



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$003: (13x-35)(x+1) \geq 0 \quad x+1 \neq 0$$

$$\text{VII} \quad a \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\downarrow \\ x \in \cancel{(-\infty; -1)} \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$$\text{XIII} \quad a \cdot q^{12} = 5-x$$

$$\frac{\text{XV}}{\text{XIII}}: q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{13x-35}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$\text{XV} \quad a \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a \cdot q^{14} = a \cdot q^{12} \cdot q^2$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{|13x-35|} \cdot \sqrt{|x+1|} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$x = -1 \text{ (X)} \quad \sqrt{|13x-35|} = \begin{cases} 5-x & |x \leq 5 \\ \end{cases}$$

$$|13x-35| = (5-x)^2$$

$$x \in (-\infty; -1): \quad x \in \left[\frac{35}{13}; 5\right]$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$13x - 35 = 25 - 10x + x^2$$

$$0 = x^2 + 3x - 10$$

$$0 = x^2 - 23x + 60$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$(x-20)(x-3) = 0$$

$$x = \{-5; 2\}$$

$$x = \{3; 20\}$$

$$x = -5$$

$$x = 3$$

$$x = 3: \quad \left. \begin{array}{l} q^2 = \sqrt{|3+1|} = 2 \\ \text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \frac{1}{4} \\ \text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5-3 = 2 \\ \text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(39-35)(4)} = 4 \end{array} \right\} \text{ всё работает, } a_n = 2^{\frac{(n-11)}{2}}$$

$$x = -5: \quad \left. \begin{array}{l} q^2 = \sqrt{|-5+1|} = 2 \\ \text{VII}: a \cdot 2^3 = \sqrt{\frac{-65-35}{-4^3}} = \frac{10}{2^3} \\ \text{XIII}: a \cdot 2^6 = 5 - (-5) = 10 \\ \text{XV}: a \cdot 2^8 = \sqrt{(-65-35)(-4)} = 10 \cdot 2 \end{array} \right\} \text{ всё работает, } a_n = 10 \cdot 2^{\frac{(n-13)}{2}}$$

$$\text{Ответ: } x = \{-5; 3\}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

~~$\cos \varphi = \cos \varphi \cdot 1 + \sin \varphi \cdot 0$~~   
 ~~$\cos \varphi = \cos \varphi \cdot 1 + \sin \varphi \cdot 0$~~   
 ~~$\cos \varphi = \frac{1}{2}$~~

$$\cos(3x) + 3\cos(2x) + 6\cos x = p$$

~~$\cos(3x) = \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x$~~   
 ~~$\cos(3x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$~~   
 ~~$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$~~

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) + 3(2\cos^2(x) - 1) + 6\cos x = p \quad t = \cos(x); \quad t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$p = 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = y$$

Экстремумы:

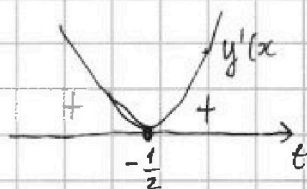
$$y'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

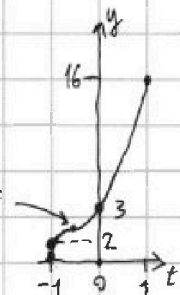
$$t = -\frac{1}{2}$$

(перелом)  $\Rightarrow y(t)$  — монотонная ф-я



$$\begin{aligned} y(-1)(\min) &= -4 + 6 - 3 + 3 = 2 \\ y(1)(\max) &= 4 + 6 + 3 + 3 = 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p \in [2; 16]$$



$$\begin{aligned} y(-\frac{1}{2}) &= -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} + 3 = \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

~~Производная симметрична~~  
относительно  $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)$  симметрична относительно точки  $(-\frac{1}{2}; 2,5)$ , то есть

$$\begin{aligned} 4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 &= \\ &= (4t^3 + 4t^2 + t) + (2t^2 + 2t + \frac{1}{2}) + 2,5 = \\ &= t(2t+1)^2 + \frac{1}{2}(2t+1)^2 + 2,5 = \\ &= 4(t + \frac{1}{2})^3 + 2,5 \end{aligned}$$

