



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$G_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; G_{12} = 2-x; G_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

пусть знаменатель прогрессии q .

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = G_{10} = \frac{G_{12}}{q^2} = \frac{2-x}{q^2} \rightarrow \sqrt{(25x+34)^3(3x+2)^3} = \frac{(2-x)^3}{q^6}$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = G_{18} = G_{12} \cdot q^6$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3} \cdot (25x+34)^3 \cdot (3x+2)^3} = (2-x)^4$$

$$\text{знач } (25x+34)^2 = (2-x)^4$$

$$25x+34 = (2-x)^2$$

$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 - \text{не год} \\ x = 30 - \text{год} \end{cases}$$

Од3:

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases}$$

(Ответ 30)



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

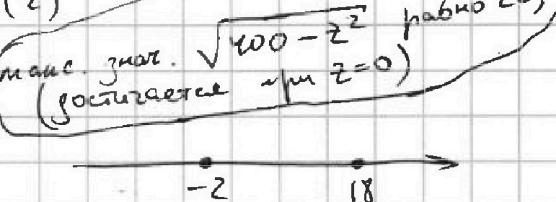
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z^2} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+z| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (2) \end{cases}$$

рассмотрим (2):

$$|y+z| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



a) $y \leq -2$:

$$-y-2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$-3y+34 = \sqrt{400-z^2}$$

т.к. $y \leq -2$, то $-3y \geq 6$; $-3y+34 \geq 40 > 20$, т.е. нет. реш.

b) $y > 18$:

$$y+2+2y-36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$3y-34 = \sqrt{400-z^2}; \quad 3y-34 > 20, \text{ т.е. нет. реш.}$$

c) $y \in (-2; 18]$:

$$-y+2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$-y+38 = \sqrt{400-z^2} \quad -y+38 \text{ убывает с ростом } y,$$

при этом максимальное значение на $(-2; 18]$ достигается

при $y=18$, и оно равно 20, т.е.

есть реш. $y=18$ и нет других.

$$20 = \sqrt{400-z^2}, \text{ значит } z=0$$

т.е. реш. (2) является: $\begin{cases} y=18 \\ z=0 \end{cases}$

$$\text{проверим это в (1): } \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad (3)$$

область определения: $\begin{cases} x \geq -6 \\ 3-x \geq 0 \\ (x+6)(3-x) \geq 0 \end{cases}$

$x \in [-6; 3]$, $\sqrt{(x+6)(3-x)}$

согласует с областью опред.

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}$, т.е. \rightsquigarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

§2 (продолжение)

\rightarrow , т.е. ~~домн~~ $\sqrt{(x+6)(3-x)} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x}$ - на области определения.

Более всего и правда част (3) бывает:

$$(x+6) + (3-x) + 49 + 14\sqrt{x+6} - 14\sqrt{3-x} - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = \\ = 4(x+6)(3-x)$$

$$29 + 7(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) = \sqrt{(x+6)(3-x)} + 2\cancel{(x+6)(3-x)}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = \frac{1}{7} (\sqrt{(x+6)(3-x)} + 2(x+6)(3-x) - 29)$$

поставим $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = t$ (3):

$$\frac{1}{7} (\sqrt{(x+6)(3-x)} + 2(x+6)(3-x) - 29) + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

после $\sqrt{(x+6)(3-x)} = t$, т.е. $(x+6)(3-x) = t^2$ ($t \geq 0$)*

$$\frac{1}{7}(t^2 - 29) + 7 = 2t; \rightarrow t^2 + t - 29 + 49 = 14t; \rightarrow$$

$$\rightarrow 2t^2 - 13t + 20 = 0 \rightarrow (2(t-4))(t-\frac{5}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} t=4 & \text{обратная} \\ t=\frac{5}{2} & \text{замена} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+6)(3-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+6)(3-x)} = \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 18 - 3x - x^2 = 16 \\ (18 - 3x - x^2) \cdot 4 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = 0 \\ 4x^2 + 12x + 25 - 18 \cdot 4 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \quad D_1 = 9 + 2 \cdot 4 = 17 \\ & \quad D_2 = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 47 = \\ & \quad = 16 \cdot (9 + 47) = \\ & \quad = 16 \cdot 56 \end{aligned}$$

