



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$ , девятый член равен  $x+3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = (25x-9)(x-6); \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} (25x-9)(x-6) \geq 0 \\ \frac{25x-9}{(x-6)^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

~~Так как  $b_7 \neq 0$ ,  $b_9 = 0$ , или  $b_7 = 0$ , или  $b_9 = 0$ , то применим опрег для непр~~  
 ~~$x \neq \frac{9}{25}, x \neq 3, x \neq 6$~~

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$$

Заметим, что  $\frac{b_9}{b_7} = q^2; \quad \frac{b_{15}}{b_9} = q^6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^6 = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{|x-6|} \sqrt{|x-6|}}{\sqrt{|x-6|^3} (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} \\ q^4 = \frac{25x-9}{|x-6|(x+3)^2} \end{cases}$$

Т.к.  $q \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{Уса: } x \in [-3; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Заметим, что в задании уса  $\frac{25x-9}{x-6} > 0 \Rightarrow q^4 = \frac{25x-9}{(x-6)(x+3)^2}$

Также  $q^2 \cdot q^6 = q^8 \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3)\sqrt{25x-9}}{(x+3)\sqrt{25x-9} \sqrt{|x-6|}} = \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{|x-6|}$

Тогда  $\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{|x-6|}$

Ⓡ  $x \in [-3; \frac{9}{25}]$

$$\frac{25x-9}{(x-6)(x+3)} = \frac{1}{x-6} \Rightarrow (x+3)^2 = 9 - 25x \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$$

$$\begin{aligned} x(x+3) &= 0 \\ x_1 &= -3 \quad \text{— не может быть уса} \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Проверим  $x=0$  При нем  $b_7 = 3\sqrt{6}; \quad b_9 = 3; \quad b_{15} = \frac{\sqrt{6}}{6}$  и сумма  $q = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$  непр. сумма  $\rightarrow$

$\Rightarrow x=0$  — outside



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II)  $x \in (6; +\infty)$

$$\frac{25x-9}{(x-9)(x+9)} - \frac{1}{x-6}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$D = 289$$

$$x_1 = \frac{19-17}{2} = 1 \text{ - не подходит по условию}$$

$$x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$$

Проверка  $x=18$ :  $b_7 = 42\sqrt{3}$ ;  $b_9 = 21$ ;  $b_{15} = \frac{7\sqrt{3}}{21} \Rightarrow$  суц.  $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$  при том. Это решение

$\Rightarrow$  200м прир. суц  $\rightarrow x=18$  - ответ.

Ответ:  $\{0, 18\}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} & (2) \end{cases}$$

Уберем (2) равенство. Пусть  $f(y) = |y+4| + 4|y-5|$ ;  $g(z) = \sqrt{81-z^2}$ .

Найдём область значений  $f(y)$ . Раскроем модуль во сносках:

(I)  $y \leq -4 \Rightarrow f(y) = -y-4 - 4y+20 = -5y+16$  — монотонно убывающая функция  $\rightarrow$  мин значение  $\rightarrow$  при  $y = -4$ ;  $f(-4) = 36$ . Т.е. при  $y \leq -4$ :  $f(y) \geq 36$ .

(II)  $y \in [-4; 5]$ .  $f(y) = y+4 - 4y+20 = -3y+24$  — монотонно убывающая функция  $\rightarrow$  мин значение при  $y = 5$ ;  $f(5) = 9 \Rightarrow$  при  $y \in [-4; 5]$ :  $f(y) \geq 9$ .

(III)  $y \in [5; +\infty)$ .  $f(y) = y+4 + 4y+20 = 5y+24$  — монотонно возрастающая функция  $\rightarrow$  мин значение при  $y = 5$ ;  $f(5) = 49 \Rightarrow$  при  $y \in [5; +\infty)$ :  $f(y) \geq 49$ .

Из всех случаев следует, что  $f(y) \geq 9$ .

Теперь найдём область значений  $g(z)$ .

