



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$ , девятый член равен  $x+3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ задачи 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ или } x=18 \\ x>0 \\ x=0 \text{ или } x=-31 \\ x<1/5 \end{cases}$$

⇓

$$x=18 \text{ или } x=-31, \text{ или } x=0.$$

Проверка:

$$x=18 \quad a_7 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(12)} = \sqrt{(50 \cdot 9 - 9)12} = \sqrt{9 \cdot 49 \cdot 12} = 2 \cdot 42\sqrt{3}$$

$$a_9 = 21$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{12^3}} = \frac{21}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{7}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$\text{Тогда } d = \frac{21}{42\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{3}}{24}$$

Если  $x=18$  подходит.

$$7\sqrt{3} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 21 \cdot 24$$

Если  $x=0$ , то

$$14 \cdot 3 \cdot 12 = 21 \cdot 24$$

$$a_7 = \sqrt{(-9)(-6)} = 3\sqrt{6}$$

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

правда!

$$a_9 = 3$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{-9}{(-6)^3}} = \sqrt{\frac{3^2}{3^3 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{Тогда } d = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \text{ - правда!} \Rightarrow x=0$$

подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 продолжение

При  $x = -31$

$$a_7 = \sqrt{(-31 \cdot 25 - 9)(-37)} \quad a_9 =$$

$$= \sqrt{766 \cdot 37}$$

$$\begin{array}{r} + 31 \\ \hline 25 \\ 155 \\ \hline 62 \\ \hline - 775 \\ \hline 9 \\ \hline 766 \quad | \quad 4 \\ \hline 4 \quad | \quad 19 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$a_9 = -28.$$

По условию это геометрическая прогрессия, то есть

ее ~~значения~~ множитель  $\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = q$ .

Тогда  $\frac{a_9}{a_7} = q^2$  тогда  $a_9 = a_7 q^2$ , но  $a_7 > 0 \Rightarrow a_7 \cdot q^2 > 0$

тогда  $a_9 > 0$ , но  $a_9 < 0$  в. Значит  $x = -31$  не подходит.

Ответ:  $x = 0$  или  $x = 18$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~

N 1

Пусть прогрессия -  $a$ . ( $a_1, a_2, \dots$ )

Пусть отношение элементов с номерами 9 и 7 -  $d$ .

Тогда в этой же прогрессии

$$a_7 \cdot d = a_9, \quad a_9 \cdot d^3 = a_{15}$$

$$a_7 \cdot d = a_9 \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d = x+3$$

$$a_9 \cdot d^3 = a_{15} (x+3) d^3 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

← Запишем это равенство  
 $\Rightarrow x-6 > 0$  или  $x-6 \neq 0$

$$d = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} \quad \text{или} \quad 25x-9=0$$

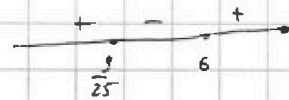
Тогда:

$$(x+3) \frac{(x+3)^3}{(25x-9)(x-6) \sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

или  $25x-9=0$

$$\frac{(x+3)^4}{(25x-9)^2} = 1$$

$$(25x-9)(x-6) > 0$$



~~$$25x-9 > 0, \quad x-6 > 0$$~~

или  $25x-9 < 0$

Тогда ~~$$x > \frac{9}{25} \text{ и } x > 6$$~~

Получаем: 
$$\begin{cases} (x+3)^4 = (25x-9)^2 \\ x = \frac{9}{25} \end{cases} \quad \text{или} \quad x < \frac{9}{25} \text{ или } x > 6$$

Если  $x > 6, \neq 0$   $(x+3)^4 > x^4 \Rightarrow 36x > 25x-9 \Rightarrow$  решение нет.

Получаем: 
$$\begin{cases} (x+3)^4 = 25x-9 \\ x < \frac{9}{25} \\ x = \frac{9}{25} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

Но если  $x < \frac{9}{25}$ , то  $25x - 9 < 0$ , а  $(x+3)^4 > 0 \Rightarrow$  решений нет.

