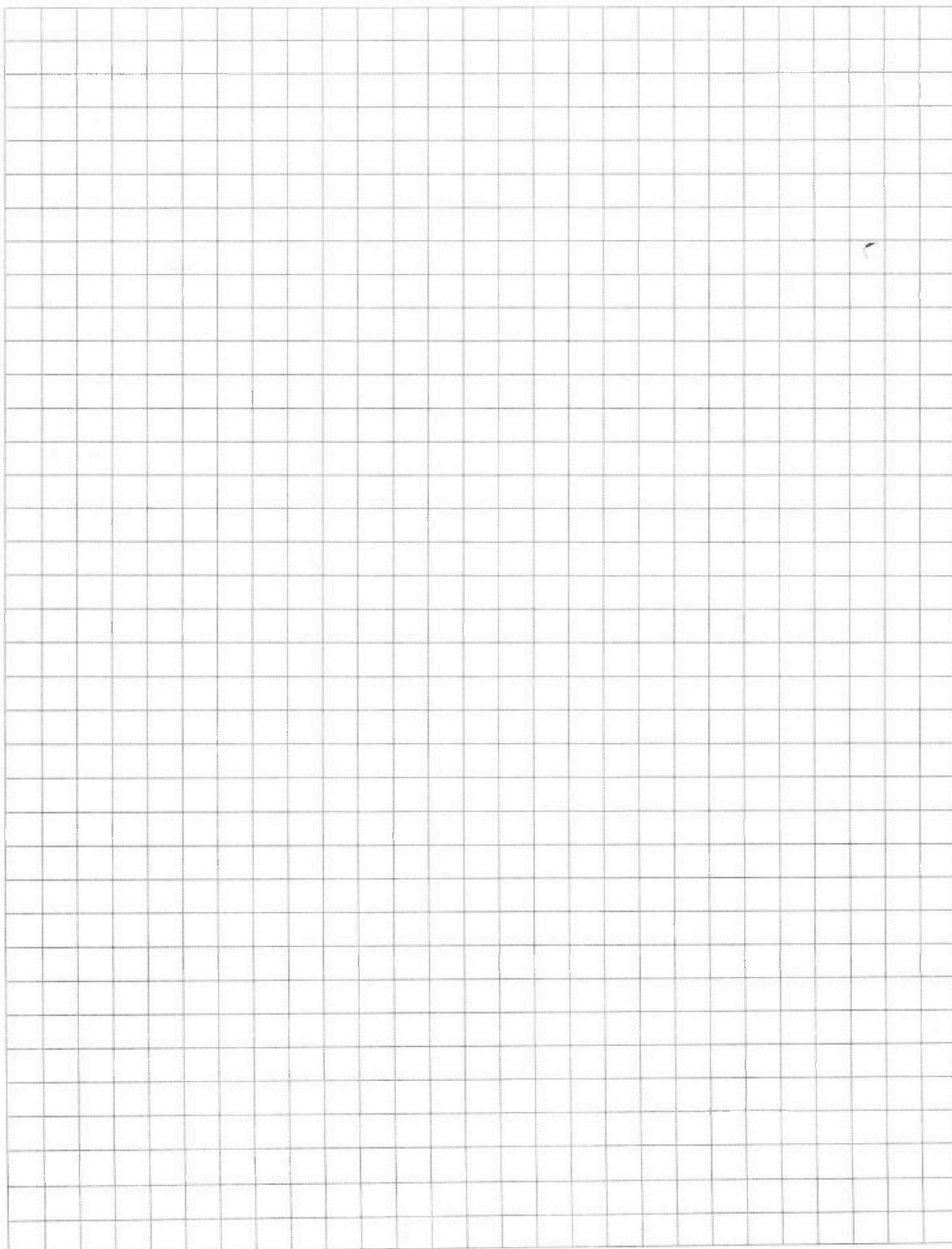


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\vec{AC} \left\{ x; \frac{4}{x}; 0 \right\} \quad \vec{AA_1} \left\{ m; y; z \right\}$$

$$\vec{AC} \times \vec{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & \frac{4}{x} & 0 \\ m & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \frac{4z}{x} - \vec{j} \cdot xz + \vec{k} \cdot \left(xy - \frac{4m}{x} \right)$$