$g(z) = \sqrt{81-z^2}$ . Так  $81-z^2 \geq 0 \Rightarrow z \in [-9; 9]$ . Заметим, что  $g(x)$  — чётная.

Поэтому рассмотрим только интервал  $z \in [0; 9]$ . При  $z \uparrow$  на этом интервале значение функции строго убывает  $\rightarrow$  max в точке  $z = 0 \rightarrow \max g(z) = 9 \rightarrow$

$$\rightarrow g(z) \leq 9.$$

При этом  $f(y) = g(z)$ . Это возможно только если  $f(y) = g(z) = 9$ .

Во время анализа функций мы выяснили, что  $f(y) = 9$  только при  $y = 5$ ;  $g(z) = 9$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только при  $z=0 \rightarrow y=5, z=0$

Теперь рассмотрим  $\textcircled{1}$ ; подставим сразу значения  $y$  и  $z$ :

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + y = 2\sqrt{5-4x-x^2}$$

$$\text{Усл: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ 5-4x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-5, 1]$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - y$$

Выведем обе части в квадрат.

$$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$$

$$4(5-4x-x^2) - 14\sqrt{5-4x-x^2} + 10 = 0$$

$$t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$$

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-4x-x^2} = 1 \\ \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-4x-x^2 = 1 \\ 5-4x-x^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+4x-4=0 \\ x^2+4x+\frac{5}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = -\sqrt{11}-4 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{cases}$$

С учетом усл:  $\left. \begin{array}{l} x = -2\sqrt{2}-2 \\ x = 2\sqrt{2}-2 \\ x = \sqrt{11}-4 \end{array} \right\}$

Ответ:  $\{(-2\sqrt{2}-2; 5; 0); (\sqrt{11}-4; 5; 0); (2\sqrt{2}-2; 5; 0)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$t = \cos x, t \in [-1; 1]$$

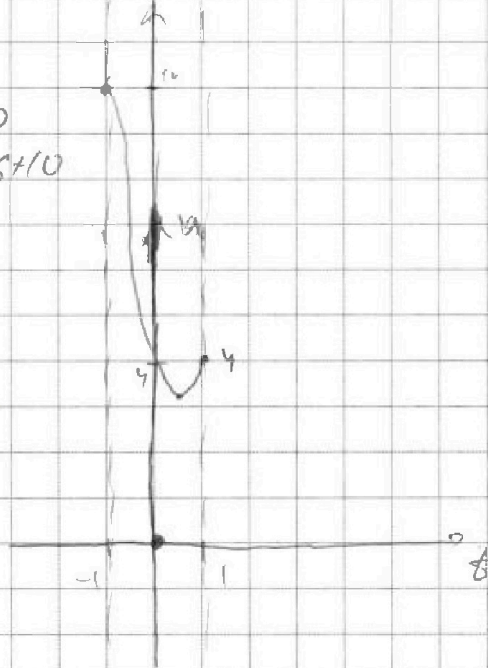
$$pt^3 = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$$

$$u = 3t^2 - 3t + 4$$

$$u = pt^3$$

$u = 3t^2 - 3t + 4$  - парабола; вершина слева;  
Вершины  $(\frac{1}{2}; \frac{17}{4})$ . При  $t = -1; u = 10$ ;  
При  $t = 1 \Rightarrow u = 7$



$u = pt^3$ . При  $p = 0; u = 0$ , но  $3t^2 - 3t + 4 \neq 0$  при  $t \in [-1; 1]$ ;  
 $\Rightarrow p = 0$  - не реш.

При  $p \neq 0; u = pt^3$  - возрастающая функция; пересечем через  $(0, 0)$

Ⓐ  $p > 0 \Rightarrow$  пересечем через точки  $(-1; p)$  и  $(1; p)$ . При  $t < 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$  не пересек.