Исходит лишь  $x = \frac{9}{25}$

$$\text{Тогда } a_7 = \sqrt{(25x-9)(x+6)} = 0$$

$$a_9 = \frac{9}{25} + 3 = 3\frac{9}{25}$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x+9)^3}} = 0$$

Такой ~~а~~ ком. прогрессии не может быть, т.к. если нулевая и ненулевые члены,  $0 \cdot d = 3\frac{9}{25}$ .

Получаем ур-е:

$$\begin{cases} (x+3)^4 = (25x-9)^2 \\ x < \frac{9}{25} \\ x > 6 \\ x = \frac{9}{25} \end{cases}$$

Если  $x = \frac{9}{25}$ , то  $a_7 = 0$ ,  $a_9 > 0$ , значит такого не может быть, т.к. тогда  $0 \cdot d \neq 0$ .

Значит  $x$  не может быть равен  $\frac{9}{25}$

$$\begin{cases} (x+3)^2 = 25x-9 \\ x > 6 \\ (x+3)^2 = -25x+9 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 19x + 18 = 0 \\ x > 6 \\ x^2 + 31x = 0 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-18) = 0 \\ x > 6 \\ x(x+31) = 0 \\ x < \frac{9}{25} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уч. продолжение 2

$$\frac{S_{DCK}}{S_{PKE}} = \frac{2}{5} = \frac{CD \cdot DK \cdot \sin \angle CDA}{2} : \frac{EP \cdot DK \cdot \sin \angle KPE}{2} =$$

$$= \frac{CD}{ED} \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle EPA} = \frac{2}{5}$$



тогда  $\frac{EP}{ED} = \frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CDA}$

тогда  $\frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CDA} = \frac{\sin 180^\circ - \beta - \alpha}{\sin \alpha}$

$\angle CDA = \angle AED$

тогда

$\angle ADE = \angle ABE = \angle CBP = 180^\circ - \alpha - \beta$ ,  $\angle EBD = \beta \Rightarrow \angle PBD = \alpha$

$S_{CBP} = S_{DBP} \Rightarrow \frac{CB \cdot BP \cdot \sin(180^\circ - \alpha - \beta)}{2} = \frac{DB \cdot PB \cdot \sin \alpha}{2}$

$\Downarrow \frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CDA} = \frac{DB}{CB}$

$\frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CDA} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AD}$  из проп. к  $\angle ADE$ ,  $\angle ADE = \angle EPA$ ,  $\angle CDA = \angle AED$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

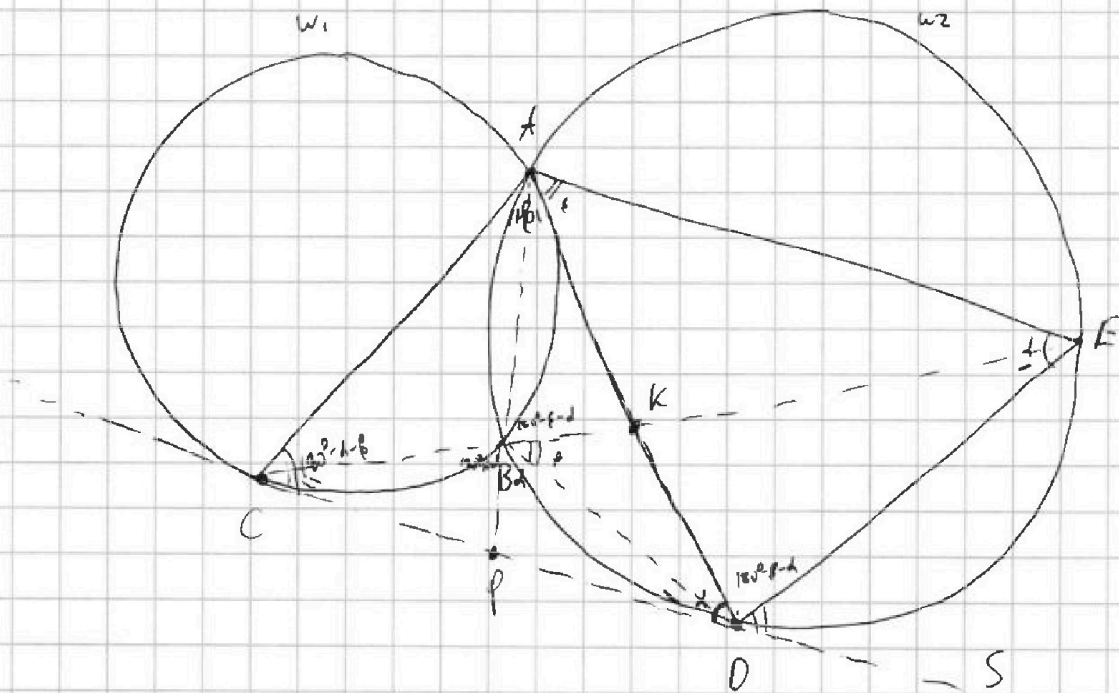
СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $\omega_1, \omega_2$  пересек. в  $A$  и  $B$ ,  $CD$  - общ. кас.  $C$  кас. к  $\omega_1$ ,  $D$  - к  $\omega_2$ ,  
вдальке к  $CD$ , к  $A$ .