~~$y(-1-t) = 2,5 - (y(t) - 2,5)$~~   
 ~~$y(-1-t) = 2,5 - y(t)$~~

$$y = 2,5 + 4(t + \frac{1}{2})^3$$

~~$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$~~

~~$4(-1-t)^3 + 6(-1-t)^2 + 3(-1-t) + 3 = p$~~

$$\frac{p - 2,5}{4} = (t + \frac{1}{2})^3$$

$$t = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}$$

Ответ:  $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p - 2,5}{4}}) + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

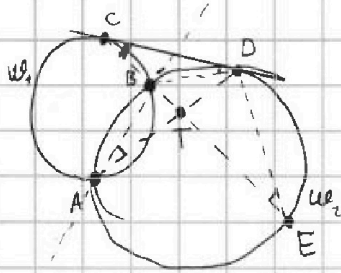


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$\frac{CT}{TE} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{CT}{CE} = \frac{3}{13}$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

~~DE/AB~~  
~~DE~~  $\frac{DE}{CE} = \frac{BD}{CD}$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow BD^2 = CB \cdot DE$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{\sqrt{CB \cdot DE}}{CD}$$

$$\frac{DE \cdot CB}{CD^2} = \frac{\sqrt{CB \cdot DE}}{CD} = 1$$

~~a/b/c/d~~ ~~a/b/c/d~~  
~~a/b/c~~  
~~a/c/d~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

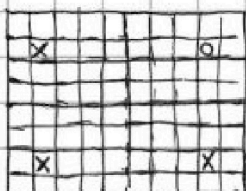


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5



Для каждой ~~клетки~~ <sup>клетки</sup> могут выставляться 1, 2 или 3 симм. Разобьём 8 наших клеток на группы взаимноисм., состоящие из 2, 3 или 4 клеток. Это можно сделать 4 способами:

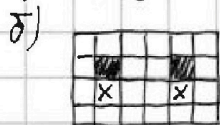
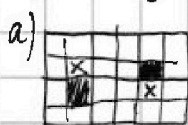
I  $8 = 2+2+2+2$

II  $8 = 2+2+4$

III  $8 = 4+4$

IV  $8 = 3+3+2$

1) Группа из двух задаётся одной клеткой и бывает двух типов:



a) имеет 2 симм. положения:  $\begin{matrix} x & \\ & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & x \\ x & \end{matrix}$

б) имеет 4 симм. положения:  $\begin{matrix} x & x \\ x & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} x & \\ & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & x \\ x & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & \\ & x \end{matrix}$

группе две симм. клетки вычёркиваются,

чтобы при добавлении следующей группы новая клетка не стала частью этой

2) Группа из 3 задаётся одной клеткой и бывает одного типа:



имеет 4 симм. положения:  $\begin{matrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & x & \\ x & & \\ & & x \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & x \\ x & & \\ & x & \end{matrix}$ ;  $\begin{matrix} & & \\ x & & \\ & x & \end{matrix}$

3) Группа из 4 задаётся одной клеткой однозначно:



=> Для каждого способа группировки (I; II; III; IV) зададим каждую группу клеткой в правой верхней четверти.

I:  $N_I = C_{12500}^4 \cdot 6^4$  ← 6 <sup>видов</sup> групп по 2  
 (4 группы по 2)

II:  $N_{II} = C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 \cdot 1!$   
 (2 группы по 2) (оставшаяся группа по 4)

III:  $N_{III} = C_{12500}^2 \cdot 1^2$

IV:  $N_{IV} = C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$

Ответ:  $N = N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV} = C_{12500}^4 \cdot 6^4 + C_{12500}^2 \cdot 6^2 \cdot 12498 + C_{12500}^2 + C_{12500}^2 \cdot 4^2 \cdot 12498 \cdot 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6:

I.  $a; b; c \in \mathbb{Z}$

II.  $a > b$

III.  $a - b \neq 3$

IV.  $(a - c)(b - c) = p^2$

V.  $a + b^2 = 560$

V.  $a + b^2 = 560$

+II  $b + b^2 \leq 560$

$b^2 + b - 560 \leq 0$

$\Delta = 1 + 4 \cdot 560 = 2241$

$b \in \left( \frac{-1 - \sqrt{2241}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2241}}{2} \right)$

