



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть существует такая геометрическая прогрессия (a_n) . $(a_{n+1} = q \cdot a_n)$ и $a_7 = q^6 \cdot a_1$, ~~$q^{12} \cdot a_1$~~

$$a_{13} = q^{12} \cdot a_1, \quad a_{15} = q^{14} \cdot a_1$$

$$\text{Тогда } q^6 \cdot a_1 = a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad q^{12} \cdot a_1 = a_{13} = 5-x,$$

$$q^{14} \cdot a_1 = a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~$$\text{и } q^{20} \cdot a_1^2 = a_7 \cdot a_{15} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$~~
~~$$((13x-35)(x+1) \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \quad \text{и} \quad x \neq -1)$$~~

$$\text{и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = a_1 \cdot q^{12} = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8 = a_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\underline{1} \text{ и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0, \text{ тогда } 13x = 35, \text{ и } x = \frac{35}{13}$$

$$\text{и тогда } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = \neq 0, \text{ и } 5-x=0, \text{ и } x=5$$

$$5 \neq \frac{35}{13}, \text{ и. значит уравн. невозможны}$$

$$\underline{2} \text{ и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \neq 0, \text{ тогда } q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4} =$$

$$= \sqrt[4]{(x+1)^4} = \sqrt[4]{(x+1)^2} = \sqrt[4]{|x+1|}, \quad q \neq 0$$

$$\text{и } q^6 = \left(\sqrt[4]{|x+1|}\right)^6 = \left(\sqrt{|x+1|}\right)^3 = |x+1| \cdot \sqrt{|x+1|}$$

и



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x = -5 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{-65-35}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \frac{10}{4 \cdot 2} = \frac{5}{4},$$

$$5-x = 10, \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{(-100) \cdot (-4)} = 2 \cdot 10 = 20$$

Это значит значит. прогрессии (a_n) при $q = \sqrt{2}$, $a_1 = \frac{5}{32}$

$$(a_7 = a_1 \cdot q^6 = \frac{5}{32} \cdot 8 = \frac{5}{4}, \quad a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = \frac{5}{32} \cdot 2^6 = 10,$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = \frac{5}{32} \cdot 2^7 = 20) \quad (+)$$

$$2) x = 2 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{26-35}{3^3}} = \sqrt{-\frac{9}{27}} \quad (-)$$

$$3) x = 3 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \sqrt{\frac{4}{64}} = \frac{1}{4}, \quad 5-x = 2,$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

Это значит значит. прогрессии (a_n) при $q = \sqrt{2}$,

$$a_1 = \frac{1}{32} \quad (a_7 = a_1 \cdot q^6 = \frac{1}{32} \cdot 8 = \frac{1}{4}, \quad a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = \frac{1}{32} \cdot 2^6 = 2,$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = \frac{1}{32} \cdot 2^7 = 4) \quad (+)$$

Ответ: $\{-5; 3\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(y)$ имеет корни на $[-1; 1]$ тогда и только тогда (из непрерывности), когда на $[-1; 1]$ её минимальное значение ≤ 0 , а максимальное ≥ 0 .

~~максимальное значение ≥ 0~~ для $[-1; 1]$:

$$f(y)_{\max} = 10 - p, \quad f(y)_{\min} = -4 - p$$

и уравн * имеет корни ~~тогда и~~ тогда и

только тогда, когда
$$\begin{cases} 10 - p \geq 0 \\ -4 - p \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 10 \\ p \geq -4 \end{cases}$$

т. е. нам подходят $p \in [-4; 10]$

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad (*)$$

$$\text{и. } 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$\text{и. } 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0$$

Пусть $f(y) = 4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 - p$, тогда $\cos x$ -
- корни уравн. $f(y) = 0$, $\text{и. макс. уравн. } *$

