



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$, тринадцатый член равен $5 - x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

- [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
- [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
 - $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
- [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть геом прогрессия $\{a_i\}_{i \geq 0}$ такова, что

$$a_i = b \cdot q^i, \quad b \neq 0, \quad q \neq 1.$$

По условию,

$$\begin{cases} a_7 = \sqrt[13]{x-35} \\ a_{13} = 5-x \\ a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases} = b \cdot q^7$$

Имеем

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt[13]{(x+1)^3}} = \sqrt[(x+1)^4]{(x+1)^2} = (x+1)^2 = q^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

Имеем

$$\frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} = \frac{\sqrt{|13x-35|(x+1)}}{5-x} = q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{|13x-35|}}{5-x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x-35 = (x-5) & (1) \\ 13x-35 > 0, & x+1 > 0 \\ 35-13x = (x-5) & (2) \\ 13x-35 < 0, & x+1 < 0 \\ x < 5 & \end{cases} \end{cases}$$

(1): $13x-35 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0$

$$\begin{cases} x=3 & |13x-35| > 0 : \\ x=20 & \text{от} \quad x < 5 \Rightarrow x=3. \end{cases}$$

При $x=3$ $a_i = \frac{\sqrt{2}}{64} \cdot (\sqrt{2})^i = (\sqrt{2})^{i-11} \text{hog xходит}$

$$a_7 = \sqrt{\frac{5}{43}} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = 2$$

$$a_{15} = \sqrt[13]{4 \cdot 9} = 4$$

$$a_{15} = \sqrt[13]{2^4} = 4$$

$$a_7 = \sqrt[13]{2^4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = \sqrt[13]{2^4} = 2$$

$$a_{15} = \sqrt[13]{2^4} = 4$$

(2): $35-13x = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x=-5: \begin{cases} a_7 = \sqrt{\frac{100}{24}} = \frac{10}{4} \\ a_{13} = 20 \\ a_{15} = 20 \end{cases} ; \quad a_k = \frac{5\sqrt{2}}{64} \cdot (\sqrt{2})^k - \text{log} x. \quad \begin{cases} x < 5 \\ 13x-35 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{log} x. \\ x = -5 \end{cases}$$

Отв: $x \in \{-5; 3\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 - 7t + 9 = 0 \quad t = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$0 < \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < \frac{7 + \sqrt{13}}{2} < 7 \quad \text{OK.}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$2) \sqrt{t} = \sqrt{7-t} - 2, \quad t = 7 - t - 4\sqrt{7-t} + 4$$

$$4\sqrt{7-t} = 11 - 2t$$

$$16(7-t) = 121 - 44t + 4t^2$$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0 \quad t = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{45}{4}}$$

$$0 < \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{45}{4}} < \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{45}{4}} < 7 \quad \text{OK.}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, 12, 0\right), \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 12, 0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{10}, 12, 0\right), \left(\frac{1}{2} + \sqrt{10}, 12, 0\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \quad (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

имеем $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \leq 13$.

1) $y > 12$; $|y+1| + 3|y-12| \geq |y+1| = y+1 > 13$ — не OK

2) $-1 \leq y \leq 12$; $|y+1| + 3|y-12| = y+1 + 3(12-y) = 37-2y \geq$

$37-2 \cdot 12 = 13 \Rightarrow$ равенство только при $y=12$.

3) $y < -1$: $|y+1| + 3|y-12| \geq 3|y-12| \geq 3 \cdot 13 > 13$ — не OK.

Итак, второе⁽²⁾ равенство выполнено. $\Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ z>0 \end{cases}$

Поставим это в первое равенство:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$. $x+3=t$, $0 \leq t \leq 7$.

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + (\sqrt{t})^2 + (\sqrt{7-t})^2 - 2 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + (t - (7-t))^2 = 2$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = -2 \quad (2)$$

1) $\sqrt{t} = \sqrt{7-t} + 1$, $t = 7-t + 1 + 2\sqrt{7-t} \quad (\Rightarrow t-4 = \sqrt{7-t})$

$$\begin{cases} (t-4)^2 = 7-t \\ t^2 - 8t + 16 = 7-t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x &= \\ &= (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t \\ &= 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \end{aligned}$$

Итак, мы исследуем ур-ние $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
при $-1 \leq t \leq 1$.

