



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $b-1$  член прогрессии,  $q$  - ее знаменатель. тогда из условия:  
 $bq^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$   $x \neq 5, x \neq 35, x \neq -1$ , т.к. или иначе система  
 не имеет, или это геом. прогрессия (2 члена  
 $bq^{12} = \sqrt{5-x}$   $0$ , а третий - нет).  $b, q \neq 0$  однозначно.

$$bq^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{bq^{14}}{bq^6} = q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Leftrightarrow q^4 = |x+1| \Leftrightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

1сл.)  $x < -1$ . тогда  $q^2 = \sqrt{-(x+1)}$ , а  $bq^{12} = bq^{14} : q^2 =$   
 тогда  $13x-35 < 0$ .

$$= \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{-(x+1)}} = \sqrt{35-13x} = 5-x \quad (2) \quad \begin{cases} 35-13x \geq 25-4x+x^2 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 20 \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x \geq -5 \text{ из того, что } x < -1, \\ x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases}$$

2сл.)  $x > 13/35$  (т.к. оба корня отриц.) тогда  $5-x = bq^{12} = \frac{bq^{14}}{q^2} =$

$$= \frac{\sqrt{13x-35}}{q^2} \quad (2) \quad \begin{cases} 25-4x+x^2 = 13x-35 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x^2 - 23x + 60 \geq 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x \geq 20 \\ x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases}$$

Ответ:  $\{3; -5\}$

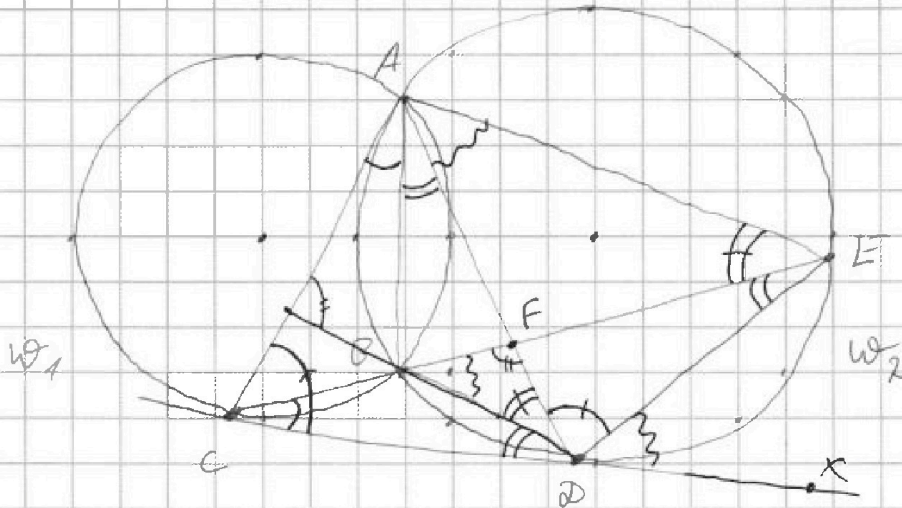


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1)  $F = AD \cap CE \Rightarrow$  по условию,  $\frac{CF}{FE} = \frac{3}{10}$ .
- 2)  $\angle BCD = \angle CAB$  как угол между хордой и кас-ой. аналог,  $\angle BAD = \angle BDC$ .
- 3)  $\angle FBD = \angle BCD + \angle BDC$  как внешний.
- 4)  $\angle FBD = \angle EDX = \angle DAE$  как угол между хордой и кас-ой.
- 5)  $\angle C = \angle CAB + \angle BAD = \angle BCD + \angle CDB = \angle FBD = \angle DAE \Rightarrow \angle CAD + \angle BAD = \angle CAD = \angle FAE \Rightarrow AD$  - диаметр в  $\triangle CAE$  по оп-ию  $\Rightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$ .
- 6)  $\angle ACD + \angle CAD = \angle ADX = \angle ADE + \angle EDX = \angle ADF + \angle FDE = \angle ADE + \angle FDE = \angle AFE$   
 $\angle CAD \Rightarrow \angle ACD = \angle ADE$ . тогда  $\triangle ACD \sim \triangle DAE$  по I оп-ию  $\Rightarrow$   
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$  если  $AC = 3y$ , то  $AE = 10y$  (из п. 5), и тогда  $AD = y\sqrt{10}$ .  
 тогда  $\frac{AC}{AD} = \frac{3y}{y\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$  из подобия,  $\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разделим наш прямоугольник на 4 прямоугольника по "средним линиям". Тогда поставив тот же квадрат в один, мы однозначно определим по оси симметрии, какой в каком прямоугольнике закрашен еще квадрат.  $\frac{1}{2}$