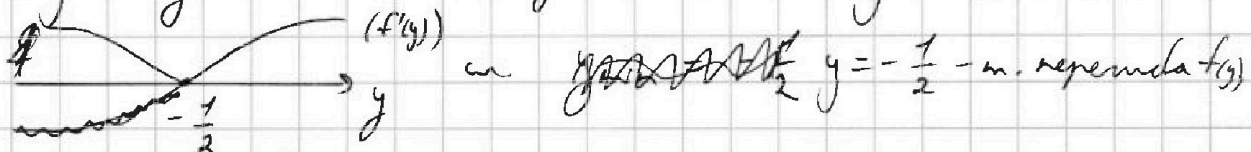
имеет решение тогда и только тогда,
когда $f(y) = 0$ имеет решение $y_0: -1 \leq y_0 \leq 1$,

$$\text{и. к. } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 - p = -4 - p, \quad f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 - p = 10 - p$$

$$f'(y) = 12y^2 + 12y + 3, \quad \text{и. } f'(y) = 0 \Leftrightarrow 12y^2 + 12y + 3 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 - p = -\frac{1}{2} - 3 - p = -3,5 - p$$

Для $[-1; 1]$ макс. и мин. $f(y)$ достигается

или в границах отрезков или в экстремумах.

$$-4 - p < -3,5 - p < 10 - p, \quad \text{и. } f(-1) < f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(1)$$

$$\text{и. } \forall y \in [-1; 1]: -4 - p \leq f(y) \leq 10 - p$$

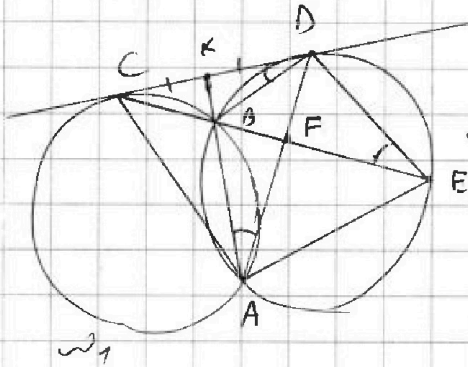


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$AB \cap CD = K, AD \cap CE = F$$

$$CK^2 = KB \cdot KA = KD^2 \text{ как секущая точки } \omega_1 \text{ и } \omega_2$$

$ABDE$ - вписанный четырехугольник, $\angle DEB = \angle DAB$ как впис. угол на одну дугу

$\angle CDB = \angle DEB$, как угол между кас. и хордой

Пусть $CF = 3x$, тогда $FE = 10x$, а $CE = 13x$

так $CD^2 = CB \cdot CE$ как секущая точки ω_1 и ω_2 , ω_1

$$CB = \frac{CD^2}{13x}$$

$\angle DCE$ - острый, $\angle CDB = \angle DEC$, ω_1 $\triangle CBD \sim \triangle CDE$ по I признаку

$$\omega_1 \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{DE} = \frac{CB}{CD}, \omega_1 \frac{CD}{DE} = \frac{BC}{BD} = \frac{CD^2}{CE \cdot BD}$$

$\angle AKD$ - острый, $\angle KDB = \angle KAD$, ω_1 $\triangle KDB \sim \triangle KDA$ по I признаку

$$\omega_1 \frac{BD}{AD} = \frac{KD}{KA}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

когда удобно $C_{100 \cdot 250}^4 + C_{200 \cdot 125}^4 - C_{100 \cdot 125}^2$

(т.к. слоты $C_{100 \cdot 250}^4$ и $C_{200 \cdot 125}^4$ мы считаем
прямоугольниками симметричные относительно центра грани).

$$\text{Получаем ответ } C_{100 \cdot 250}^4 + C_{200 \cdot 125}^4 - C_{100 \cdot 125}^2 = \\ = C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - C_{12500}^2 = 2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$$

Ответ: ~~$2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$~~ $C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрии центра прямоугольника.

В. ~~до~~ можно сказать, что у нас всего 2 операции: симметрии относительно одной из средних линий, т.к. симметрия относительно центра представляется их комбинацией. Прямоугольников симметричных относительно горизонтальной средней линии $C_{100 \cdot 250}^4$, т.к. мы красим 4 клетки в III прямоугольнике 100×250 (см. рис. на стр. 1), а другой прямоугольник красится из симметрии. Аналогично прямоугольников симметричных относительно вертикальной средней линии $C_{200 \cdot 125}^4$. А прямоугольников симметричных относительно центра $C_{100 \cdot 125}^2$, т.к. мы красим 2 клетки в III прямоугольнике 100×125 , а остальные 3 прямоугольника 100×125 красятся из симметрии. В. прямоугольников удвоителя