параболу. Може не пересек параболу при  $p > 0$ . Т.е.  $pt^3$  решен в интервале  $3t^2 - 3t + 4$ , но

если  $pt^3 \leq 4$ , но  $p < 4$ , но решение нет. При  $p > 4$  - решение есть. Иногда  $t$

Ⓑ  $p < 0$  тоже при  $t > 0; pt^3 < 0 \Rightarrow$  не перес. параболу. Аналогично I. если  $p < 0$  это

реш. при  $p \leq -10$

$p \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$  При этих значениях  $p$  есть хотя бы 1  $t \Rightarrow \infty$  решений для  $x$ .

Ответ:  $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS

Для начала заметим, что ввиду того, что для каждой точки должны быть симметричные, относительно  $xy$  оси из объектов, то в каждом из 3 случаев все клетки разбиваются на пары единственным образом, причем обе клетки пары должны быть в раскраске, что не было. Т.е. в каждом случае мы выбираем набор из 4 пар. Всего клеток 40000, всего пар 20000  $\rightarrow$  это количество вариантов.  $C_{20000}^4 = \frac{20000!}{19996!4!}$ . Т.к. случаев 3, то всего вариантов  $\frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!}$ .

Теперь найдем, какие раскраски возможны несколько раз. Также, в которых раскраска симметрична относительно  $xy$  оси для 2 элементов. Заметим, что если ось симметрии описательно может 2, то она симметрична и относительно 3. То есть все такие случаи почитаем 3 раза: поймем, как выглядят такие случаи. Отметим любую точку и все 3 ее симметричных. Получим, что такая четверка может существовать для каждой из этих 4 точек и взгляды как вершины прямоугольника. Тогда в этих случаях все клетки единственным образом разбиваются на четверки, и нам надо выбрать 2 из них. Т.е.  $C_{10000}^2 = \frac{10000!}{9998!2!}$ . Заметим, что каждая такая раскраска однозначно была посчитана 3 раза  $\Rightarrow$  надо вычитать их дважды  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Ответ  $\frac{3 \cdot 20000!}{19996!4!} - \frac{2 \cdot 10000!}{9998!2!} = \frac{3 \cdot 20000!}{4! \cdot 19996!} - \frac{10000!}{9998!}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Т.к.  $(a-c)/(b-c) = p^2$ , при этом  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , ч.р.н. все три числа взаим. пр. (a-c) и (b-c)

I  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases}$ . По урн:  $(b-a) \div 3 \Rightarrow p^2+a-1-a = (p^2-1) \div 3$ . Если  $p \equiv 1 \pmod{3}$

$p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2-1) \div 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , т.к.  $p$  - простое  $\Rightarrow p=3$ .

$\Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ b=p^2+a-1 \end{cases}$ . По урн  $a^2+b=710 \Rightarrow a^2+a+2=710 \Rightarrow a^2+a-708=0$   
 $\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_2 = 26 \end{cases}$

Поиск:  $a_1 = -27; b_1 = -19; c_1 = -28$  - все урн. Ответ: это тройка - ответ.

$a_2 = 26; b_2 = 34; c_2 = 25$  - все урн. Ответ:  $\Rightarrow$  это ответ.

II  $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = -1+p^2$ , при этом  $\min p=2 \Rightarrow p^2-1 > 0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b$ , т.к. взаим. пр. урн.

III  $\begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b-1 \\ a=b+1+p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2+1 \Rightarrow a > b$  - взаим. пр.

IV  $\begin{cases} b-c=-1 \\ a-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ a-b-1 = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=b+1 \\ b=a+p^2-1 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2-1$ . Аналогично п. I  $\Rightarrow$

$\Rightarrow p=3 \Rightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ c=a+1 \end{cases} \Rightarrow a^2+a+2=710 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -27 & b_3 = -19, c_3 = -18 \\ a_4 = 26 & b_4 = 34, c_4 = 35 \end{cases}$  - обе тройки урн. ответ.

V  $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b$  - взаим. пр.

VI  $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b$  - взаим. пр.