$CB$  пересек.  $\omega_2$  вторично в г.  $E$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$



Пусть  $g$  - пересечение  $AD$  и  $CE$  -  $K$

Тогда  $\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$

Тогда  $\angle ABD = 180^\circ - \alpha$  из вписанности  $ABDE$

Тогда  $\angle ABE = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle ADE$

$\angle CDA = \angle DEA$  (углы между кас. и хорд.)

Пусть  $\angle CDA = \alpha$ ,  $\angle DEA = \alpha$

Пусть  $\angle EBD = \beta$ , тогда  $\angle DAE = \beta$  (опр. по 1933)

$\angle EPB = \angle DBE$ , т.е. углы между кас. и хордой,

$S$  - точка за  $D$  на луче  $CD$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим степени точки.

$$C, W_2 - CD^2 = CB \cdot CE$$

$$K, W_2 - AK \cdot KD = BK \cdot KE$$

Пусть  $EK = 5x$ .

$$\text{Тогда } CK = 2x$$

$$CE = 7x.$$

Тогда

$$CB \cdot 7x = CD^2$$

$$AK \cdot KD = BK \cdot 5x$$

Треугольники  $\triangle AKB$  и  $\triangle EKD$  подобны (по двум углам в окружности)

Также подобны  $\triangle AKE$  и  $\triangle BKD$

$$\text{Тогда } \frac{AB}{ED} = \frac{AK}{EK} = \frac{AK}{5x} = \frac{BK}{DK}$$

$$\frac{AE}{BD} = \frac{KE}{KD} = \frac{5x}{KD}$$

$$ED = \frac{5x \cdot AB}{AK} = \frac{AB \cdot DK}{EK \cdot BK}$$

Прямая  $AB$  пересекает  $CD$  в т.  $P$   $AB$  — диаметр окружности

$$CP^2 = DP^2 = PB \cdot PA \quad *$$

и продолжим

$$\begin{aligned} \text{Тогда } CD^2 &= CB \cdot CE = \\ &= (2CP)^2 = 4CP^2 = 4PB \cdot PA \end{aligned}$$

$$CB \cdot CE = 4PB \cdot PA$$

$$S_{CBP} = S_{DBP}$$

$$\text{Тогда } S_{ACP} = S_{ADP} \rightarrow S_{ABC} = S_{ABD}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = S_{ABD}$$

$$\text{Тогда } S_{ABDE} = S_{ABD}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin \angle EPA}{\sin \angle CPA} = \frac{2 \cdot DB}{5 \cdot CB} = \frac{2 \cdot AE}{5 \cdot AD} =$$

$$= \frac{2}{5} \sin \frac{2}{5} \frac{\sin(d + 180^\circ - \alpha - \beta)}{\sin d} = \frac{2}{5} \frac{\sin(d + \beta)}{\sin d}$$

$$\angle ACP = 180^\circ - \beta - d \quad (\text{угол между кас. и хордой})$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{AED}} = \frac{2}{5} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(d + \beta)}{AE \cdot ED \cdot \sin d} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{(\sin(d + \beta))^2}{(\sin d)^2}$$

$$\text{Тогда } \frac{AC}{AE} = \frac{(\sin d)^2}{\sin^2(d + \beta)}$$

$$\angle CAK = 360^\circ =$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \alpha =$$

$$\frac{S_{ACK}}{S_{AEK}} = \frac{AC \cdot \sin \angle AK}{AE \cdot \sin \beta} = \frac{2}{5} = \beta$$

$$\text{Тогда } \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5} = \frac{(\sin d)^2}{(\sin(d + \beta))^2}$$