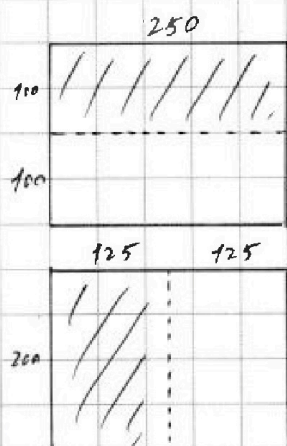


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что средняя линия
прямоугольника делит его на

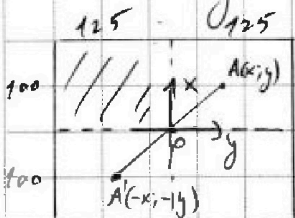
на 2 прямоугольника 100×250 , или
на 2 прямоугольника 100×125 .

Трапеция — это параллелограмм

и его средние линии пересекаются в центре

сечения его диагоналей, и в его центре

(то есть параллелограмма). Средние линии



прямоугольника перпендикулярны —
линии. И если точка $A(x; y)$

была симметрирована относительно

одной из средних линий, то сначала одна из ее

координат принимает знак, а потом другая.

и $A(x; y) \rightarrow A(-x; -y)$. П.к. мы выбрали точку

пересечения средних линий, как начала ко-

ординат, а любая точка $A(x; y)$ переходит

в т. $A'(-x; -y)$ при симметрии относительно

точек пересечения средних линий, т.е. это



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) a+b^2 = c-1 + (c-9)^2 = c-1 + c^2 - 18c + 81 = c^2 - 17c + 80 = 560$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 17c - 480 = 0, \quad D = 17^2 + 4 \cdot 480 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$= 1600 + 609 = 2209 = 47^2, \quad \Leftrightarrow c = \frac{17 \pm 47}{2} \quad \begin{cases} c = -15 \\ c = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -15 \\ a = -16 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline + 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$(2) a+b^2 = c+9 + (c+1)^2 = c+9 + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10 = 560$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3c - 550 = 0, \quad D = 3^2 + 4 \cdot 550 = 9 + 2200 = 2209 = 47^2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-3 \pm 47}{2} \quad \begin{cases} c = 22 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 22 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -25 \\ a = -16 \\ b = -24 \end{cases}$$

(все возможные варианты (a, b, c))

Ответ: $\{(31; 23; 32), (-16; -24; -15), (31; 23; 22), (-16; -24; -25)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ (a-c)(b-c)=p^2 \\ a-b \neq 0 \\ a > b \\ p - \text{простое} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{нб} \\ a = 560 - b^2; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ и } a-c, b-c \in \mathbb{Z} \\ \text{и если } (a-c)(b-c) = p^2, \text{ то или} \\ \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \text{ но тогда или } a=b+p, \\ \text{или невозможно, или} \\ \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \text{ невозможно (} p - \text{простое, и } p^2 \geq 4), \\ \text{или } \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \text{ невозможно, или} \end{matrix}$$

$$\text{или } \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \text{ но тогда } a=c+1 < c+p^2=b, \text{ что}$$

$$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}, \text{ и } \begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases} \quad (A) \\ \begin{cases} a=p^2+c \\ b=1+c \end{cases} \quad (B)$$

$$(1) \quad 560 = a+b^2 = c-1 + (c-p^2)^2 = c-1 + c^2 - 2cp^2 + p^4 = p^4 - 2cp^2 + (c^2 + c - 1)$$

$$\text{и } a-b = p^2 - 1, \quad a-b \neq 0, \text{ и } p^2 - 1 \neq 0$$

$$\text{Если } p \equiv_3 0, \text{ то } p^2 \equiv_3 0, \quad p^2 - 1 \equiv_3 -1, \text{ если } p \equiv_3 1, \text{ то } p^2 \equiv_3 1, \quad p^2 - 1 \equiv_3 0, \text{ если } p \equiv_3 2, \text{ то } p^2 \equiv_3 1, \quad p^2 - 1 \equiv_3 0.$$