Нужно проверить корни на то, что они лежат в области опред.

$$0 < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = 1 \leq 3; \quad 0 > \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} > \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = -4 \geq -6;$$

$$0 < \frac{-3 + \sqrt{14}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{16}}{2} = \frac{5}{2} \leq 3; \quad 0 > \frac{-3 - \sqrt{14}}{2} > \frac{-3 - \sqrt{16}}{2} = -\frac{11}{2} \geq -6,$$

т.е. все возможные

решения из условия следят



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 (см. продолжение)

Ответ: $y=18; z=0;$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$\int \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(1+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\begin{aligned} p \cdot 4 \cos^3 x - p \cdot 3 \cos x + 6 \cdot 2 \cos^2 x - 6 + \\ + 3 \cos x + 12 \cos x + 10 = 0 \end{aligned}$$

$$p \cdot 4 \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

~~найдите~~

пунков $\cos x = t$, т.е.

~~$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$~~

~~$f(t) = y = pt^3 + 3t^2 + 3t + 1$~~

при $t=0$: $y=1$.

при этом, можно $y = \cos x = t$ одно решение.

значит, можно $t \in [-1; 1]$.

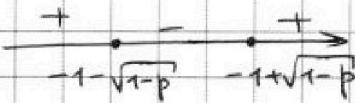
~~найдите~~

$$f'(t) = 3pt^2 + 6t + 3 = 0$$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4p}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-p}$$

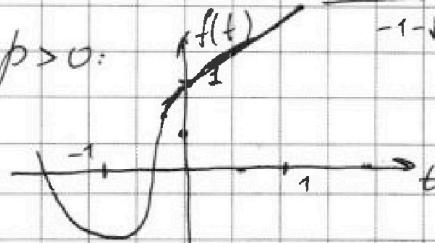
при $p > 0$: ~~$f'(t)$~~ :



т.е. при $p < 0$:



т.е. при $p > 0$:



т.е. осталось прибрать $f(-1) < 0$
 $-p + 1 < 0$, т.е. $(p > 1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

при $p > 1$ & $\sqrt{1-p}$ - не сущ., значит $f(t) > 0$ всегда,

т.е. есть только одно реш. на $\mathbb{R} \setminus (-1; 0)$

при этом заметим, что при $p=1$ есть одно реш. $t=-1$,

т.е. $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

а) пусть $AD \cap CE = K$, тогда получим.

$$CK/KE = 7/20$$

пусть $\angle DEA = \beta$

б) пусть $\angle DCA = \gamma$, тогда

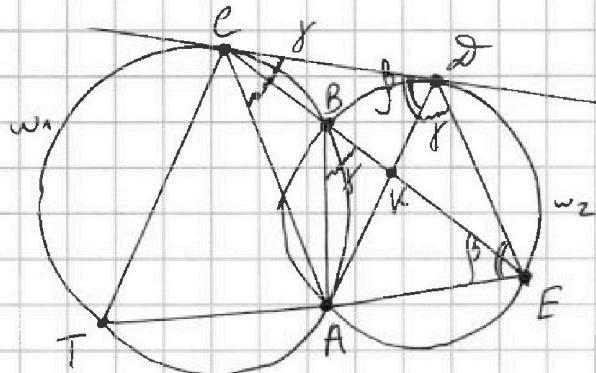
$$\angle CBA = 180^\circ - \gamma$$

~~угол между касательной~~

($\angle DCA = \angle CTA$ — угол между касательной и хордой, а $\angle CTA + \angle CBA = 180^\circ$, т.е.

$$\angle CBA = 180^\circ - \gamma$$

тогда $\angle EBA = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) = \gamma$
(или смежный с $\angle CBA$)



$\angle ADE = \beta$ $\angle ABE = \gamma$ — наим. вписанные, опир. на общую дугу.