1) Пусть у нас задействована только 1 симметрия по  $\frac{1}{2}$  в одной прямоугольнике закрашивается квадрат  $6'$  симметричном по горизонтальной оси - еще 1. а из группы  $4$  квадрата ~~выбирается квадрат симметричный по горизонтальной оси (т.е. какие привнесет симметрия к 2 квадратам)~~ тогда если необходимо ~~поставить~~ как-то <sup>распределить</sup> 4 квадрата, остальные определяются однозначно ~~вдоль~~ если нам, что при симметрии мы получим группу или дополнительно, т.е. возможно, если для ~~каждого~~ первого два квадрата поставят в симметричные позиции по горизонтальной оси. то если для двух квадратов, не поставив друг друга в симметричные по горизонтальной оси позиции, эта ситуация определена однозначно (а точнее, <sup>в зависимости</sup> ~~симметрично~~), так как можно переставить их на 4 позиции по 2, т.е.  $C_4^2 = 6$ .)

Тогда разделим все прямоугольники на 2 прямоугольника, если по средним линиям, или 2 треугольника, если по центру. Тогда мы ~~расставим~~ <sup>распределим</sup> 4 квадрата среди  $100 \cdot 250$  клеток.

Так как симметрия  $3$ , то вариантов это будет  $3 \cdot 100 \cdot 250$ , но по группе  $4$  поставили ~~дважды~~ (т.е. и по вертикали) симметрии, тогда, надо учесть 2 варианта ~~двойной~~ сим-ии, а таких вариантов, если воспользоваться двойной симметрией ~~на 4~~ -  $\frac{C_{25}^1 \cdot C_{625}^1}{2}$ , так как ~~назначается~~ один и тот же квадрат.

Тогда итог:  $3 \cdot C_{2500}^4 = 625 \cdot 624$ .

Ответ:  $3 \cdot C_{2500}^4 = 625 \cdot 624$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если  $(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - простое, то есть несколько вариантов, как представить  $(a-c)$  и  $(b-c)$  через  $p$  и  $\pm$  (как множители квадрата)

$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$  и, так как  $a > b$ , то возникает 2 случая:

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

1сл.)  $a = c+p^2$  тогда  $a-b = p^2-1$  и не кратно 3  
 $b = c+1$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

так как квадраты делятся на 3 тогда можно рассмотреть случаи  $0$  или  $\pm 1$  (нулю число  $n = 3k+2$ ,

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$$

где  $0 < 2 < 3$  тогда  $n^2 = 9n^2 + 6n^2 + 2^2$ , тогда  $n^2 \equiv 2^2$ , если  $2=0$ , то  $n^2 \equiv 0$ ,  $2=1$  или  $2$ , то

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}$$

$2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ), то  $p^2$  делится на 3, следовательно

меньше,  $p^2 \equiv 9 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 3$  найдем все это в

$$a+b^2 = 560; \quad c+p^2+c^2+c+1 = 560 \Leftrightarrow c^2+3c = 550 \Leftrightarrow (c+25)(c-22) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -25, \text{ в таком случае: } c = -25, b = -24, a = -16 \\ c = 22, \quad c = 22, b = 23, a = 31. \end{cases}$$