$$\text{и } p \text{ нам разлагает только } p \equiv_3 0, \text{ но } p - \text{простое, и } p = 3, \text{ и } (a-c)(b-c) = 9$$

$$\begin{cases} a=c-1 & (1) \\ b=c-9 & \\ a=c+9 & (2) \\ b=c+1 & \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \quad a+b^2 = c-1 + (c-9)^2 = c-1 + c^2 - 18c + 81 = \\ = c^2 - 17c + 80, \text{ и } c^2 - 17c + 80 = 560 \\ \text{и } c^2 - 17c - 480 = 0 \\ D = 17^2 + 4 \cdot 480 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2 \\ \text{и } c = \frac{17 \pm \sqrt{2209}}{2} = \frac{17 \pm 47}{2} \end{matrix}$$

$$(2) \quad a+b^2 = c+9 + (c+1)^2 = c+9 + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10, \text{ и } c^2 + 3c + 10 = 560$$

68
48
384
192
04
47
47
329
133
2209

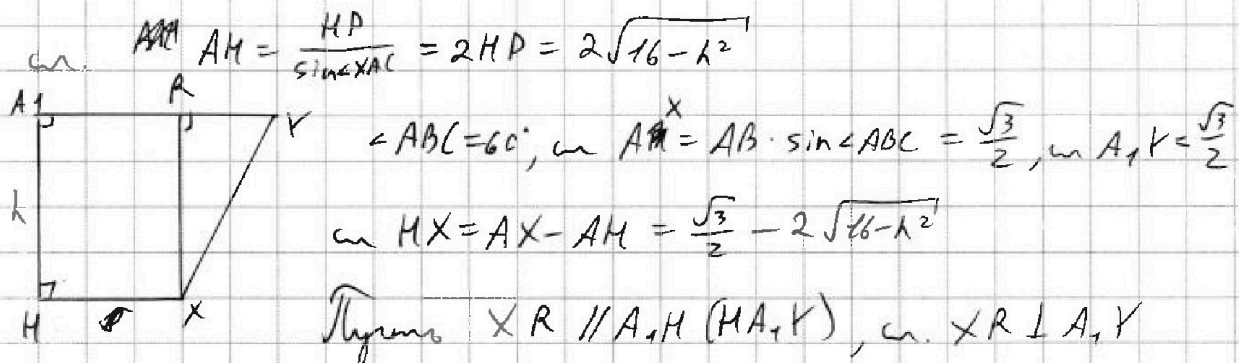


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$, $\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$

$\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$, $\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$

$RY^2 + RX^2 = XY^2$ по м. Пифагора, $\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$

$3k^2 = 4 \cdot 16 - 9 = 40 + 24 - 9 = 40 + 15 = 55$, $k^2 = \frac{55}{3}$, $\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$

$\sin \angle XA_1Y = \frac{XR}{A_1Y} = \frac{AH}{A_1Y} = \frac{2\sqrt{16-k^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{16-k^2}}{\sqrt{3}}$

Ответ: высота в призме $\sqrt{\frac{55}{3}}$



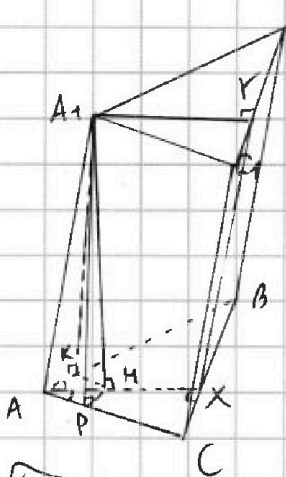
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$ABCA_1B_1C_1$ - ~~прямо~~ призма из упр.

$\triangle ABC$ равнобедр., $AB=1$, $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 4$,

$S_{CC_1B_1B} = 3$ $AA_1C_1C, AA_1B_1B, CC_1B_1B$ - параллелограммы по сгр. призмам

~~параллелограммы по сгр. призмам~~
Плоск. $A_1KH \perp ABC$ (сл. A_1H - высота призм), $A_1K \perp AB$ (AA_1B_1B), $A_1P \perp AC$ (AA_1C_1C)

Потому $S_{AA_1B_1B} = A_1K \cdot AB$, $S_{AA_1C_1C} = A_1P \cdot AC$, и $A_1K = A_1P = 4$

$KH \subset ABC$, $PH \subset ABC$, и $PH \perp A_1H$, $KH \perp A_1H$

и. $\triangle KA_1H = \triangle PA_1H$ | по призм. рав. крест. мн
о высоте и гипотенуз. мн

и. $HP = KH$, $HP \perp AC$, $KH \perp AB$ по теор. о 3^х перп.