Тогда AD - биссектриса.

$$\text{Тогда } \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Тогда } \frac{CD}{ED} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin(d + \beta)}{\sin d} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$



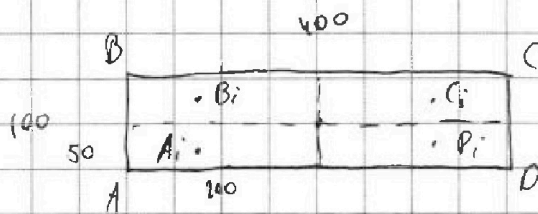
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS



Пусть  $n/4 = ABCD$ ,

$$AB = 100$$

Рассмотрим ~~клетки~~ <sup>клетки</sup> ~~такие~~ <sup>такие</sup>  $A_i, B_i, C_i, D_i$  такие, что

$A_i$  симметрично  $B_i$  относительно ср. линии,  $B_i - C_i$ ,

$C_i - D_i$  и  $D_i - A_i$ . Тогда  $B_i$  сим.  $D_i$  и  $A_i$  сим.  $C_i$

относительно центра. Пусть  $A_i$  лежит в длине всего

к  $A$ ,  $B_i$  к  $B$  и т.д.

Заметим, что среди  $A_i, B_i, C_i, D_i$  закрашено может быть

либо 0, либо 2 любых, либо 4. 2 любых - будут

симметричны. ~~они~~, ~~и будут симметричны относительно~~

~~они~~ 3 и 1 не могут быть, т.к. тогда для одной

клетки не будет закраш. симметричной.

Тогда рассмотрим все такие ~~такие~~ ~~клетки~~ <sup>клетки</sup>  $A_i, B_i, C_i, D_i$ ,

что хотя бы одна закрашена. Таких  $4 \times 8$  либо

2, либо 3, либо 4. (т.к. всего закр. клеток - 8). Тогда количество

способов выбрать две  $4 \times 8$  и закрашено  $4$  или суммарно

8 клеток - и будет ответ 6 задале.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по предположению 2

Чтого получаем:

$$\frac{10000 \cdot 9999}{2} + 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 9997 \cdot 2 + 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 6 =$$

$$= 99990000 \left( \frac{1}{2} + \frac{9998}{9999} \right) =$$

$$= 99990000 \left( \frac{1}{2} + 19990000 \frac{1}{2} + 60000 - 12 \right) =$$

$$\frac{9998}{9999} =$$

$$= 99990000 (199960000,5)$$

9999

$$= (10000 - 2) \cdot 6 =$$

$$\frac{9998}{9997} = 60000 - 12$$

Ответ:  $99990000 \cdot (199960000,5)$

$$= (10000 - 2)(10000 - 3) =$$

$$= 10^8 - 5 \cdot 10^4 + 6$$

$$\begin{array}{r} 200000000 \\ - 100000 \\ \hline 199900000 \end{array}$$

~~199900000~~

199900000



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 продолжение.

Если ~~4-к-2~~ 4-ки 2, то там закрасим все клетки  $\Rightarrow$  таких вариантов  $C_{50 \cdot 200}^2 =$

$$= \frac{10000 \cdot 9999}{2}, \text{ т.к. } A_i \text{ можно выбрать}$$

из  $50 \cdot 200$  клеток, а остальные клетки однозначно задаются.

Если 4-к-4, то в каждой из ~~из~~ в первой из них мы можем закрасить 2 клетки как толку - 6 способами, а в остальных - по воображаемой симметрии - 2 способами.

