



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$ , девятый член равен  $x + 3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим первый член прогрессии за  $b$ , разность за  $q$ .

$$\text{Тогда } b q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}, b q^8 = x+3, b q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\frac{b q^6 \cdot b q^8}{b q^{14}} = \frac{b^2 q^{14}}{b q^{14}} = b = (x+3) (25x-9)^{\frac{1}{2}} (x-6)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x-6)^{\frac{3}{2}}}{(25x-9)^{\frac{3}{2}}} = (x+3) (x-6)^2$$

$$b q^6 \cdot b q^{14} = (b q^{10})^2 = (25x-9)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-6)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{25x-9}{x-6} \Rightarrow$$

$$b q^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{b q^{14}}{b q^{10}} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x-6)^{\frac{1}{2}}}{(25x-9)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x-6} = q^4 \Rightarrow q = \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{4}}}$$

$$b q^6 = (x+3) (x-6)^2 \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} = (x+3) \cdot (x-6)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{другой способ},$$

$$b q^6 = (25x-9)^{\frac{1}{2}} (x-6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x+3) (x-6)^{\frac{1}{2}} = (25x-9)^{\frac{1}{2}} (x-6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$x+3 = \sqrt{25x-9} \quad |^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 25x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 19x + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-18) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 18. \quad \text{Отсюда } b = (1+3)(1-6)^2 =$$

$$= 100, \quad b_1 = (18+3)(18-6)^2 = 21 \cdot 12^2 \quad x_1 \text{ не подходит под ОДЗ} \Rightarrow$$

единственное возможное значение  $b = (18+3)(18-6)^2 =$

$$= 21 \cdot 144, \quad q = \frac{1}{\sqrt[4]{144}} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Ответ:  $x=18$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \text{ задача: } \cancel{\frac{1}{2}} (25x - 9)(x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{25}\right)(x - 6) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty)$$

$$\frac{25x - 9}{(x - 6)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \frac{9}{25}}{x - 6} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty)$$

Проверка:  $b = 21 \cdot 144$ ,  $a = \frac{1}{\sqrt{12}}$ ,  $x = 18$

$$\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = 21\sqrt[3]{12}$$

$$\sqrt[3]{b^2} = 21 \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{12\sqrt[3]{12}} = 21\sqrt[3]{12}$$

$$\sqrt[3]{b^3} = 21$$

$$\sqrt[3]{b^4} = 21 \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{12^2} = 21$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cdot \cos 3x + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 6 \cos 2x - 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x + 6 - 10 = 0$$

$$4p \cdot \cos^3 x - 3p \cdot \cos x + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 4 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

Доподлинно  $\cos x = t$ ,  $p-1 = a^3$ . Тогда уравнение принимает вид:

$$a^3 t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(at + t - 1)(a^2 t^2 - at(t-1) + (t-1)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$at + t - 1 = 0$$

$$t^2(a^2 - a + 1) + t(a - 2) + 1 = 0$$

Второе уравнение - квадратное относительно  $t$  - имеет

$$\text{дискриминант } D = (a-2)^2 - 4(a^2 - a + 1) = -3a^2 \leq 0. \text{ Для } a \neq 0$$

уравнение не имеет действительных решений. Для  $a=0$ :

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0. \text{ Отсюда } \cos x = 1, \text{ т.е. } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ p-1 = 0 \Rightarrow p=1.$$

Для первого уравнения корнем будет являться число

$$\frac{1}{a+1}. \text{ Посмотрим, когда } -1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1, a \neq -1.$$

$$1) a+1 > 0 \Rightarrow a \in (-1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq -a-1 \\ 1 \leq a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-2; 1] \cup (-1; +\infty) \\ a \in [0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in [0; +\infty)$$

$$2) a+1 < 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq -a-1 \\ 1 \geq a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -2] \\ a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \end{cases}$$

$a \in (-\infty; -2]$ , т.е. решения уравнения являются:

$$a \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty), \text{ т.е. } p \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Для } p \in (-\infty; -1) \text{ т.е. } a^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \Rightarrow$$

$$p \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Т.е. для  $p \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$  решением будет:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1+1}} \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{p-1+1}}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

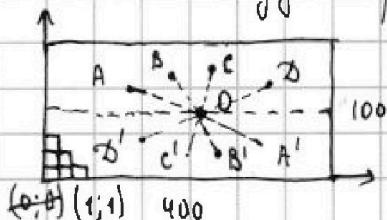
- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай с центральной симметрией.

Расположение точек определяется 4 точками, лежащими в одной из частей прямоугольника, разделенного на какой-нибудь средней линии этого прямоугольника:

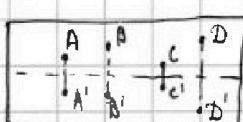


Введем в прямоугольнике прямоугольную систему координат для клеток. Тогда

для клетки с координатами  $(i; j)$  будем поставлена в соответствие клетка с координатами  $(401-i; 101-j)$ .