и. H равноуд. от AB и AC , и AH - дим. $\triangle ABC$, и AH и вис.

и мег. по сл. б.г. равнобедр. треугол. Потому $AM \cap BC = X$,

A_1Y - мег. вис. и дим. в $\triangle A_1B_1C_1$ к B_1C_1 , и XY и A_1H

в одной плоск., и. и.м. $XY \parallel A_1H$, и.м. $XY \cap A_1H = Z$.

если $XY \perp A_1H$, то $XY \perp ABC$, и $BC \perp XY$

если $A_1H \cap XY = Z$, то $ZX \perp BC$ по теор. о 3^х перп.

и $XY \perp BC$, и $S_{CC_1B_1B} = XY \cdot BC$, и $XY = 3$

Потому $A_1H = h$, тогда $HP = \sqrt{16 - h^2}$ по м. Теорема

$\angle XAC = \frac{\angle BAC}{2} = 30^\circ$ ($\angle BAC = 60^\circ$ по сл. б.г. равнобедр. мн.)

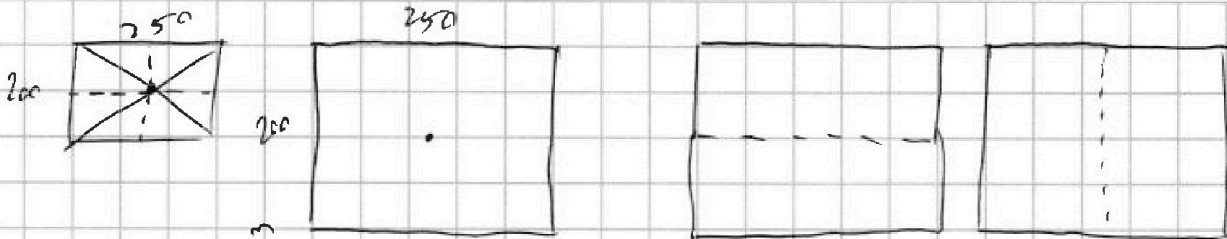


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 100 \cdot 125$$

$$4(16-k^2) + k^2 = 3$$

$$4(16-k^2) + k^2 = 3$$

$$4 \cdot 16 - 4k^2 + k^2 = 3$$

$$64 - 3k^2 = 3$$

$$3k^2 = 61$$

$$k^2 = \frac{61}{3}$$

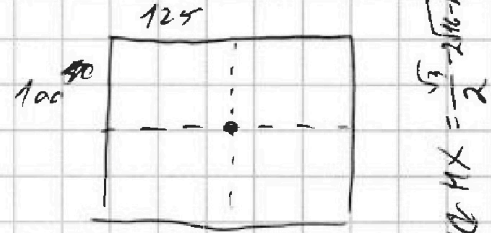
$$k = \sqrt{\frac{61}{3}}$$

$$C_{100 \cdot 250 \cdot 100}^4$$

$$+ C_{125 \cdot 200}^4 - C_{100 \cdot 125}^2$$

$$2 \cdot 250 \cdot 100$$

$$2 \cdot 200 \cdot 125$$



$$AM \cdot MX = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16-k^2}}{2}$$