2сл.)  $a = c-1$  аналогично,  $p = 3$ , тогда  $c-1+c^2-2c^2+p^2 = 560 \Leftrightarrow$

$$c^2 - 17c = 490 \Leftrightarrow (c-32)(c+15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 32 \\ c = -15 \end{cases}$$

6 таких случаев,  $c = 32, b = 23, a = 31$   
 $c = -15, b = -24, a = -16$

Ответ:  $\{(-16; -24; -25), (31; 23; 22), (31; 23; 32), (-16; -24; -15)\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-p \\ b = c-p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+p \\ b = c+p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+p^2 \\ b = c+1 \end{cases} \oplus$$

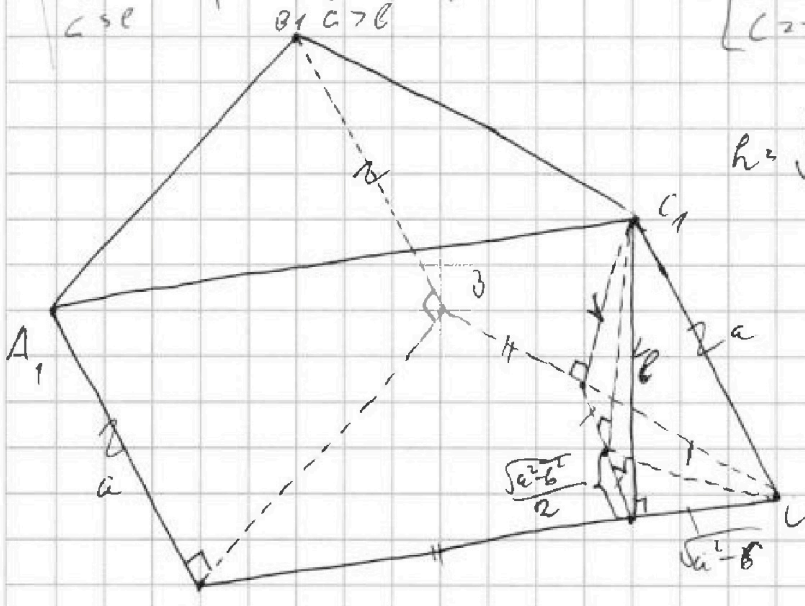
$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-p^2 \\ b = c-1 \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases} \oplus$$

1а)  $a = c+p^2, b = c+1, p^2 \neq 1, 3$   
 $c+p^2 + c^2+2c+1 = 560, p^2 \neq 1$   
 Но  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$  или  $p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3$   
 $c+3c = 550, 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5$   
 $c = 25 \Rightarrow \begin{cases} a: 24, b: 24, c: 25 \\ c: 22 \Rightarrow \begin{cases} a: 31, b: 23, c: 22 \end{cases} \end{cases}$

2а)  $a = c-1, b = c-p^2$  аналогично,  $p=3$   
 $c-1 + c^2 - 2p^2c + p^4 = 560$   
 $c^2 - 14c + 81 = 560$   
 $c^2 - 14c + 480 = 4 \cdot 120 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$   
 $\begin{cases} c = 35 \Rightarrow a: 34, b: 26, c: 35 \\ c = 15 \Rightarrow a: -6, b: -24, c: -15 \end{cases}$



$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 - b^2}{4}} = \sqrt{\frac{5b^2 - a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{x+3}, \quad a+b = 7-z$$

$$b = \sqrt{4-x-z}$$

$$ab = \sqrt{(x+3)(4-x-z)} =$$

$$= \sqrt{4x+12 - x^2 - 3x - z^2 - 3z} =$$

$$= \sqrt{x^2 - x^2 - z^2 + 12 - 3z}$$

лучше одной сим-ти: уделить на 4, закрывав в одну, закрывав в одну симметричную позицию, тогда для закрываем

$$3 \left( 4 \cdot C_{625}^1 \cdot 4 \cdot C_{624}^1 \cdot 4 \cdot C_{623}^1 \cdot 4 \cdot C_{622}^1 \right) = 384 \cdot 625 \cdot 624 \cdot 623 \cdot 622$$