$b \in [-24; 23]$

$a = 560 - b^2$

$a - b = 560 - b^2 - b$

560 | 2  
2280 | 2  
140 | 2  
40 | 2  
35 | 5  
7 | 7

$\sqrt{2241} = 47$   
 $\begin{array}{r} 560 \\ \times 4 \\ \hline 2240 \\ \hline \end{array}$   
 $\begin{array}{r} 560 \\ \times 42 \\ \hline 1120 \\ 1120 \\ \hline 23520 \\ \hline \end{array}$   
 $\begin{array}{r} 560 \\ \times 23 \\ \hline 1680 \\ 1120 \\ \hline 12800 \\ \hline \end{array}$   
 $a = -16$

III	b	b <sup>2</sup>	b <sup>2</sup> (mod 3)	b(mod 3)	560(mod 3)
	1	1	1	1	2
	2	4	1	2	2
	3	9	0	0	2
	4	16	1	1	2
	5	25	1	2	2
			0	0	2

$\Rightarrow b \not\equiv 1 \pmod{3}$

$b = \{ \dots -10 -9 -7 -6 -4 -3 -1 0 2 3 5 6 8 9 11 12 14 15 17 18 20 21 23 \}$

IV  $(a - c)(b - c) = p^2$

$\begin{cases} a - c = 1; b - c = p^2 \\ a - c = -1; b - c = -p^2 \\ b - c = 1; a - c = p^2 \\ b - c = -1; a - c = -p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} b - a + 1 = p^2 \times a > b \\ b - a - 1 = -p^2 \\ a - b + 1 = p^2 \\ a - b - 1 = -p^2 \times a > b \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1$

$\Rightarrow 560 - b^2 - b = p^2 - 1$

$560 - b^2 - b = 1$

$560 - b^2 - b = p^2 - 1$

$\Delta = 1 + 4(560 - p^2 + 1) = (\text{квадрат неч. числа}) \rightarrow \text{целое } b$