$$\left\{ \frac{4z}{x}; -xz; xy - \frac{4m}{x} \right\}$$

$$\frac{4z^2}{x^2} + x^2z^2 + x^2y^2 - \frac{8my}{x} + \frac{16m^2}{x^2} = 36$$

$$\frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$$

$$16(z^2 + m^2) = \left(29 \frac{4}{5} + 8my \right) x^2$$

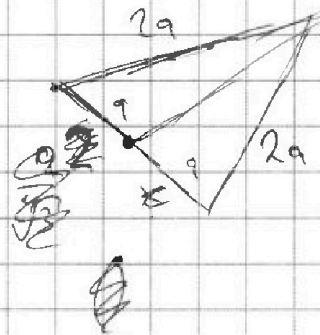
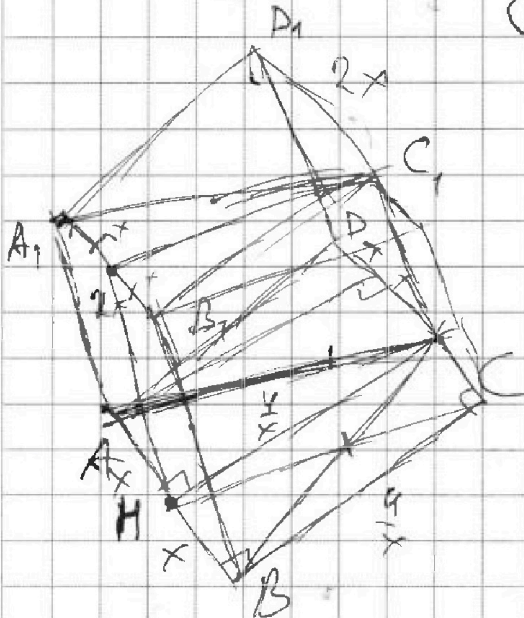
$$z^2 = \frac{29 \frac{4}{5} + 8my}{16} x^2 - m^2 \quad \frac{16(z^2 + m^2)}{x^2} + \frac{25}{4} - 8my = 36 \quad | \cdot 4x^2$$

$$64(z^2 + m^2) + 25x^2 - 32myx^2 = 144x^2$$

$$64(z^2 + m^2) = 32myx^2 + 119x^2$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4$$

$$a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



$$a - c = p$$

$$b - c = p$$

$$\begin{array}{r} 1300 \overline{) 475} \\ \underline{16} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

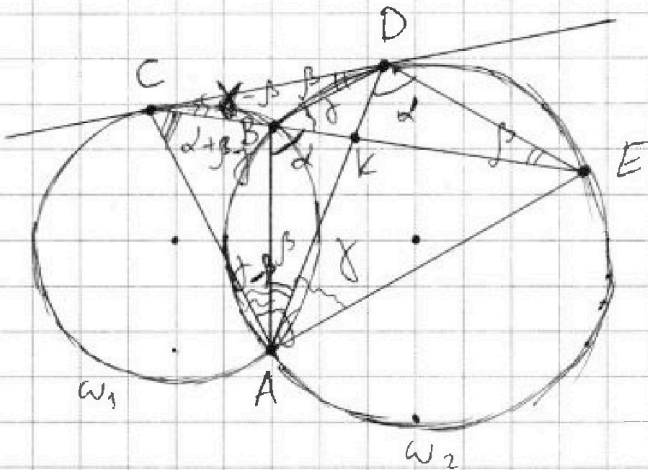


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \alpha - \beta - \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = \alpha$$

$$\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

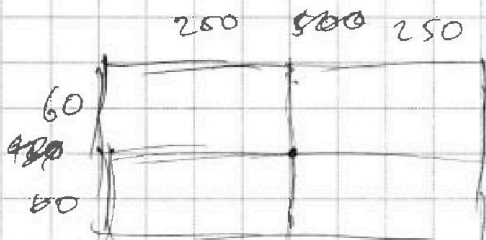
$$\frac{5}{\frac{16}{9}} = \frac{45}{16}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{20}{7}$$

$$AE \cdot AC = AD^2$$

$$AE^2 = \frac{20}{7} AD^2$$

$$AC^2 = \frac{7}{20} AD^2$$



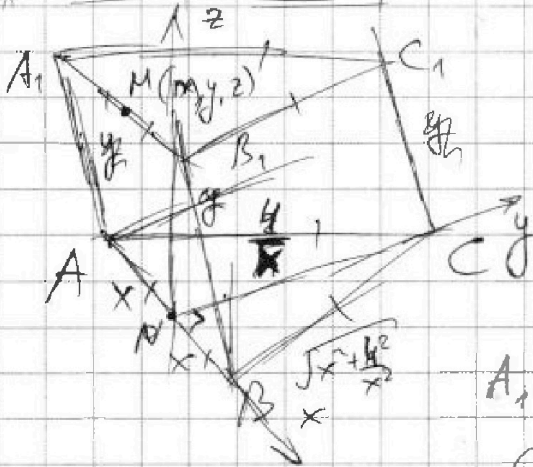
$$\frac{1}{2} x h = 4 \Rightarrow 2h = 4$$