или 2 симметрии, но закрывав 1, мы точно закрывав еще 2, значит, еще 1-автономности, тогда необходимо к клетке.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot C_{625}^1 \cdot C_{624}^1, \quad 2 = 384 \cdot 625 \cdot 624 \cdot 623 \cdot 622 + 4 \cdot 625 \cdot 624 =$$

$$= 625 \cdot 624 (96 \cdot 623 \cdot 622 + 1)$$



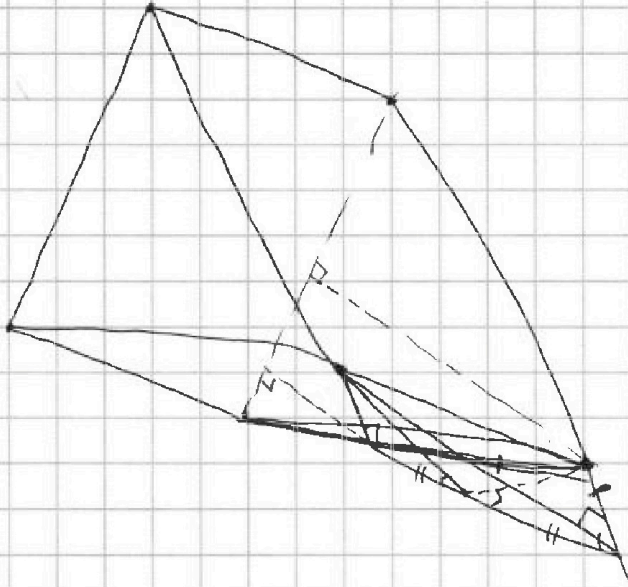


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[11]{b, q} \begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b \cdot q^{12} = 5-x \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \neq -1 \\ q^6 &= (x+1)^2 \Rightarrow q^7 = \frac{1}{2}(x+1) \\ \Rightarrow q^2 &= \sqrt{13x+1} \\ b \cdot q^7 &= \sqrt{5-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1a.) \quad x < -1. \quad q^2 &= \sqrt{-(x+1)} \quad b \cdot q^{12} = b \cdot q^6 \cdot q^4 \cdot q^2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ \sqrt{-(x+1)} \cdot \sqrt{-(x+1)} &= \sqrt{13x-35} \Rightarrow \sqrt{35-13x} = 5-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35 - 26 \cdot 35x + 169x^2 &= 35 - 13x + 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \oplus \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a.) \quad x \geq \frac{35}{13} \quad q^2 &= x+1 \quad \begin{cases} \sqrt{13x-35} = (5-x) \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 13x-35 = 25-10x \\ \Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \oplus \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 3, -5

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 &= 2\sqrt{y+x-x^2+2} \\ \sqrt{y+1} + 3\sqrt{y-2} &= \sqrt{169-2^2} \\ \sqrt{y+1} + 3\sqrt{y-2} &= \sqrt{169-2^2} \\ 16y^2 - 4y - 35 &= 169 - 2^2 \Leftrightarrow 16y^2 - 16 \cdot 35y + 35^2 = 169 - 2^2 \\ \Leftrightarrow 16y^2 - 560y + 5625 &= 167 \\ \Leftrightarrow 16y^2 - 560y + 5458 &= 0 \end{aligned}$$