$$a > b, \quad a - b \equiv_3 1$$

$$a - b \equiv_3 2$$

$$(a-b)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$

$$ab - c(a+b) = (p-c)(p+c)$$

$$a + b^2 = 560 \equiv_3 2$$

$$b \equiv_3 0, 12$$

$$b^2 \equiv_3 0, 11$$

$$a \equiv_3 1$$

$$b^2 \equiv_3 2, 0$$

$$a \equiv_3 2$$

$$a > b$$

$$a \geq b + 2$$

$$b \equiv_3 2$$

$$a \equiv_3 1$$

$$b \equiv_3 0$$

$$a \equiv_3 2$$

$$AM = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16-k^2}}{2}$$

$$AM = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16-k^2}}{2}$$

$$a + b \equiv_3 2$$

$$a - b \equiv_3 0$$

$$p^2 \geq (a-c)(b-c) \geq (b-c+2)(b-c)$$

$$= (b-c+2)^2 - 1$$

-1 0 1 2 3 4 5 6

1 0 1 4 9 16 25 36

$$p^2 + 1 \geq (b-c+1)^2$$

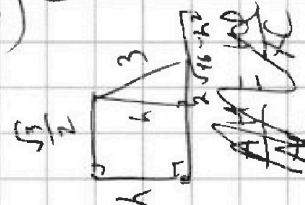
$$p^2 \geq (b-c+1)^2 = (b-c)^2 + 2(b-c) + 1$$

$$(a-c)(b-c)$$

$$p \geq |b-c+1|$$

$$p=0$$

$$|b-c+1|=1 \quad \ominus$$



$$PM = AM \cdot \frac{1}{2} = \frac{AM}{2}$$

$$(b-c)(b-c+2-a+c) + 1 \leq 0$$

$$b^2 - bc - ab + ac + 2b - 2c + 1 \leq 0$$

$$(b-c)(b-a+2) + 1 \leq 0$$

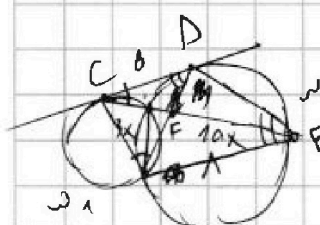


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

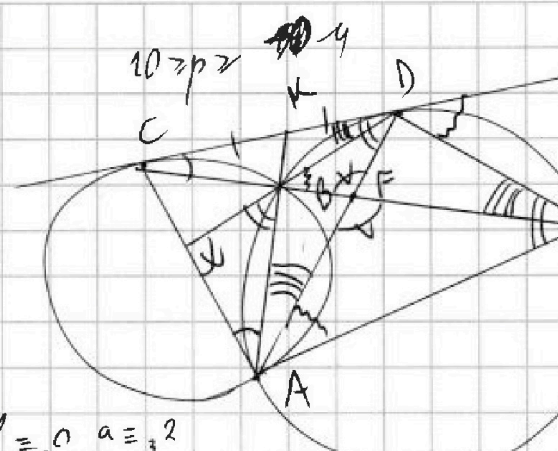
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

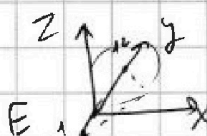


$a = 560 - b^2$
 $560 - b^2 = b \cdot 3$

b	0	1	2	\dots
b^2	0	1	1	\dots
$b^2 + b$	0	2	0	\dots
$560 - b^2 + b$	2	0	2	\dots



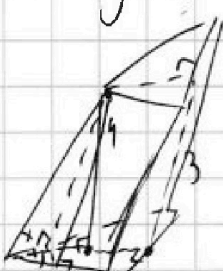
$10 \geq p \geq 4$
 $AF \cdot FD = FE \cdot BF =$
 $a \equiv 2$
 $b \equiv 3$
 $a \equiv 1$




$z = 4 - 2x$
 $z = 4 - 2x$
 $x = 1$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{CK}{CA}$$

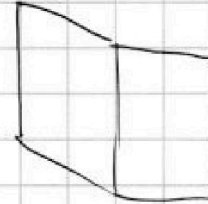
$3x + 4x - z - 2x + 25 + \dots = 4y + 4x - 4x^2 + 4z$
 $3z - z + \dots = 4y + 4x - 4x^2 + 4z$
 $4x^2 - 4x + 1 + 4z - 2 - 4y + 31 + \dots = 0$
 $(2x - 1)^2$
 $\sqrt{4y + 4z - 1 - (2x - 1)^2}$