Иных случаев нет  $\Rightarrow$

Ответ:  $\{(-27, -19, -28), (26, 34, 25), (-27, -19, -18), (26, 34, 35)\}$ .

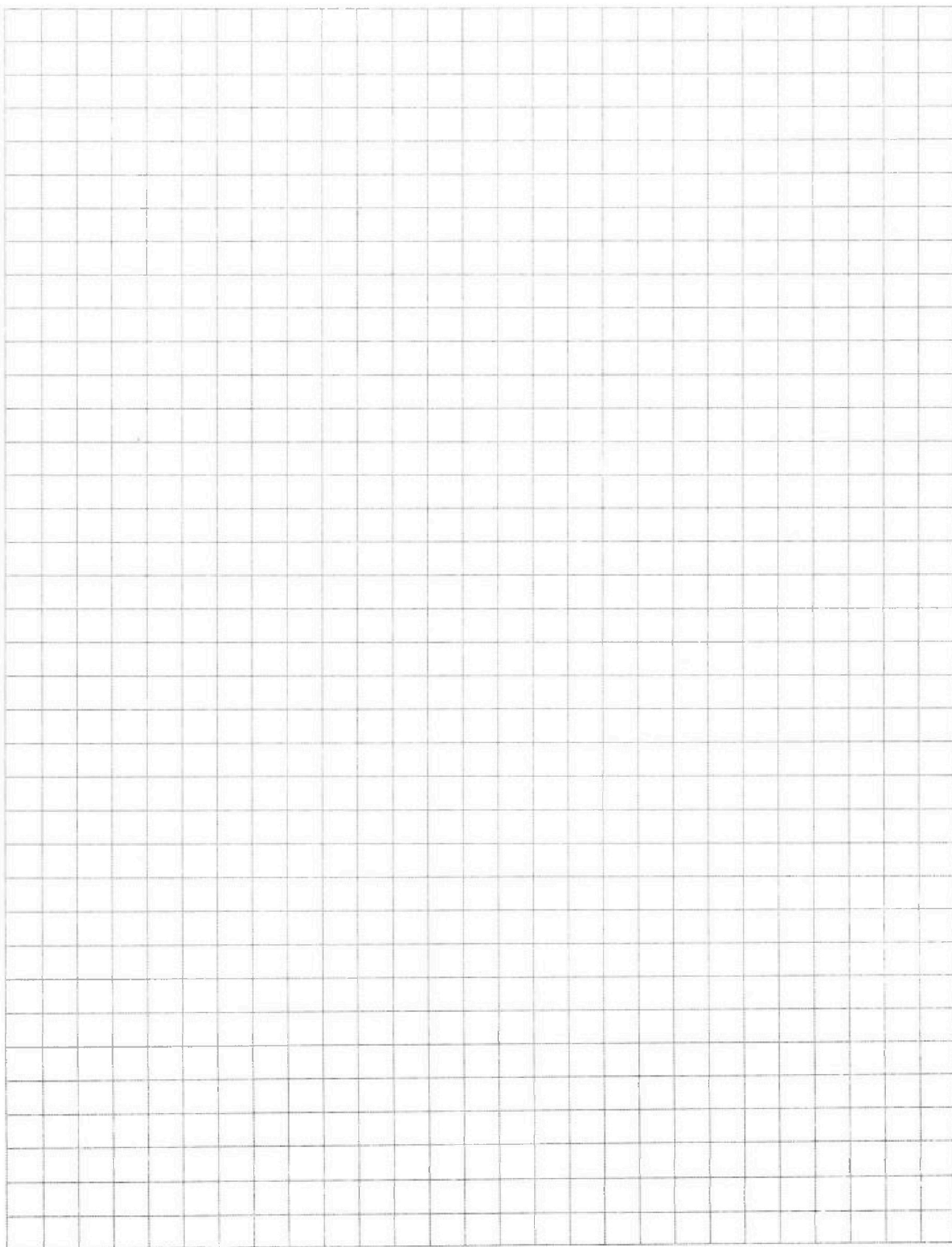


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





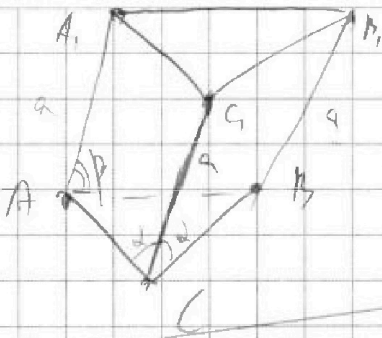


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta ABC - \text{плем}$   
 $S_{ABC} = 1$

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$3 + 4 + 5 + 5 + 7 + 0 + 0 = 31$$

$$3 + 4 + 3 + 2 = 12$$

$$x^2 + y^2 - 2R_1y + R_1^2 = R_1^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2R_2y + R_2^2 = R_2^2$$

$$-2R_1y + 2ax - a^2 + 2R_2y = 0$$

$$2ax = 2(R_1 - R_2)y + a^2$$

$$x = \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2}$$

$$\left( \frac{R_1 - R_2}{a}y + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - 2R_1y = 0$$

$$R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2 + \frac{2(R_1 - R_2)}{a}y + \frac{a^2}{4} + y^2 - 2R_1y = 0$$

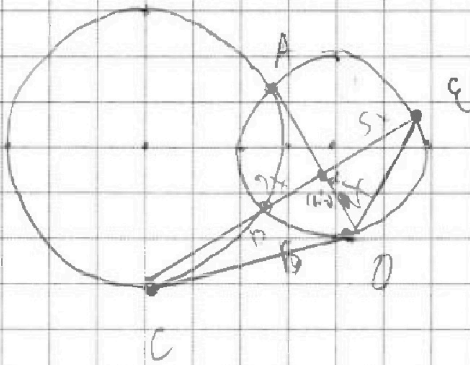