Тогда всего способов для этого случая  $C_{2 \cdot 10^4}^4$

Теперь рассмотрим случай для осевой симметрии относительно одной из средних линий. Расположение точек определяется расположением 4 точек в половине прямоугольника:



Точки с координатами  $(i; j)$ , где  $1 \leq i \leq 50$

будут ставиться в соответствие точка  $(i; 50-j)$ .

Таких случаев  $C_{2 \cdot 10^4}^4$ . Для второй средней линии случаев тоже  $C_{2 \cdot 10^4}^4$ . Рассмотрим случай точки симметричных относительно обеих средних линий. Расположение точек

определяется 2-мя точками, лежащими в одной четверти



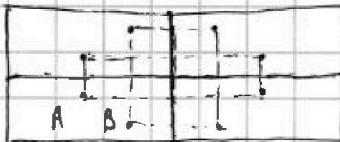
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

предшуполнника, ограниченный 2-мя средними линиями.



Для точки с координатами

$(i; j)$ , где  $1 \leq i \leq 100$ ,  $1 \leq j \leq 50$

в соответствующие ставится 3 точки с координатами

$(i; 101-j)$ ,  $(401-i; j)$  и  $(401-i; 101-j)$ . Следовательно,

всего случаев  $C_{10^4}^2$ . По формуле включения-исключения

получаем общее количество случаев для осевой симметрии:

$$C_{2 \cdot 10^4}^4 + C_{2 \cdot 10^4}^4 - C_{10^4}^2$$

Аналогично по формуле включения и исключения

получаем кол-во случаев при выборе 8 кисток, обладающих

хром бы центральный из осевой или центральной симметрии:

$$C_{2 \cdot 10^4}^4 + 2 C_{2 \cdot 10^4}^4 - C_{10^4}^2 - C_{10^4}^2 = 3 C_{2 \cdot 10^4}^4 - 2 C_{10^4}^2$$

(Если для расположения точек выполняется условие о

центральной, и осевой симметрии относительно какой-нибудь

одной, средней линии, то симметрии относительно другой

средней линии тоже выполняется, т.е. кол-во случаев в

этот варианте также равно  $C_{10^4}^2$ ).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к.  $a, b, c$  целые и  $(a-c)(b-c) = p^2$ , то возможны следующие случаи:

$$1) a-c=1, b-c=p^2. Тогда c=a-1, и b-c=b-a+1=p^2 \Rightarrow$$

$$b-a=p^2-1 \Rightarrow b-a=(p-1)(p+1). Т.к. p \geq 2, то правая часть$$

$>0$ . Т.к.  $a < b$ , то  $b-a > 0$ , т.е. противоречие нет. Пусть

$p \neq 3$ . Тогда либо  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , либо  $p \equiv -1 \pmod{3}$ , т.е. либо

либо  $p-1 \equiv 0 \pmod{3}$ , либо  $p+1 \equiv 0 \pmod{3}$  соответственно. Тогда

правая часть : 3. Противоречие, т.к.  $b-a \not\equiv 0$ . Т.е. отсюда

$$p=3, a, значит, b-a=8.$$

$$2) a-c=-1, b-c=-p^2 \Rightarrow c=a+1 \Rightarrow b-c=b-a-1=-p^2 \Rightarrow$$

$$b-a=1-p^2 \Rightarrow b-a=(1-p)(1+p), Т.к. p \geq 2, то правая$$

часть  $<0$ , а левая  $>0$ . Противоречие.

$$3) a-c=p^2, b-c=1 \Rightarrow c=b-1 \Rightarrow a-c=a-b+1=p^2 \Rightarrow a-b=(p-1)(p+1).$$

$p \geq 2 \Rightarrow$  правая часть  $>0$ .  $a < b \Rightarrow a-b < 0$ . Противоречие.

$$4) a-c=-p^2, b-c=-1 \Rightarrow c=b+1 \Rightarrow a-c=a-b-1=-p^2 \Rightarrow$$

$a-b=(1-p)(1+p)$ . При  $p \geq 2$  и  $a < b$  обе части одного знака.

Аналогично 1 случаю получаем, что  $p=3, a, значит,$

$$b-a=8.$$

$$5) если a-c=b-c=p или a-c=b-c=-p, то a=b. Противоречие.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Умножим, } b-a=8 \Rightarrow b=8+a. \quad a^2+b=a^2+a+8=710 \Rightarrow$$

$$a(a+1)=710. \quad 710=26 \cdot 27 \Rightarrow 1) \quad a=26; \quad 2) \quad a=-27.$$

Тогда  $b=34$  и  $b=-19$  соответственно. Отсюда

$c_1=25$  и  $c_2=35$  для пары  $(26; 34)$ ;  $c_3=-18$  и  $c_4=-28$

для пары  $(-27; -19)$ .