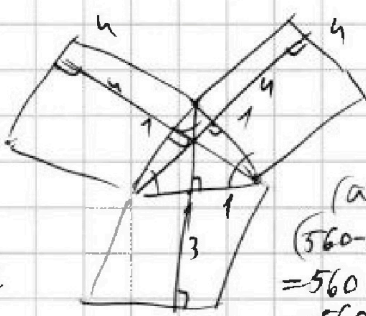
$CB \cdot CE = 4KB \cdot BA$
 $\frac{CB}{BA} = 4 \cdot \frac{KB}{CE}$
 $KB^2 = KB \cdot KA$



$a \equiv 0, a \equiv 2$



$(a-c)(b-c) \equiv (2-c)c$



$(a-c)(b-c) = 9$
 $(560 - b^2 - c)(b-c) =$
 $= 560b - b^2bc -$
 $- 560c + b^2c + c^2 =$
 $- 560b + 560(b-c) -$
 $-(b-c)(b^2 - c) = p^2$

$$-(b-c)b^2 + 560(b-c) + c(b-c) = p^2$$

$$-b^2 + 560 + c = \frac{p^2}{b-c}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 - p = 0$$

$$x+3 + 4-x-z + 25 + 2\sqrt{10}\sqrt{x+3} - 4 - 10\sqrt{4-x-z} - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x-z} = 4(y+x-x^2+2)$$

$$(y+1+9(y-12))^2 - 6|y+1||y-12| = 169 - z^2$$

$$(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$

a, b, c

$$a > b$$

$$a = 560 - b^2$$

$$560 - b^2 > b$$

$$b^2 + b - 560 > 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 560 = 2241$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+z \geq -3$$

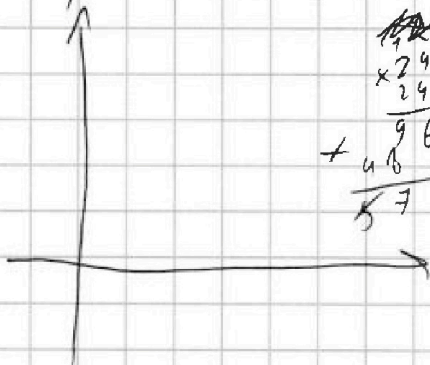
$$z \leq 7$$

$$b \geq 30, a \geq 3^2$$

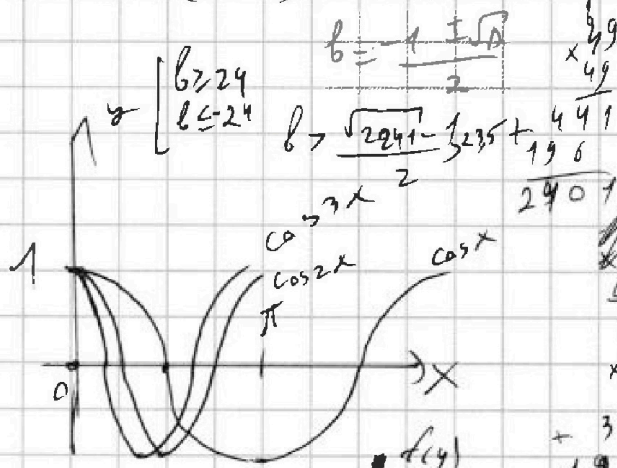
$$a \geq b+2$$

$$p^2 = (a-c)(b-c) \geq (b-1-c+2)(b-c) = (b-c)^2 + 2(b-c)$$

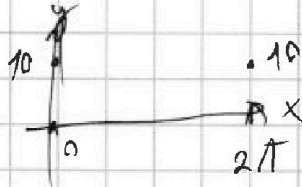
$$p^2 + 1 \geq (b-c-1)^2$$



$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline + 46 \\ 96 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} T \cos x = 2\pi & \times 1 \\ T \cos 2x = \pi & \times 2 \\ T \cos 3x = \frac{2\pi}{3} & \times 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline + 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\omega T f(x) = 2\pi$$

$$\frac{4}{4^3} + \frac{6}{4^2} + \frac{3}{4} - 3 =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} - \frac{48}{16} = \frac{1541}{16}$$

$$4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 = 0$$

$$\frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$y((2y)^2 + 3 \cdot 2y + 3) = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline + 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline + 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \end{aligned}$$