$1 + 4 \cdot 560 + 4 - 4p^2 = \text{неч}^2 \rightarrow \text{неч}^2 \pmod{4}$

$\frac{(2n-1)^2 - 1}{4} = \frac{4n^2 - 4n}{4} = n^2 - n$

$1 + 4 \cdot 561 - 4p^2 = 561 - p^2 = \frac{\text{неч}^2 - 1}{4}$

$561 - p^2 = n^2 - n = b^2 - b$

$p: 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \dots$



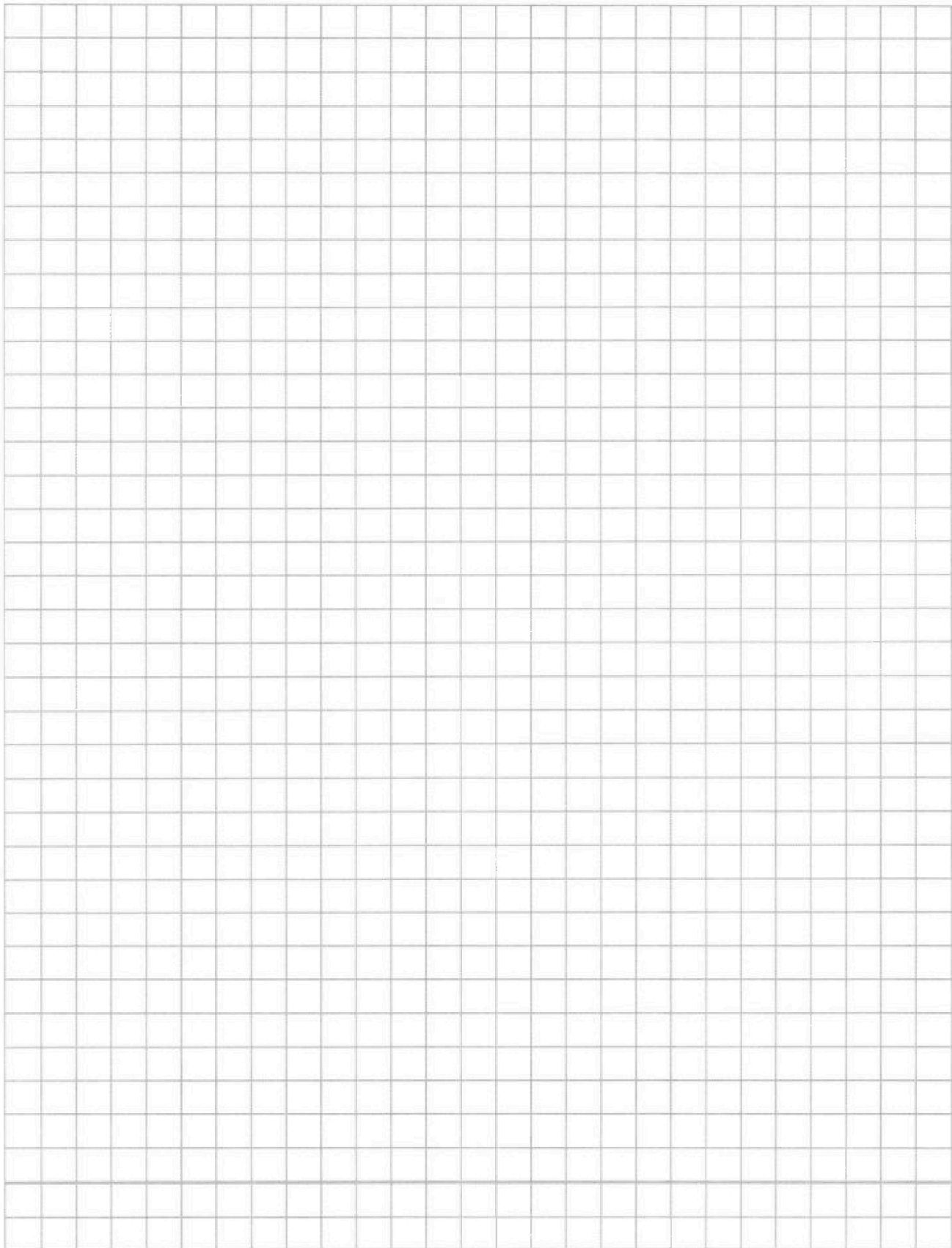


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





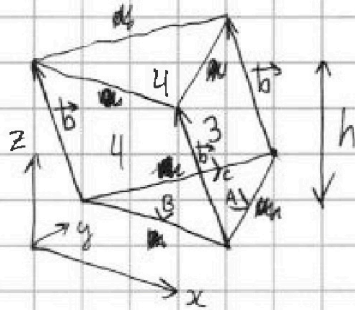
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Обозначим двугранные углы при основании за  $A$ ;  $B$  и  $C$ , тогда:

$$\frac{h}{\sin A} = 3$$

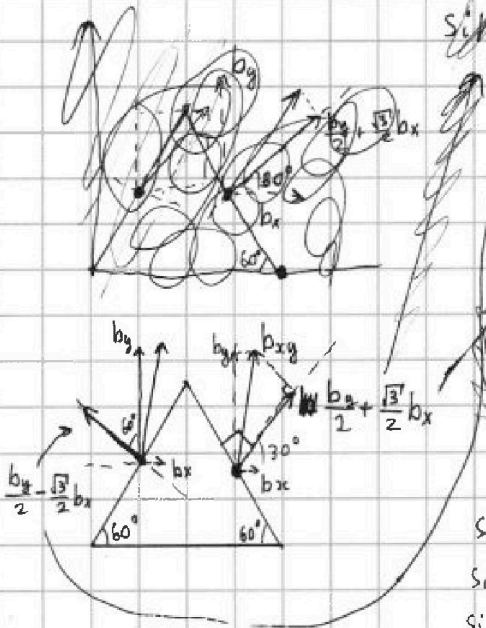
$$\frac{h}{\sin B} = 4$$

$$\frac{h}{\sin C} = 4$$

Пусть  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ , тогда

$$\sin B = \frac{b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{4} \Rightarrow \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = 4$$

~~$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{h}{4} = \frac{3}{4}$$~~



$$\sin A = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2}} = \frac{h}{3}$$

$$\sin C = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2}} = \frac{h}{4}$$

$$\begin{cases} \sin B: & h^2 + b_y^2 = 16 \\ \sin A: & h^2 + (\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2 = 9 \\ \sin C: & h^2 + (\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{9 - h^2}$$

$$\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$b_y = \pm \sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2} = \pm \sqrt{16 - h^2}$$

$$h^2 = 9$$

$$h = 3$$

$$b_y = \sqrt{7}$$

$$b_x = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \quad b_z = 3$$

Ответ:  $h = 3$

~~$b_y^2 = 16 - h^2$~~   
 ~~$\frac{b_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{9 - h^2}$~~   
 ~~$\frac{b_y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} b_x = \pm \sqrt{16 - h^2}$~~   
 ~~$b_y = \pm \sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2}$~~   
 ~~$4 - h^2 = (\sqrt{9 - h^2} \pm \sqrt{16 - h^2})^2$~~   
 ~~$h \in \mathbb{R}$~~   
~~невозможно или~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