√3

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x &= p \\ 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x &= p \\ 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 &= p \\ f = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 \quad (2 \cos x + 1)^2 = 0 \\ \geq 0 \Rightarrow f \text{ не убывает} \Leftrightarrow \cos x = -1/2 \text{ - минимальное значение} \\ \text{максимум: либо } x \text{ либо } -x \quad 4+6+3-3=p \Rightarrow p=10, \quad f(-1)=4 \Rightarrow p \in [4; 10] \\ -4/8 \quad 3/2 \quad 6/x \quad 3 = \frac{4-12+12}{8} = 3/2 \quad -4+6-3-3=p \Rightarrow p=-4, \quad f(1)=20 \end{aligned}$$



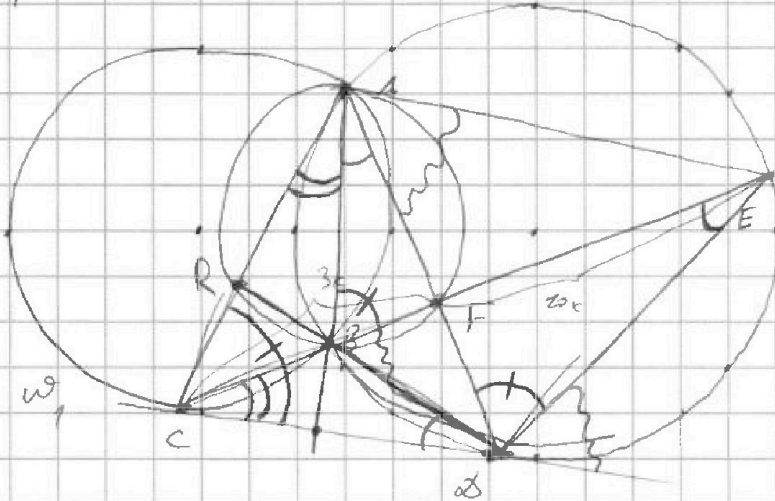
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$\frac{FE}{DR} = \frac{DE}{CP}$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\omega_2 \frac{AC}{AE} = \frac{3}{20}$$

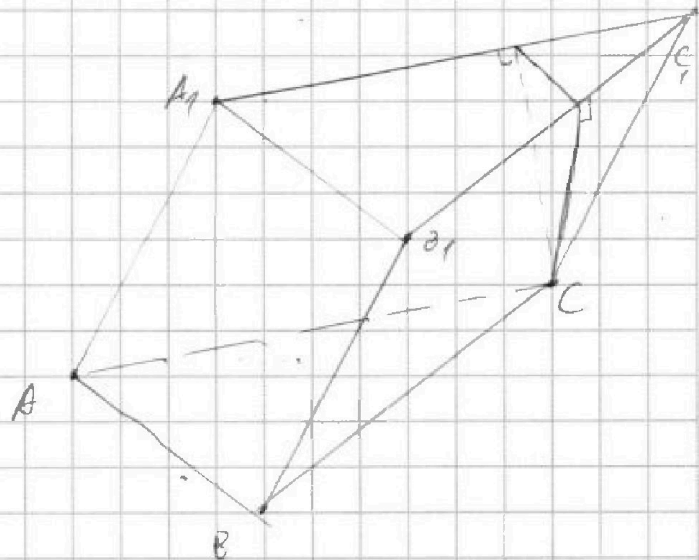
15



относительно "средней линии" -  $C_{\text{ср}}^4$   
разделен на 4 прямоугольника ( $50 \cdot 125$ )  
идем по одной из сторон. Тогда в сумме  
 $\omega$  - не определена по условию задачи

сумма упрощается, тогда  $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^3 \cdot C_4^4 \cdot C_4^4$

2



$$\begin{cases} b = c + 1 & a = c + 1 \\ a = c + 1 & b = c + 1 \\ a = c + 1 & b = c + 1 \\ b = c + 1 & a = c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 1 \end{cases}$$

$$a = c + 1 \quad b = c + 1$$

$$b = c + 1 \quad a = c + 1$$

$$a = c + 1 \quad b = c + 1$$

$$b = c + 1 \quad a = c + 1$$