(например, если мы закрасим  $A_i$  и  $D_i$ , то можем красить только  $A_i$  и  $D_i$  или  $B_i$  и  $C_i$ )

$$\text{Всего} - C_{10000}^4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 9997 \cdot 2$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

Если их 3, то сначала мы должны 3-мя способами выбрать цепь, которую покрасит целиком, а потом опять  $6 \cdot 2$  как

$$\text{и в прошлом варианте. Получаем. } C_{10000}^3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 10000 \cdot 9999 \cdot 9998 \cdot 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$

и 6

$$a < b, \quad b - a \not\equiv 3 \quad (a - c)(b - c) = p^2 \text{ } p\text{-простое}$$

$$a^2 + b = 710$$

~~26, 25, 34~~

$$b = 710 - a^2$$

$$710 - a^2 - a \not\equiv 3$$

~~Заметим, что если  $a > 0$ , то также не может быть~~

$$\text{г.к. если } a \leq 26, \text{ то } a^2 \leq 676 \Rightarrow b > 26$$

Заметим, что  $a$  и  $b$  дают разные остатки при дел. на 3 (иначе  $b - a \equiv 3$ ). Тогда  $a - c$  и  $b - c$  тоже.

То либо 0 и 1, 0 и 2 или 1 и 2.

Но 1 и 2 не может быть, г.к. тогда  $(a - c)(b - c) \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{3}$

но  $p^2$  не сравнимо с 2 по модулю 3 (г.к.  $0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ )

Тогда это 0 и 1 или 0 или 2.

Но тогда  $p^2 = (a - c)(b - c) \equiv 3$ . Поскольку  $p^2 \equiv 3$  и  $p$  простое, то  $p = 3$  (иначе  $p \equiv 3$  и  $p \neq 3$  и  $p$  простое)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

Тогда получаем, что

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$a-c < b-c$  и все числа целые.

Тогда получаем варианты:

$$a-c = -9 \quad b-c = -1$$

$$a-c = 1 \quad b-c = 9 \quad (-3 \text{ и } -3, 3 \text{ и } 3 \text{ не годя, т.к. } b-c > a-c)$$

Если  $a-c=1$ ,  $b-c=9$ .

$$\text{Тогда } \begin{cases} a-c=1 \\ 710-a^2-c=9 \end{cases} \quad c = a-1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 710-a^2-(a-1)=9 \Rightarrow a^2+a = 710+1-9 \end{cases}$$

$$a(a+1) = 702$$

$\Downarrow$

Если  $a=26$ , то  $c=25$ ,  $b=34$ .

$$a^2+a-702=0$$

78-9

Если  $a=-27$ , то  $c=-28$ ,  $b=-19$   $(a-26)(a+27)=0$

$\Downarrow$

$$a=26 \text{ или } a=-27.$$

Проверки:  $34 > 26$ ,  $34-26=8 \neq 3$ ,  $26^2+34=710$ ,  $(26-25)(34-25)=9$

$-19 > -27$ ,  $-19-(-27)=8 \neq 3$ ,  $27^2-19=710$ ,  $(-27-(-28)) \cdot (-19-(-28))=9=9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение 2.

Если  ~~$a = 1$~~ ,  ~~$b = 9$~~ .  $a - c = -9$ ,  $b - c = -3$ .

Тогда  $c = a + 9$ ,  $b = c + 1 = a + 8$

Тогда  $a^2 + a + b = 710$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$(a - 26)(a + 27) = 0$$

∴

$$a = 26 \text{ или } a = -27.$$

Если  $a = 26$ , то  $c = 35$ ,  $b = 34$ .

Проверка:  $34 > 26$ ,  $34 - 26 = 8 \neq 3$ ,  $26^2 + 34 = 710$ ,  $(a - c)(b - c) = 9$

Если  $a = -27$ , то  $c = -18$ ,  $b = -19$

Проверка:  $-19 > -27$ ,  $b - a = 8 \neq 3$ ,  $(-27)^2 - 19 = 710$ ,  $(a - c)(b - c) = 9$ .