Заметим, что $f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$
функция монотонно

~~f возрастает на всей оси~~ (т.к. производная ≥ 0)

Поэтому она принимает все значения от $f(-1)$ до $f(1)$ при $-1 \leq t \leq 1$ (из непрерывности) равно по одному разу.

Итак, подойдут значения $-4 \leq p \leq 10$.

$$f(-1) = -4$$

$$f(1) = 10$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (2t+1)^3 - \frac{3}{2}$$

$$\text{Поэтому } f(t) = p \Leftrightarrow (2t+1)^3 = 2p+7 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}. \text{ Осталось решить ур-ние } \cos x = t:$$

$$x = \arccos(t) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

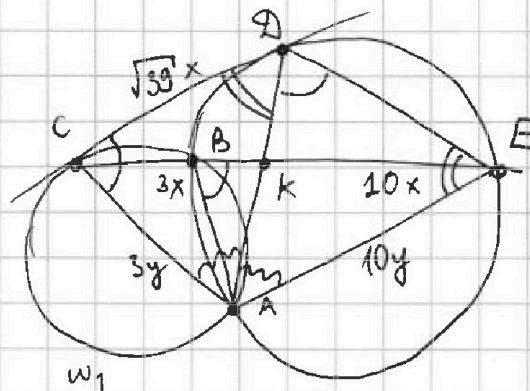
$$\text{Ответ: } -4 \leq p \leq 10, \quad x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD \perp CE = k$$

$$CK = 3x, KE = 10x.$$

По т. о хорде и касательной
из $\angle CK$ ч о внеш. угол,

$$\angle ACA = \pi - \angle ABC = \angle ABE$$

$$= \angle ADE;$$

$$\angle CDA = \angle DEA. \Rightarrow$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE \Rightarrow AK - \text{бис. } \triangle CAE (*)$$

По т. о произв. сечущих $CA^2 = CB \cdot CE = 3x \cdot 10x$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{39}x$$

(*) ; то cb. бис. $\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AC = 3y, AE = 10y$

Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle ADE$ $\frac{AC}{AD} = \frac{AA}{AE} \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = \sqrt{30}y$

Из этого же подобия $\frac{CD}{AD} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} =$
 $= \frac{10y}{\sqrt{30}y} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть A, B, C - мн-ва клеток, обладающих первым, вторым и третьим свойством соответственно (симв. отн. центр, эти ср. линии // 250, отн. ср. линии // 200).

Мы хотим найти $|A \cup B \cup C|$.

По оп-ле Виногради - исключений,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Обозначим для краткости $250 = n$, $200 = m$

Найдем. Посчитаем каждое слагаемое по отдельности.

1) $|A| = \frac{mn}{2} \cdot \frac{mn}{2} \cdot \frac{C^4}{2}$ (пк. достаточно

выбрать из левой половины пр-ка 4 рядах кл. и симм. отразить их в обн. центре)

2) $|B| = C_{\frac{mn}{2}}^4$ - выбираем из левой половины 4 рядных клеток и отн. их отн. ср. линии

3) $|C| = C_{\frac{mn}{2}}^4$ - выбираем из левой половины 4 рядных кл. и отн. их отн. ср. линии

4) $|A \cap B| = C_{\frac{mn}{4}}^2$. Выбираем 8 клеток на 2 пр-ка с центром в центре пр-ка мн, ровно 2 ряд. ~~одна~~ клетки лежат в левом нижнем пр-ке, ост. получаются симметричн

○ ○	○ ○
○ ○	○ ○
○ ○	○ ○



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Аналогично 4), $|A \cap C| = C_{\frac{mn}{4}}^2$

6) Заметим, что Ми-бо, ^{кличка} однод. симметричны от. средних линий, центрально симметрично.

Поэтому $|A \cap B| = |B \cap C| = A \cap C \Rightarrow$

$$|B \cap C| = C_{\frac{mn}{4}}^2$$

$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = |B \cap C| = C_{\frac{mn}{4}}^2$, т.к.

$$A \cap B = B \cap C.$$

Итак, $|A \cup B \cup C| = 3C_{\frac{mn}{2}}^4 - 2C_{\frac{mn}{4}}^2 = 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$

Ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(a-c) \cdot (b-c) = p^2$ (p - простое).