Ответ: тройки  $(a, b, c)$ :  $(26, 34, 25), (26, 34, 35), (-27, -19, -18), (-27, -19, -28)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4pt^3 - 6t^2 + 12t - 6 \stackrel{+4}{=} \frac{4}{16}$$

$$\begin{aligned} (-24-t)(-19-c) &= 9 \\ (27+c)((9+c)-9) &= 9 \\ (34-c)(26-c) &= 9 \end{aligned}$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3p \cdot 6\cos x + 4(2\cos x)^2 c (2\cos x - 1) - 10 = 0$$

$$c = -18 \quad 34 - c = 9 \Rightarrow c = -28$$

$$4p \cdot \cos^3 x - 3p \cos x + 3p \cdot 6\cos x + 12\cos x - 12\cos^3 x + 6 - 10 = 0$$

$$c = -28 \quad \frac{35}{3} \cdot \frac{13}{13} = \frac{35}{3}$$

$$4p \cos^3 x + 12\cos x - 12\cos^3 x - 4 = 0$$

$$4p t^3 + 12t - 12t^2 - 4 = 0 \quad \text{использовано уравнение } t^3 + t^2 + t + 1 = 0$$

$$p t^3 + 3t - 3t^2 - 1 = 0 \quad -27, -26, \alpha(\alpha+1) = 702$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \quad 2 \cdot 27 \cdot 13 = 20 \cdot 27$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0 \quad (p-1)^{\frac{3}{2}} t^2 - t^2 (p-1)^{\frac{1}{2}} + t ((p-1)^{\frac{1}{2}} + t - 1) + 1$$

$$(\sqrt[p-1]{t-1} + t-1) \left( (p-1)^{\frac{1}{2}} t^2 - ((t-1)^{\frac{3}{2}} (p-1) + (t-1)^2) \right) = 0$$

$$(\sqrt[p-1]{t-1})^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (a-c)(b-c) = 9 \quad \alpha = 3 \quad \beta = 1 + 4 \cdot 702$$

$$t = \sqrt[p-1]{t-1} \quad -1 \leq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{2}} + 1} \leq 1 \quad (p-1)^{\frac{1}{2}} + 1 \neq 0 \quad \beta = 1 + 4 \cdot 702$$

$$t = -1 \quad p \neq 0 \quad \beta - \alpha = 8 \quad \alpha + \beta = 5 + 1 = 6 \quad \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta = 4 \cdot 702 - 3 = 2816 + 1 = 2817$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a < b, b - a \geq 3 \quad (a-c)(b-c) = p^2 \quad a^2 + b^2 = 910$$



$$a = 2, b = 5, c = 3, d = 4 \quad \text{или } -1$$

$$p^2 = 910 \quad \beta - a = (p-1)(p+1)$$

$$a - c = b - c = p \Rightarrow a = b - 1 \quad \beta - b = (1-p)(1+p)$$

$$c = a - 1 \Leftrightarrow a - c = 1, b - c = p^2 \Rightarrow b - c = b - a + 1 - p^2$$

$$c = b + 1 \Leftrightarrow a - c = -1, b - c = -p^2 \Rightarrow b - c = b - a - 1 = p^2$$

$$c = b - 1 \Leftrightarrow b - c = 1, a - c = p^2 \Rightarrow a - c = a - b + 1 - p^2 \Rightarrow b - a = p^2$$

$$c = b + 1 \Leftrightarrow b - c = -1, a - c = -p^2 \Rightarrow a - c = a - b - 1 = -p^2$$

$$b - a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \quad a - b < 0$$

$$a - b = 1 - p^2 = (p-1)(1-p) \quad b - a > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

400 200 400 8 точек  
центр  
83 см.

600 600 600 600 600 600 600 600

4)  $\ell_1 \cup \ell_2$  сущесвтует 4 листа  
 $\ell_1 + \ell_2$   
 $\ell_1 \cap \ell_2$

и сколько листов

существует  
400-50

Установка  $\ell_1$  и  $\ell_2$

- 1)  $\ell_1 \cup \ell_2$ ,  $C_{10}^4$
- 2)  $\ell_1 \cap \ell_2$ ,  $C_{10}^3 + C_{10}^1$
- 3)  $\ell_1 \cdot \ell_2$ ,  $C_{10}^2$
- 4)  $\ell_1 \cdot \ell_2$ ,  $C_{10}^3$
- 5)  $(\ell_1 \cup \ell_2) \cdot \ell_2$ ,  $C_{10}^4$