$$\frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}y^2 - (R_1 + R_2)y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$D = (R_1 + R_2)^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2} =$$

$$= R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 - R_1^2 - 2R_1R_2 - R_2^2 - a^2 =$$

$$= 4R_1R_2 - a^2$$

$$y_1 = \frac{R_1 + R_2 - \sqrt{4R_1R_2 - a^2}}{2 \cdot \frac{(R_1 - R_2)^2 + a^2}{a^2}}$$



$$\frac{CE}{CO} = ?$$

$$\frac{S_{COA}}{S_{OAE}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = CO^2$$

$$25x^2 + a^2 + \text{Max} \cos \alpha = OE^2$$



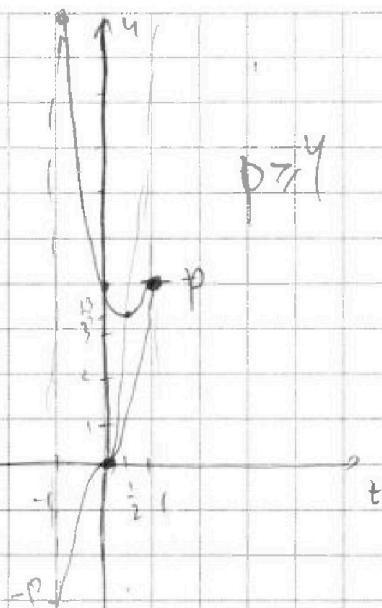


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t^3 - \frac{3}{p}t^2 + 3t - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t}{p^3} - \frac{3 \cdot 6}{p^3} + \frac{3 \cdot 4}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$\frac{6t - 18}{p^3} + \frac{12}{p^2} - \frac{4}{p} = 0$$

$$16 + 12p - 4p^2 = 0$$

$$p^2 - 3p + 4 = 0$$

$\frac{4}{p}$  - корень?