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 - p = 0$$

$$f'(x) = 12x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad f'(x) = 0 \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (2x+1)^2 = 0$$

$$2x+1=0, \quad x = -0,5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 - p = -4 - p$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 - p = 10 - p$$

$$\begin{aligned} f(-0,5) &= -4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 - p = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 - p = \\ &= -p - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{и } f(-1) < f(-0,5) < f(1)$$

$$\text{и если } f(-1) \leq 0, \quad f(1) \geq 0 \text{ или } f(-1) \geq 0, \quad f(1) \leq 0,$$

$$\text{то на } x \in [-1; 1] \text{ есть хотя бы 1 корень, и}$$

$$\exists y: \cos y = x, \text{ и есть корень } y$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot 9^6 &= \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot |x+1| \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{\frac{(13x-35)|x+1|}{x+1}} = \\ &= \sqrt{\frac{|13x-35| \cdot |x+1|}{x+1}} = \sqrt{|13x-35|}, \text{ и} \quad \sqrt{|13x-35|} = 5-x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |13x-35| = (5-x)^2 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 13x-35 = x^2 - 10x + 25 \\ 13x-35 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \quad (1) \\ x \geq \frac{35}{13} \end{cases} \\ \begin{cases} -13x+35 = x^2 - 10x + 25 \\ 13x-35 < 0 \\ x < 5 \end{cases} & \begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (2) \\ x < \frac{35}{13} \\ x < 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) \quad D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289$$

$$\text{и} \quad x = \frac{23 \pm 17}{2} \quad \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$20 > 3 \geq \frac{35}{13} \quad \text{но } 20 > 5 > 3$$

и нам подходит только $x = 3$

$$(2) \quad D = 9 + 40 = 49$$

$$\text{и} \quad x = \frac{-3 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$-5 < 2 < \frac{35}{13} < 5, \text{ и нам подходят } x = -5 \text{ и } x = 2$$

Заметим, что при $x = -5, x = 2, x = 3$ $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \neq 0$,

т.е. это 2 и) и они нам подходят.

Итого: $\{x = -5, 2, 3\}$ Сделаем проверку.

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} (a-c) = \pm p \\ (b-c) = \pm p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = -1 \\ a-c = -1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$a-c = b-c \Leftrightarrow a = b \ominus$$

$$a-c = -p^2, b-c = -1, a < b \ominus$$

$$a-c = 1, b-c = p^2, a < b \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a-b = -1 + p^2 \end{cases}$$

1) $a = p^2 + c, b = 1 + c$ 1

$$D = 289 + 4 \cdot 476 = 289 + 1912 = 2201$$

$$47 + 17 = 64$$

$$47 - 3 = 44$$

$$\begin{matrix} \times & 2 & 3 & 4 & 5 & \times & 7 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \pm & & & & & & \end{matrix}$$

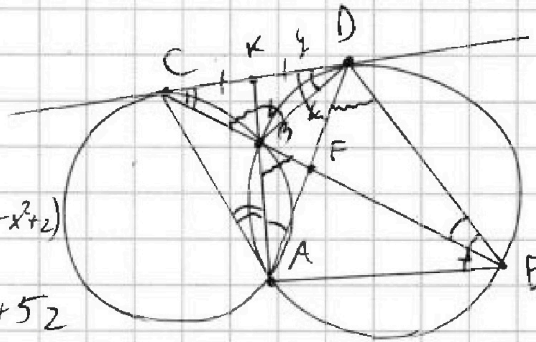
$$x+3+4-x-2+25+... = 4(y+x-x^2+2)$$

$$32+... = 4y \cdot 4x - x^2 + 52$$

$$CF = 3x, FE = 13x$$

$$CE = 13x$$

$$CD = 24$$



$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$KD^2 = KO \cdot OKA$$

$$AF \cdot FD = BF \cdot FE$$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{CD}{CE} = \frac{24}{13x}$$

$$\frac{BD}{DA} = \frac{KD}{KA}$$

$$\frac{KA}{KD} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{KA}{KD} \cdot \frac{24}{13x} = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{4y}{13x} \cdot \frac{KA}{AD}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 17 \\ \hline 329 \\ + 1190 \\ \hline 2201 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times 47 \\ \hline 259 \\ + 1510 \\ \hline 2201 \end{array}$$