Ответ:  $(26; 34; 35)$ ,  $(-27; -19; -18)$ ,  $(26; 34; 35)$ ,  $(-27; -19; -18)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

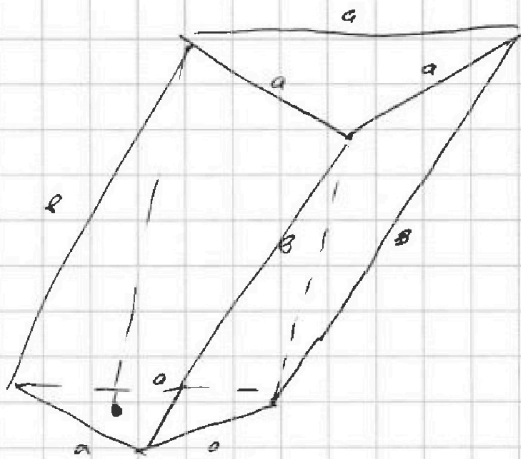
Черновик

$$a^2 + a - 710$$

$$710 =$$

$$= 30 \cdot 23 + 355 \cdot 2 =$$

$$= 71 \cdot 10$$



$$\begin{array}{r} 710 \\ - 676 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$25 - 625$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 26 \\ \hline 78 \\ 156 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 13 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$729$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \hline 108 \\ 189 \\ \hline 1080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 189 \\ \times 4 \\ \hline 756 \end{array}$$

$$a = 27 \quad b =$$

$$a = 26 \quad b = 34$$

$$(26 - c)(34 - c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ - 26 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$25$$





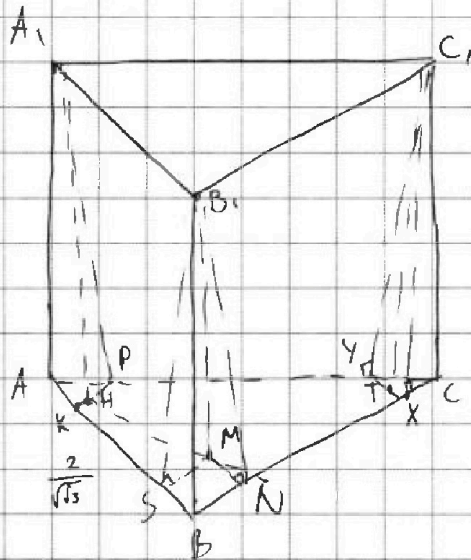
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7



Дано:

$ABCB_1A_1C_1$  - призма

$ABC$  -  $\triangle$ ,  $S_{ABC} = 1$

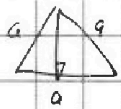
$S_{ABB_1A_1} = 3$

$S_{AA_1C_1C} = 2$

$S_{BB_1C_1C} = 3$

Найти: объём призмы

П.к.  $AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$  и  $S_{ABC} = 1$ , то



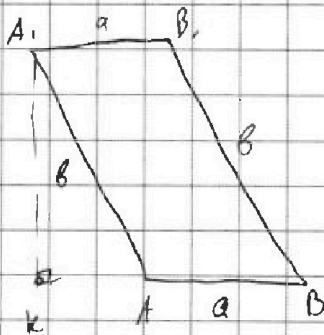
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

сторона =  $\frac{2}{\sqrt[4]{3}} = AB$

Пусть  $AB = a$

Пусть  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = b$



Пусть высота призмы  $h$  -  $AK$

Пусть высота  $AA_1B$  -  $A_1K$ ,  $AA_1C$  -  $A_1P$

тогда по г. о. зрениям.  $AK \perp AC$ ,  $AK \perp AB$ .