$$p = 4 \Rightarrow [1; 4]$$

$$p = 4$$

$$\frac{EO}{CO} = ?$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{AB}{R_1} = \sin \alpha$$

$$\frac{AB}{2} = R_1 \sin \alpha$$

$$AB = 2R_1 \sin \alpha$$

$$O_1 O_2 = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta$$

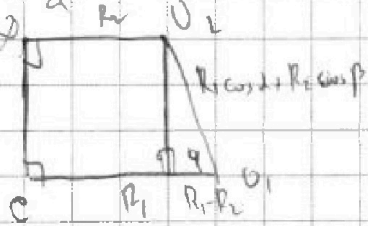
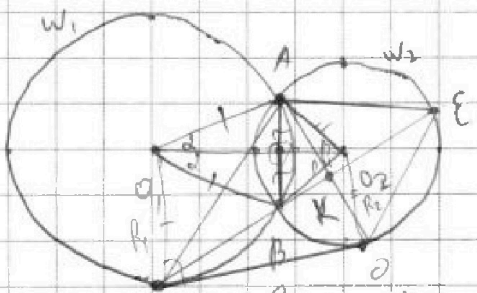
$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

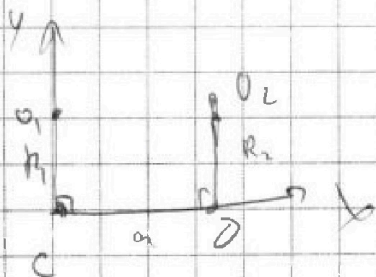
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 = kR_2$$

$$\sin \alpha = k \sin \beta$$



$$CO^2 = R_1^2 \cos^2 \alpha + R_2^2 \cos^2 \beta - 2R_1 R_2 \cos \alpha \cos \beta - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1 R_2 = 2R_1 R_2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - R_1^2 \sin^2 \alpha + R_2^2 \sin^2 \beta$$



$(0; 0)$  - центр  $R = R_1$  уравн  $(x; y)$   
 $O_1(0; R_1)$   
 $O_2(a; R_2)$

$$x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2$$

$$(x - a)^2 + (y - R_2)^2 = R_2^2$$

$$R_1 A = R_2 B$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a, p, c \in \mathbb{Z} \\ a \neq b \\ b-a \mid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \\ a^2 + b = 710 \end{cases}$$

- I  $a-c=1$   
 $b-c=p^2$
- II  $a-c=-1$   
 $b-c=-p^2$
- III  $b-c=1$   
 $a-c=p^2$
- IV  $b-c=-1$   
 $a-c=-p^2$
- V  $a-c=p$   
 $b-c=p$
- VI  $a-c=-p$   
 $b-c=-p$

$$\text{II} \quad c = a-1$$

$$b-a+1=p^2 \Rightarrow b = p^2+a-1$$

$$a < p^2+a-1$$

$$p^2-1 > 0 \quad \text{VI}$$

$$b-a = (p^2-1) \mid 3$$

	$h$	$h^2$
mod 3	0	0
	1	1
	2	1

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p = 3$$

$$b = a+8$$

$$c = a-1$$

$$a^2 + b = 710$$

$$a^2 + a + 9 = 710$$

$$a^2 + a - 701 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 701 = 2809$$

$$\sqrt{2809} = 53$$

$$a_1 = \frac{-1-53}{2} = -27$$

$$a_2 = \frac{-1+53}{2} = 26$$

$$\begin{array}{r} 270c \\ 2808 \\ \hline 57 \\ 2808 \\ \hline 3389 \\ 3389 \\ \hline 6778 \\ 6778 \\ \hline 13556 \\ 13556 \\ \hline 27112 \\ 27112 \\ \hline 54224 \end{array}$$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$p = ?$  Сложная