Установка  $\ell_1$  и  $\ell_2$  лучше для  
оставшегося центра

Установка +  
+ центр

$\Delta CBA \sim \Delta CDE$

$\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{CE} = \frac{CA}{CE}$

$\frac{CT}{TE} = \frac{2}{5}$

$\frac{ED}{CD} = \frac{1}{2}$

$\frac{CT}{TE} = \frac{BC + BT}{TE}$

$\frac{CT}{TE} = \frac{BB \cdot CE}{TE}$

$\frac{BD}{CE} = \frac{CT}{CE}$

$\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{CE}$

$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$80^c = \sqrt{(25x-3)(x-6)}$	$80^c = \sqrt{8+x+3}$	$80^c = \sqrt{\frac{25x-3}{(x-6)^2}}$	$t - \text{номер задачи}$ $\cos^2 x - \sin^2 x =$ $= 2 \cos^2 x - 1$
$69^c = \sqrt[4]{(25x-3)(x-6)} \cdot \sqrt{x-3}^2$ $\Rightarrow \frac{69^c}{69^c} = t = \sqrt{(25x-3)(x-6)(x-3)}$ $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2(x-6)^2} = (x-3)(x-6)$			
$69^c = \sqrt{(25x-3)(x-6)} = (x-3)(x-6) \Rightarrow$ $\text{бесконечн.} \sqrt{80^c}^4 = 6^4 = \sqrt{(25x-3)(x-6)(x-3)} \Rightarrow (x-3)(25x-3)(x-6) \Rightarrow$			
$\frac{69^c}{69^c} = \frac{t^4}{x+3} = \frac{6^4}{x+3} \cdot \frac{80^c}{80^c} \cdot \frac{69^c}{69^c}^4$ $(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$ $p-1 - \text{паралл.} \Rightarrow$ $\text{обозначим } p-1 = a^3$		$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x + 10$ $\cos(3x) = \cos(2x+x) =$ $= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$ $= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \cos x =$ $= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$ $= \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) =$ $= \cos x (4 \cos^2 x - 3) =$ $4p \cos^3 x - 3p \cos x$	
	$\frac{CT}{TE} = 2$ $\frac{TE}{CD} = 5$ $\frac{ED}{CD} = 9$ $\frac{CD}{CD} = 1$	$4p \cos^3 x + 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x -$ $- 6 \cos^2 x + 10 \Rightarrow$ $4p \cos^3 x - 6 \cos^3 x + 12 \cos x + 10 = 0$	$t^3 - t^2 + 12t + 10 = 0$ <del><math>t = 1</math></del> $t = 10$
$x^2 + 6x + 9 = 25x - 3$ $441 \cdot 9$ $49 \cdot 9 \cdot$ $450 \cdot 9 =$ $\Rightarrow 441 \cdot 12$			$4p \cdot t^3 - 6t^2 + 12t + 10 = 0$
$Q^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$ $\text{см. } CB \text{ и } CE$ $\Rightarrow p \in (-\infty; -7) \cup [1; +\infty)$ $E = AT \cdot TD$			



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^3x^3 + (x-1)^3 = 0$$

$$a^5 \approx p-1$$

$$\begin{aligned} & (2x+x-1) \left( x^2 - ax(x-1) + (x-1)^2 \right) = \\ & = (x(a+1)-1) \left( x^2 - ax^2 + ax + x^2 - 2x + 1 \right) = (x(a+1)-1) (x^2(a^2-a+1) + x(a-1)+1) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{a+1} \\ -1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{array} \right. \\ & x^2(a^2-a+1) + x(a-1) + 1 = 0 \\ & D = (a-1)^2 - 4(a^2-a+1) = 4a^2-4a+4 - 4a^2+4a-4 = -3a^2+4a-4 < 0 \Rightarrow \text{корни мин.} \end{aligned}$$

$$-1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{array} \right. \quad a \neq -1$$

$$a+1 \geq 0 \Rightarrow a \in (-1, +\infty)$$

$$(x+3)(x-6)^1$$

$$1 \leq a+1$$

$$a > 2 \quad a \in (0, +\infty)$$

$$a+1 < 0$$

$$a \in (-\infty, -1)$$

$$4+4+25+15+3=46$$

$$\sqrt[3]{B} = \frac{(x+3)(x-6)}{x-6} \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x+3)}{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}(x-6)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{E} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)(x-6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{(x+3)(x-6)} = (25x-9)^{\frac{1}{2}}(x-6)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{F} =$$

$$F = (x+3)(x-6)$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{2}}}} = (x+3)(x-6) \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{(x-6)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x+3}{x-6} \cdot (25x-9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{E} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)(x-6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{1}{2}}} =$$