2) $\angle CDA = \angle DAE$ — на общ. угле между кас. и хордой, тогда

$\triangle CDA \sim \triangle DAE$ — на 3 общ. углах,

$$\text{значит } \frac{CD}{DE} = \frac{DA}{AE} = \frac{CA}{AD}$$

$\angle CAD = \angle DAE$ (т.к. $\triangle CDA \sim \triangle DAE$), значит $(AD \cap CE = K)$

AK — биссектр. $\triangle ACE$, т.е. $\frac{CA}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{4}{20}$

$$AE = \frac{20}{7} CA$$

3) из подобия $DA^2 = AE \cdot CA = \frac{20}{7} CA^2$, $DA = \sqrt{\frac{20}{7}} CA$, значит

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CA}{AD} = \sqrt{\frac{7}{20}} ; \quad \left(\frac{DE}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} \right)$$

$$\left(\text{Отсюда } \frac{DE}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} \right)$$



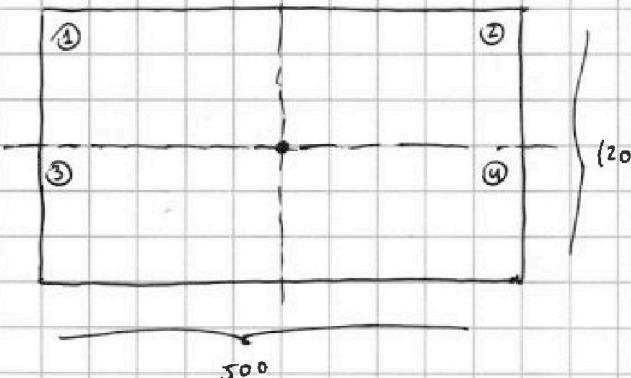
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 Стартует спутник



7, и. количество клеток

8 Былое и выше прямогр.

четко, то 5-я линия 8 уголье

У-х клеток, а ср. линии
проходит по границам
клеток.

Разберём все способы не
часто.

1) существует центральная симметрия (при этом лучше симметрии):
также могут существовать)

если одна из клеток в прямогр. ①, то картина в ④
также будет отражена. Тогда (аналогично для ② и ③).

Значит, если мы заполним 4 клетки в ①+② (верхнее пологине
исходного прямогр.), то
мы сразу получим картину для ③+④, т.е.

количество способов: $\binom{4}{2}$ (количество клеток в ③, ①, ②, ④ равно и
равно: $\frac{500 \cdot 120}{4} = 15000$)

C_3^{30000} (при этом закроем 4 клетки, т.к. ~~заполнение~~ клеток, которые
мы потом заполним в нижней части сколько там, сколько закроем в верхней,)

2) существует симметрия отн. горизонтальной ср. линии а всего 8

(при этом нет центральной симметрии).
2.1) Рассмотрим случай наличие обеих симметрий: пусть мы заполнили
какие-то клетки в ①, то где мы можем расставить в ③ и ④,
при этом т.к. у симм, то из рисунка в ③ мы
можем расставить в ②, значит заполним ② и т.к. симм. отн. ср. линии т.к. симм.

зная, что нужно заполнить во всем прямогр., т.е.

в ③ надо заполнить $\frac{8}{4} = 2$ клетки, т.е. количество способов:

C_2^{15000} заметим также, что если есть симм. отн. линии и
отн. гориз. ср. линии, то появляются и симм. отн. верт. ср. линии

(3 симметрии существуют только вместе,) КЕТ случаев сумм 2-х из 3-х



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (продолжение)

2.2) если есть симм. отн. гориз. ср. линии и бозможна 4 групп
симм, т.е. если мож ~~занесли~~ $\frac{8}{2} = 4$ и легки
6 (①+②), то выражение $\text{рас. на } \text{всем периметру}$, т.е.
кол-во способов: C_{30000}^4

объединил 2.1) и 2.2): $C_{30000}^4 - C_{15000}^2$ - кол-во
способов занесить легки, чтобы бозможнались симм. отн.
гориз. ср. линии, но не было унитр. симм.

3) Аналогично пункту 2) (т.к. кол-ва легких 6 ①, ②, ③, ④ работы):

$C_{30000}^4 - C_{15000}^2$ - кол-во способов получать симм.

отн. Вероятн. ср. линии, а чудоев не было унитр. симм.
(занесли и гориз. симм.)