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x + 6 + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 16$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos^2 x + 4$$

$$p \cos^3 x = 3 \cos^2 x - 3 \cos x + 4$$

$$t = \cos x, \quad t \in [-1; 1]$$

$$pt^3 = 3t^2 - 3t + 4$$

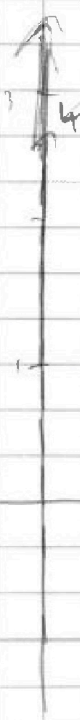
$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$



$$pt^3 - 3t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$p = 7, t = 1 \quad (+)$$

$$p = -10, t = -1 \quad (-)$$

$$-10t^3 = 3t^2 + 3t - 4$$

$$u = pt^3 \rightarrow f(t)$$

$$u = 3t^2 - 3t + 4 - \text{коррелируем} \rightarrow g(t)$$

$$0 = 9 \quad \text{берем } t_0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$u_0 = 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 4 = 4$$

$$g(-1) = 3 + 3 + 4 = 10$$

$$g(1) = 3 - 3 + 4 = 4$$

$$f(t) = pt^3$$

$$(-1; +p)$$

$$(1; 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV)  $y \geq 5$   $t = y + 1 + y - 20 = 5y - 16$  - вып. фн

min  $t = y + 1$   $min = 5$   
 $min = 9$

а т.к.  $0 \leq t \leq 9$

$y = 5; t = 9$

Усл.  $x \geq -5$   
 $x \leq 1$

$-x^2 - 4x + 5 \geq 0$   
 $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$x_1 = \frac{-4 - 6}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-4 + 6}{2} = 1$

$x \in [-5; 1]$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 1 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{5-4x-x^2} - 1$

$x+5 + 1-x + 16 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$x+5 - 2\sqrt{5-4x-x^2} + 1-x = 4(5-4x-x^2) - 16\sqrt{5-4x-x^2} + 16$

$1\sqrt{5-4x-x^2} + 6 = 4(5-4x-x^2) + 16$   
 $t = \sqrt{5-4x-x^2}; t \geq 0$

$4t^2 - 14t + 10 = 0$

$2t^2 - 7t + 5 = 0$

$D = 49 - 40 = 9$

$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1$

$t_2 = \frac{7+3}{4} = 5$

$\sqrt{5-4x-x^2} = 4$

$5-4x-x^2 = 16$

$x^2 + 4x + 11 = 0$

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 16 + 16 = 32$

$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{2} = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}$

$x_2 = 2\sqrt{2} - 2$

$4x^2 + 16x + 15 = 0$

$D = 256 - 240 = 16$

$x_1 = \frac{-16 - 4\sqrt{1}}{4} = -\sqrt{1} - 4$

$x_2 = \sqrt{1} - 4$

Всего карт = 4

Остаток карт = 10000 - 4000 = 6000

Все разобьём на карты; берём 7 карт;

где

где каждая из 3 карт = 4000

$\frac{4000}{4} = 1000$

Вар. выбор 2, 4, 6, 8, 10 карт



сумма карт = 4000

всего

$\frac{4000!}{4000! \cdot 4!}$

$\frac{4000!}{3996! \cdot 7!}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}; \quad b_9 = x+3; \quad b_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \quad x=?$$

$$q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$q = \frac{\sqrt{25x-9}}{\sqrt{(x-6)^3} \cdot (x+3)}$$

$$q^4 = \frac{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}}{(x+3)^2 \sqrt{(x-6)^3}} = \frac{|25x-9|}{(x+3)^2(x-6)}$$

$$y_{ch} \textcircled{9} (25x-9)(x-6) \neq 0$$

$$(x + \frac{9}{25})(x-6) \neq 0$$

$$x \in (-\infty, \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

II

$$x \in (-\infty, \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$$

$b_7 \neq b_{15}$

$$q^8 = \frac{(x+3)^2 \sqrt{25x-9}}{\sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{x-6} \cdot \sqrt{(x-6)^3} (x+3)^2} = \frac{1}{\sqrt{x-6}^4} = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$q^8 = \frac{1}{\sqrt{x-6}^4} = \frac{1}{(x-6)^2} \quad q \neq 0$$

$$q^4 = \frac{1}{x-6}$$

$$\frac{25x-9}{(x+3)^2(x-6)} = \frac{1}{x-6}$$

I  $x < \frac{9}{25}$ :

$$\frac{25x-9}{(x+3)^2(x-6)} = \frac{1}{6-x} \quad \frac{9-25x}{(x+3)^2} = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x(x+31) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -31$$