Аналогично построим высоту  $CT$

высоты  $CT$  и  $CT$ , как на рисунке



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№? продолжение

$$S_{AB_1B_2A_1} = A_1K \cdot a \quad (\text{т.к. это параллелограмм})$$

$$S_{AA_1C_1C} = A_1P \cdot a$$

$$\text{Тогда } A_1K \cdot a = 3, \quad A_1P \cdot a = 2$$

$$A_1K^2 = A_1H^2 + HK^2, \quad A_1P^2 = A_1H^2 + HP^2$$

$$A_1K^2 = h^2 + HK^2, \quad A_1P^2 = h^2 + HP^2$$

$$\frac{A_1K}{A_1P} = \frac{3}{2} \Rightarrow A_1K = \frac{3}{2} A_1P \quad \text{Пусть } A_1P = x.$$

$$\text{Тогда } A_1K = \frac{3}{2}x, \quad A_1P = x$$

$$\text{Тогда } h^2 + HK^2 = \frac{9}{4}x^2, \quad h^2 + HP^2 = x^2$$

$$\text{Тогда } HK^2 = \frac{9}{4}x^2 - h^2, \quad HP^2 = x^2 - h^2$$

Проведем высоту  $h$  из  $B_1$  -  $B_1M$  и высоту  $a$  в  $B_1AB - B_1S$ ,

в  $B_1BC - P_1N$

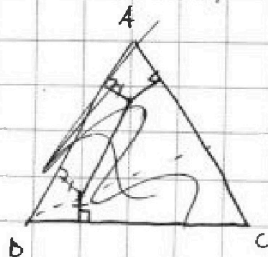
$$B_1S = A_1K, \quad B_1N = A_1P, \quad \text{т.к. } S_{A_1B_1BA} = S_{A_1B_1CC}$$

$$B_1N = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

$$A_1P = \sqrt{3}$$

$MP \parallel A_1B_1 \Rightarrow MP \parallel AB$

$$\text{Тогда } MS = MN$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

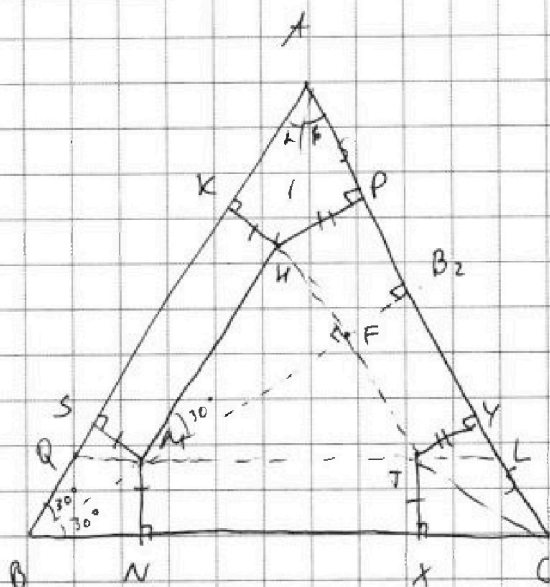
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение 2

Рассмотрим  $\triangle ABC$



$BM$  - биссектриса (т.к.  $M$  лежит на биссектрисе, т.к.  $MS = MN$ )

Продлим  $BM$  до перес. с  $AC$  в т.  $B_2$ . Т.к.  $ABC$  -  $pld$ , то  $BB_2$  -

- высота и медиана

$$MK^2 = MS^2 = MN^2 = TX^2 = \frac{g}{4} \cdot a^2 - h^2 = \frac{g}{4} (\sqrt{3})^2 - h^2 = \frac{g}{4} \sqrt{3} - h^2$$

$$MP^2 = a^2 - h^2 = \sqrt{3} - h^2$$

Т.к.  $BM$  - бисс. то  $\angle ABM = 30^\circ \Rightarrow BM = 2 SM$

$$BB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$



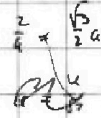
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 продолжение 3



Получаем:  $MS^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3} - h^2$

$$MP^2 = \sqrt{3} - h^2 = FB^2$$

$$BB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{2}a = \sqrt{\frac{3}{3}} \cdot \frac{2}{2}a = \sqrt{1} \cdot \frac{2}{2}a = \frac{2}{2}a = \sqrt{3}$$

Тогда, п.к.  $\angle ABM = 30^\circ$ , то  $BM^2 = 4SM^2 = 9\sqrt{3} - 4h^2$

$$BS^2 = 3MS^2 = \frac{27}{4}\sqrt{3} - 3h^2$$

$\triangle OMT$ -подобны  $ABC \Rightarrow OM \parallel AC \Rightarrow \underline{AM + MA} =$

$\Rightarrow \underline{BM + MB} =$

Также  $MB^2 + h^2 = b^2$   $b$  - сторона боковой стороны.