объединил 1), 2), 3): $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2 =$

$$= \underbrace{(3 \cdot C_{30000}^4)}_{\text{12 легк}} - \underbrace{(2 \cdot C_{15000}^2)}_{\text{3 легк}} = 3 \cdot C_{30000}^4 - A_{15000}^2$$

$$\boxed{\text{Отвр: } 3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$(a; b; c) - ?$

$\in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a < b \\ b-a \not\equiv 0 \pmod{3} \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{простое} \\ a^2 + b = 1000 \end{cases}$$

a p -простое

т.к. $(a-c)(b-c) = p^2$, при этом $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то возможны только 2 случая:

~~$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$~~ 1) $\begin{cases} a-c = p \\ b-c = -p \end{cases}$ т.к. $a=b$, но $a < b$, т.е. не подходит

2) $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$, т.к. $a-b = p^2 - 1 > 0$, но $a-b < 0$, т.е. не подходит

3) $\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}$, т.к. $a=b$ - аналогично пункту 1)

4) $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$ $a-b = -p^2 + 1$ - т.к. подходит

5) $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$, т.к. $a-b = -p^2 + 1$ - т.к. подходит

6) $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$, т.к. $a-b = p^2 - 1$ - не подходит аналогично пункту 2)

получаем, что для того, чтобы $(a-c)(b-c) = p^2$ нужно, чтобы

$a-b = -p^2 + 1$, т.е. $b-a = p^2 - 1$, при этом по условию $b-a \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Из малой теоремы Ферма: $p_1^{3-1} \equiv 1 \pmod{3}$, где p_1 - простое с 3

т.е. $p_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, значит для любого p_1 - простого с 3

с 3 (а это любое число больше 1 и чётное) $p_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, а значит

$b-a \equiv 0 \pmod{3}$, что не подходит по условию. При этом

если чётных чисел < 1 $b-a \equiv 0 \pmod{3}$ тоже т.к. $p_1^2 = (-p_1)^2$. Осталось

рассмотреть $b=1$ и $p=0$, но т.к. $p^2 - 1 \leq 0$, а значит $a \geq b$, то же

не подходит. Т.к. таких нет. (Ответ 0 (таких нет))

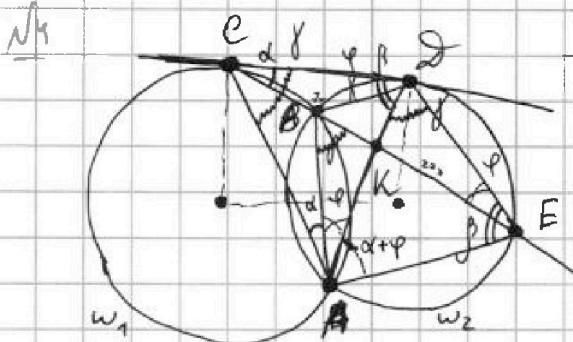


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

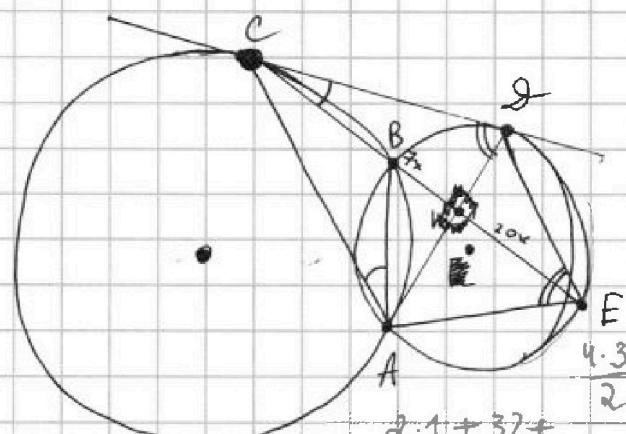
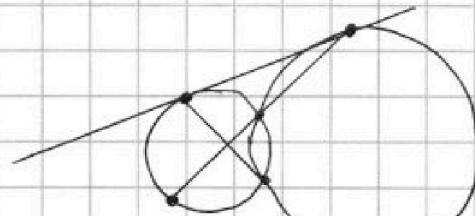
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