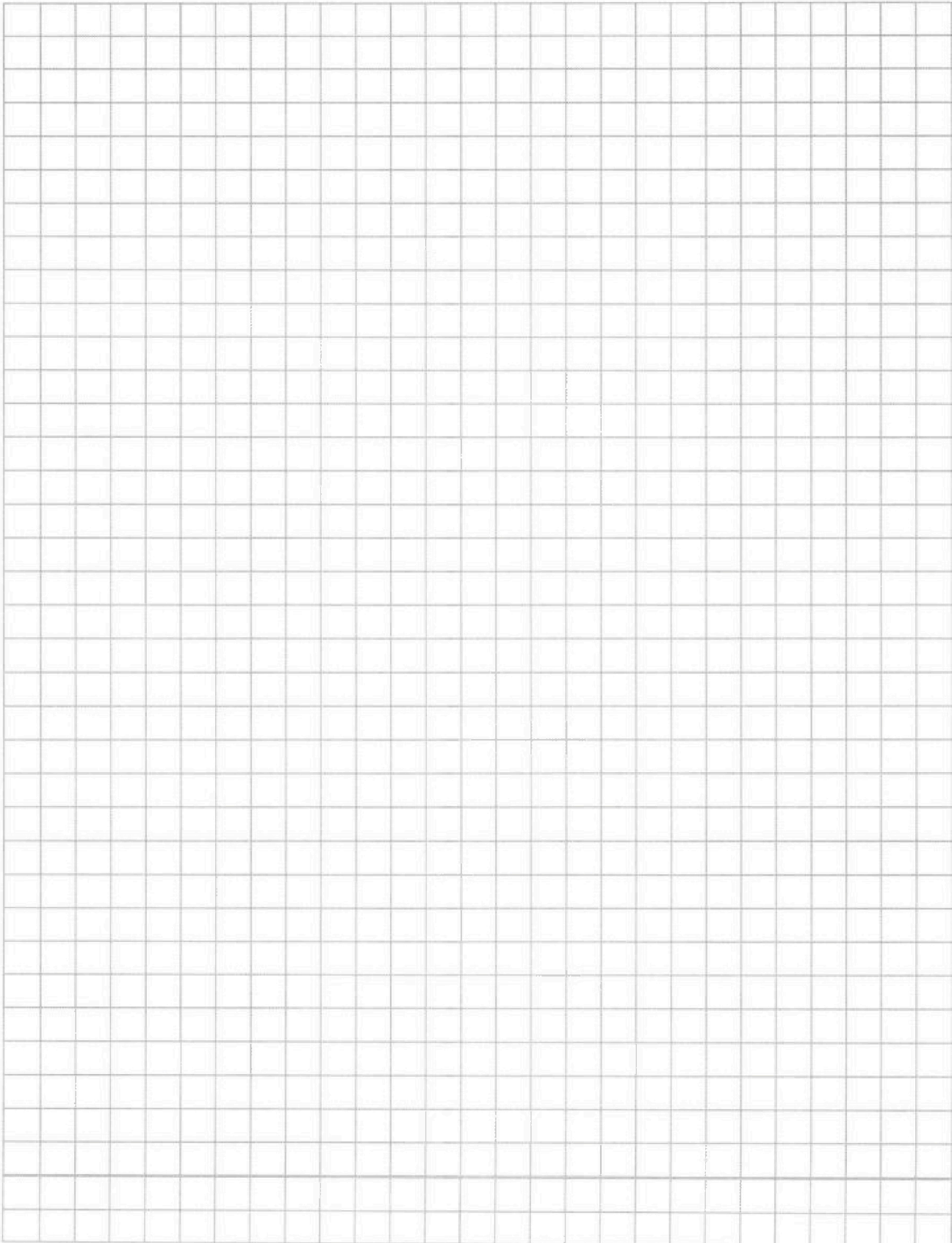


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