II  $x > 6$ :

$$\frac{25x+9}{(x+3)^2} = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$D = 361 - 72 = 289$$

$$x_1 = \frac{19-17}{2} = 1 \quad \text{не подходит по } y_{ch}$$

$$x_2 = \frac{19+17}{2} = 18$$

1)  $b_7 = \sqrt{(25(-31)-9)(-31-6)}$   
 $= \sqrt{-775 \cdot (-37)} = 5\sqrt{31 \cdot 37}$   
 $b_9 = -31+3 = -28$   
 $b_7 > 0$   
 $b_9 < 0$

$$q^2 = \frac{b_7}{b_9} < 0$$

2)  $x \neq 0$

$$b_7 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$$

$$b_9 = 3$$

$$b_{15} = \sqrt{\frac{9}{-66^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

$\frac{18}{31}$   
 $\frac{361}{31}$   
 $\frac{289}{31}$   
 $\frac{37}{31}$   
 $\frac{1225}{31}$   
 $\frac{155}{31}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q^2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{6}$$

$$q^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \Rightarrow v_{15} = q^4 \cdot v_3 = \frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot 3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \checkmark$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad x = 0 \quad \textcircled{\times}$$

$$3) X=18 \Rightarrow v_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{2 \cdot 19} = 12\sqrt{2}$$

$$v_9 = 21$$

$$v_{15} = \sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{(18 - 6)^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot 7}{12 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$q^2 = \frac{21}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{8}$$

$$q^6 = \frac{1}{16\sqrt{2}} \Rightarrow v_{15} = v_9 q^6 = \frac{21}{16\sqrt{2}} \quad \textcircled{\times}$$

$$\sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = \sqrt{9(25 \cdot 2 - 1) \cdot 12} = 6\sqrt{3 \cdot 19} = 12\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{25 \cdot 18 - 9}{12^3}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{3 \cdot 7}{12\sqrt{12}} = \frac{7}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

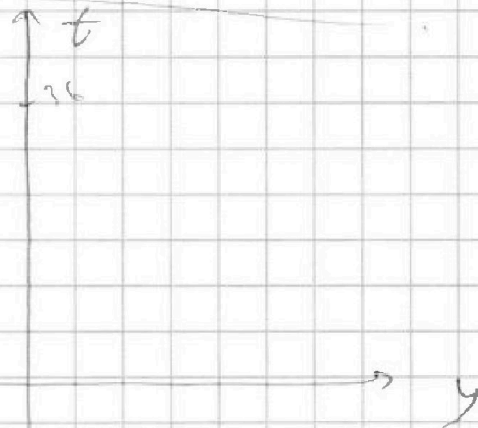
$$q^2 = \frac{21}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow v_{15} = 21 \cdot \frac{1}{24\sqrt{3}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$q^4 = \frac{1}{12} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{24\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-y^2} + 4 = 2\sqrt{y-yx-x^2+z}$$

$$|y+1| + |y-5| = \sqrt{31-z^2}$$

$$0 \leq \sqrt{31-z^2} \leq 9$$



$$t = |y+1| + |y-5|$$

$$\textcircled{I} y = -4$$

$$t = -y - 4 - y + 20 =$$

$$(5y+16), \text{ ydnl}$$

$$y = -4 \Rightarrow \text{ydnl} \text{ min } y = -4$$

$$\textcircled{II} y \in [-1, 5] \Rightarrow t = y+4 - y+20 = 24 \text{ ydnl } \text{ funktsiya} \sim \text{min } v_{15} = 5 \Rightarrow \text{min} = 9$$