By Pythagoras



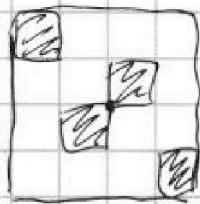
$$\frac{CA}{AE} = \frac{7}{20}; AE = \frac{20}{7} CA$$

$$\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{ED}{CD}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{\frac{20}{7} CA^2}{AD^2} = \frac{C_8^4}{C_8^2 \cdot C_5^2} = \frac{15000}{9 \cdot 8 \cdot 7} =$$

$$CA = \sqrt{a}$$

$$AD = \sqrt{\frac{20}{7} a}$$

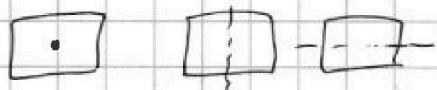
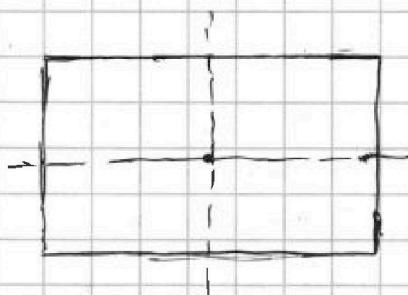


$$2 \cdot 1 + 32 + \\ + 36 = \\ = 70$$

$$AE = \frac{20}{7} a$$

$$2 \cdot C_4^4 + 2 \cdot C_4^3 \cdot 4 + C_4^2 \cdot C_4^2$$

$$500 \cdot 30 = \\ = 15000$$



$$1) \frac{2 \cdot C_{15000}^4 + 2 \cdot C_{15000}^3 + (C_{15000}^2)^2}{15000}$$

$$2) C_{30000}^4 - C_{15000}^2$$

$$3) C_{30000}^4 - C_{15000}^2$$

$$2 \cdot C_{15000}^4 + 2 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2 + 2 C_{30000}^4 - 2 C_{15000}^2$$

$$2 \cdot \frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!} + 2 \cdot \frac{15000!}{3! \cdot (15000-3)!} + \frac{15000! \cdot 15000!}{2! \cdot 2! \cdot (15000-2)! \cdot (15000-2)!} + 2 \cdot \frac{30000!}{304! \cdot (30000-4)!} - 2 \cdot \frac{15000!}{2! \cdot (15000-2)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2. 15000...~~

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \cdot 15000 \cdot 14399}{4!} + \frac{2 \cdot 15000 \cdot 14398}{3!} + \frac{15000 \cdot 14398 \cdot 15000 \cdot 14399}{2! \cdot 2!} + \\
 & + 2 \cdot \frac{30000 \cdot 25397}{4!} - 2 \cdot \frac{15000 \cdot 14399}{2!} = \\
 & = 15000 \left(\frac{-97}{12} + \frac{-98}{3} + \frac{-14399^2}{4} + \frac{-25397}{6} - 14399 \right) = \\
 & = 15000 \cdot 14399 \cdot \left(\frac{-97}{12} + \frac{-98}{3} + \frac{14399}{4} + \frac{25393 \cdot 25397}{3} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

33 - 31 = 8

N6

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a-c = b-c$$

$$a-c = 1; b-c = p^2$$

$$b-a = p^2 - 1$$

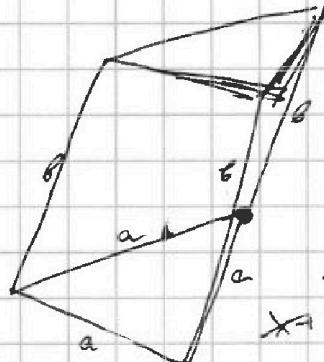
51 + 33

$$\begin{array}{r} 33 \\ + 51 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ + 31 \\ \hline 63 \end{array}$$