$$h = \frac{4}{x}$$

$$4 \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} (z^2 + y^2) = 25$$

$$\Rightarrow z^2 + y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{64}$$

$$y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{64} - z^2$$



$$A(0, -x, 0); M(0, 0, z)$$

$$B(x, 0, 0), C(0, \frac{4}{x}, 0)$$

$$A_1(m-x, y, z), B_1(m+x, y, z)$$

$$C_1(m, y + \frac{4}{x}, z)$$

$$\vec{AA_1} = \{m; y; z\}$$

$$\vec{AB} = \{2x; 0; 0\}$$

$$\vec{AA_1} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & y & z \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + \vec{j} \cdot 2xz - 2xy \cdot \vec{k} = \{0; 2xz; -2xy\}$$

$$\sqrt{4x^2z^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{4x^2(z^2 + y^2)} = 5$$

$$4x^2(z^2 + y^2) = 25$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y+2) + 2(y-18) = \sqrt{400-z^2} \quad 104 = 64$$

$$y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 144y + 1296 + 2|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$5y^2 - 140y + 1300 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$\begin{array}{r} 204 \overline{) 6} \\ -18 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 34 \\ +136 \\ \hline 170 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty) \\ 5y^2 - 140y + 1300 + 4y^2 - 64y + 144 = 400 - z^2 \end{array} \right.$$

$$9y^2 - 204y + 1444 = 400 - z^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in [-2; 18] \\ 5y^2 - 140y + 1300 - 4y^2 + 64y + 144 = 400 - z^2 \end{array} \right.$$

$$y^2 - 76y + 1444 = 400 - z^2$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -140 \\ \hline 64 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\Rightarrow y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty)$$

$$(3y^2 - 204y + 1156) + z^2 = 20^2$$

$$(x+6)(3-x-2z) = 3x - x^2 - 2xz + 18 - 6x - 12z =$$

$$= -3x - x^2 - 2xz - 12z + 18$$

$$(3y - 34)^2 + z^2 = 20^2$$

$$(40 - z)^2 = 1600 - 160z + z^2 =$$

$$= 1440 + z^2 = 1444$$

$$\left(\frac{y - \frac{34}{3}}{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{z^2}{1} = 20^2$$

$$\left(\frac{y - \frac{34}{3}}{60}\right)^2 + \frac{z^2}{20^2} = 1$$

- эллипс

$$(y^2 - 76y + 1444) + z^2 = 20^2$$

$$(y - 34)^2 + z^2 = 20^2 \quad \text{- окружность}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{10} : a_{18} = \frac{\sqrt{(25x+34)^2}}{\sqrt{(3x+2)^6}} = \frac{25x+34}{3x+2} = a_{14}^2$$

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) > 0 \\ \frac{25x+34}{3x+2} > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; 2]$$

$$a_{12}^2 = a_{10} \cdot a_{14}$$

$$2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}}$$

$$\begin{array}{r} 25x+34 \\ \times 36 \\ \hline 744 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32x \\ \times 4 \\ \hline 1280 \end{array}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + z = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} & (2) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (1) \end{cases}$$

$$(1): |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \quad z \in [-20; 20]$$

$$\begin{cases} y \in (-\infty; -2] \\ -y+2 - 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \\ y \in [-2; 18] \\ y+2 - 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \\ y \in [18; +\infty) \\ y+2 + 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in (-\infty; -2] \\ 34-3y = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 144y + 1296 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$5y^2 - 140y + 1300 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~5000000~~

$$x+6 + 3\sqrt{x-2z} + 2\sqrt{3x-x^2-2xz-12z+18} = 4y - 12x - 4x^2 + 4z$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ 2z \leq 3-x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ z \leq 3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \geq -x \\ z \leq 4,5 \end{cases}$$

$$y - 3x - x^2 + z \geq 0$$

$$y \geq x^2 + 3x - z \geq$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \geq 1 \text{ решение}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - \\ &- 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - (6p + 3(p+4) \cos x + 10) = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0 \quad | :4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$1) \cos x = 0: (p-1) \cdot 0 + (0+1)^3 = 1 \neq 0 \quad \text{no solution } \forall p$$

$$2) \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow p-1 = - \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 \Leftrightarrow p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3$$

$$1^3 - \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 = \left(-\frac{1}{\cos x} \right) \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{\cos x} + 1 + \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos x \in (-1, 0) \cup (0, 1] &\Rightarrow \frac{1}{\cos x} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} &\in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$