Тогда  $MB^2 = CF^2 = AM^2 = MS^2 + BS^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3} - h^2 + \frac{27}{4}\sqrt{3} - 3h^2 =$

$$= 9\sqrt{3} - 4h^2$$

Тогда  $AP^2 = 9\sqrt{3} - 4h^2 - MP^2 = \sqrt{3} \cdot h^2 = 8\sqrt{3} - 3h^2$

Тогда  $h = \sqrt{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7

~~Голга  $\triangle AQL \sim \triangle ABC$  с  $k = \frac{\sqrt{3}}{2} a$~~

~~$\frac{\sqrt{3}}{2} a - MN = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{9}{4} \sqrt{3} + h^2$~~

$\triangle MIT \sim \triangle ABC$  с  $k = \frac{\sqrt{3} a - BM - FB_2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a}$

Голга



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~N7~~ ~~решение 3~~

Черновик

Тогда  $S_{ABC}$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S =$$

$$S_{BMA} + S_{BMC} + S_{MBC} =$$

$$= \frac{MS}{2} \cdot \frac{MS \cdot AB}{2} + \frac{MN \cdot BC}{2} + \frac{MB_2 \cdot AC}{2} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot (MS + MN + MB_2) =$$

Тогда пусть  $MB_2$  перпендикулярна к  $AC$  в  $F$

$MF \perp AC$

г.к.  $MB_2 \perp AC$ ,  $MF \parallel BA$ ,  $MF \parallel BC$ ,  $MF \parallel AC$ , то  $MF$

$MF$  - высота  $\triangle ABC$ . Тогда  $MF = SK = UF = PY$ .

Тогда  $BS + KA = AP + CY$

г.к.  $AB_2 = CB_2$ , пусть  $MF = SF \Rightarrow PB_2 = B_2K \Rightarrow AP = CY$

Тогда  $FX = CK$  по 2 катетам  $\Rightarrow AF = CF \Rightarrow AK = CX$  (г.к.  $\triangle AFK =$

$$\text{Тогда } BS = \sqrt{BM^2 - MS^2} = \sqrt{3 \cdot SM} = \frac{a \sqrt{3}}{2} - \frac{a \sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2AP - AK$$

$\triangle CFK$  по кат.  $CF$  и  $CK$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА 4 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$AK^2 = AP^2 + PK^2 = AK^2 + KH^2$~~  *н? продолжение 3* Черновик

~~$\text{Тогда } AK^2 = AP^2 + PK^2 - KH^2 =$~~

~~$= AP^2 + \sqrt{3}h^2 + h^2 - \frac{9}{4}\sqrt{3} = AP^2 - \frac{5}{4}\sqrt{3}$~~

~~$\text{Тогда: } \frac{27}{4} - h^2\sqrt{3} = 2AP - AK = 2AP - \sqrt{AP^2 - \frac{5}{4}\sqrt{3}}$~~

~~Тогда~~

~~AP~~

~~$\frac{KK}{AP} = \frac{PK}{h^2}$~~

~~$BN = \frac{27}{4} - h^2\sqrt{3}$~~

~~$HK = \frac{9}{4}\sqrt{3} - h^2$~~

~~$BM = \frac{18}{4}\sqrt{3} - 2h^2$~~

~~$UP = FB_2 = \sqrt{3} - h^2$~~

~~$\text{Тогда } BN_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \alpha = BM + FB_2 + MF$~~

~~Поскольку  $KBH = h$ ,  $UAP = \beta$ , тогда  $\sin \alpha = \frac{KK}{KA}$ ,  $\sin \beta = \frac{UP}{UA}$ , тогда~~

~~$\sin \alpha = \sin \beta \cdot \frac{KK}{UP}$~~

~~Продолжим  $MT$  до пересечения с  $AK$  в т.  $L$  и до пересечения с  $B$~~

~~в т.  $Q$~~