Заметим, что $a-c > b-c$, поэтому

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{т.к. } p^2 \text{ имеет делители}$$

$$\begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \quad (2) \quad \pm 1, \pm p, \pm p^2, \text{ и } a-c \neq \pm p, \\ \text{иначе } b-c = \pm p \text{ и } a=b).$$

Отметим, что b обязано быть

$$a-b = (a-c) - (b-c) = p^2 - 1.$$

По условию, $a-b = p^2 - 1$ не кратно 3.

Но это означает, что $p \equiv 0 \pmod{3}$ ($\text{т.к. } 1^2 \equiv 1 \pmod{3}$ и $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$)

$$\Rightarrow p=3.$$

Итак, имеем

$$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 1 \\ a-c = 1 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad a-b = p^2 - 1 = 8$$

$$\begin{cases} 1) c = b-1 \\ 2) c = b+9 \end{cases}$$

По условию, $a + b^2 = 560 \Rightarrow b+8+b^2=560$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 23, \\ b = -24, \end{cases}, \quad a = 31$$

$$1) \begin{cases} a = 31, b = 23, c = 22 \\ a = -16, b = -24, c = -25 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a = 31, b = 23, c = 32 \\ a = -16, b = -24, c = -15 \end{cases}$$

Ответ: $(31, 23, 22), (-16, -24, -25), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{BCC_1B_1} = BC \cdot \text{dist}(B_1, BC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1 - x - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 + h^2} = 4.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} y^2 + h^2 = 16 \quad (1) \\ \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 + h^2 = 9 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 + h^2 = 16 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) - (2) : \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 - \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right) - y\right)^2 = 7$$

$$\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y + \sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right) - y\right) = 7$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + -\frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 = 7$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4, \quad x = \frac{8}{3}, \quad \frac{8 + \sqrt{3}y}{3}$$

$$(2) - (1) : \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right) - y\right)^2 - y^2 = -7$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}y - 3 \cdot \frac{8 + \sqrt{3}y}{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\left(\frac{8 + \sqrt{3}y}{3} - x\right) - y}{4}\right)^2 - y^2 = -7$$

$$4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - y^2 = -7$$

$$h^2 = 16 - y^2 = 16 - \left(2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 7\right) =$$

$$16 - 4 - \frac{4}{3} - 7 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}, \quad h = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

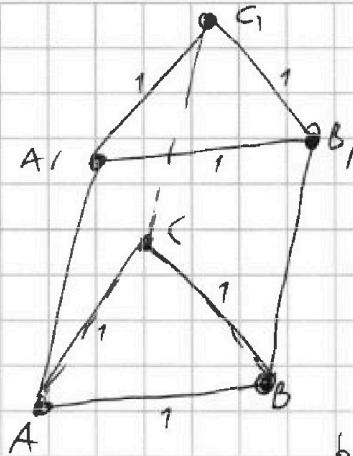
$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $A_1B_1C_1A, B_1C_1$ — исходная призма.

$$500 \quad S_{AB_1A_1} = S_{B_1C_1B_1} = 4,$$

$$S_{AC_1A_1} = 3.$$

Пусть h — высота призмы.

Введём декартову систему с центром A ,

чтобы $OX = AB, OZ \perp (ABC), OY \in (ABC)$ и $\perp AB$.

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1} = (x, y, h) \Rightarrow$$

$$A_1(x, y, h), B_1(x+1, y, h), C_1\left(\frac{1}{2}+x, \frac{\sqrt{3}}{2}+y, h\right).$$

$$S_{AB_1A_1} = AB \cdot \text{dist}(A_1, AB) = 1 \cdot \sqrt{y^2 + h^2} = 4$$

$$S_{AC_1A_1} = AC \cdot \text{dist}(A_1, AC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 + h^2} = 3$$

AP-высота на AC

$$P(a, \sqrt{3}a, 0)$$

O_1

$$\langle AC, A_1P \rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (a-x, \sqrt{3}a-y, 0) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} (a-x + \sqrt{3}(\sqrt{3}a-y)) =$$

$$= \frac{1}{2} (4a - x - \sqrt{3}y)$$

$$a = \frac{x + \sqrt{3}y}{4}$$

B_1Q — высота на BC

$$Q(b, \sqrt{3}-\sqrt{3}b, 0)$$

$$\langle BC, B_1Q \rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (b-x-1, \sqrt{3}-\sqrt{3}b-y, 0) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} ((b-x-1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}b-y))$$

$$= \frac{1}{2} (4b - x - \sqrt{3}y - 4)$$

$$b = \frac{x + \sqrt{3}y}{4} + 1$$