(S61)

$$\begin{aligned}
 & a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\
 & a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}
 \end{aligned}$$



$$u = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\begin{aligned}
 & x+6 + 3 - x + 49 + 14\sqrt{x+6} - 14\sqrt{3-x} - \\
 & - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} = 4(x+6)(3-x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{h\sqrt{2+x}} = x \\
 & 0 = \frac{3}{2}h - x\zeta + \zeta x \\
 & 95 = \pm h + 6 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 29 + 4(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) - \sqrt{(x+6)(3-x)} = \\
 & = 2(x+6)(3-x)
 \end{aligned}$$

$$= 81 - \frac{1}{32}x^2 + x\zeta + \zeta x$$

$$\zeta x = h \cdot (x - 81 - 8)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$4 = \sqrt{3-x} (\sqrt{x+6} + 1) + \sqrt{x+6} (\sqrt{3-x} + 1)$$

$$\frac{13}{2} = \sqrt{3-x} (2\sqrt{x+6} + \frac{1}{2}) + (-\sqrt{x+6} + \frac{1}{2})$$

$$\frac{13}{4} = (\sqrt{x+6} + \frac{1}{2})(\sqrt{3-x} - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+6}}(\sqrt{3-x} - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot (\sqrt{x+6} + \frac{1}{2}) = \frac{13}{4} \quad 0$$

$$\frac{\sqrt{3-x} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x+6}} - \frac{\sqrt{x+6} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3-x}} = 0$$

$$\frac{3-x - \frac{1}{2}\sqrt{3-x} - x - 6 - \frac{1}{2}\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+6}\sqrt{3-x}} = 0$$

$$3 - x - 3 - 2x = \frac{1}{2}(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+6})$$

$$9 + 12x + 4x^2 = \frac{1}{4}(3-x + x+6 + 2\sqrt{...}) \quad -3-2x \leq 0 \\ 2x \geq -3 \\ x \geq -\frac{3}{2}$$

№3

$$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x(p+4) + 10 = 0$$

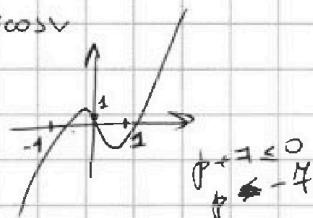
$$4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 3p\cos x - 3\cos x \cdot p + 12\cos x - 3p\cos x - 6 + 10 = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0$$

$$p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

$$-p + 3\cos^2 x \cdot \sin x - 6\cos x \cdot \sin x - 3\sin x = 0$$



$$\sin x = 0$$

$$p\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \quad \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4p}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-p}$$

$$2 = 4 - 4p$$

$$p = 1 - \frac{1}{2}t^2 \quad t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$-p + 1 \geq 0 \quad p \leq 1$$

$$-p + 1 \geq 0 \quad p + 7 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad b_{12} = 2-x; \quad b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$\left(\frac{2-x}{q^2}\right)^3 = \cancel{(2-x)^3} \sqrt{(25x+34)^3(3x+2)^3}$$

$$(2-x)q^6 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$(2-x)^4 = \sqrt{(25x+34)^3(3x+2)^3} \cdot \frac{25x+34}{(3x+2)^3} = (25x+34)^2$$

$$(2-x)^2 = 25x+34$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \quad x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 & -\text{не подходит} \\ x = 30 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2} \quad -y-2+2y+36 = \sqrt{\dots}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \quad |z| \leq 20$$

$$x \geq -6$$

$$3-x-2z \geq 0; \quad x \leq 3-2z$$

$$3-2z \geq -6 \quad 3-2z \geq -6$$

$$z \in [-20, \frac{9}{2}]$$

$$y \geq 3x^2 + 3x - z \geq$$

$$\geq -\frac{9}{2} - z \geq -9$$

$$2z \leq 9 \quad z \leq \frac{9}{2}$$

$$y \in [-2, 18]:$$

$$2z = \sqrt{400-z^2} \quad z=0 \quad z=18$$

$$-y+38 = \sqrt{400-z^2}$$

$$18 \leq y \leq 38$$

$$z=0$$

$$y=18$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x^2 + 3x - 18 \leq 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$(x+6)(x-3) \leq 0$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{3-x} + 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} - 7 = 2\sqrt{3-x}(1 + \sqrt{x+6})$$

$$1 - \sqrt{2} \neq 4 = 2\ln 2$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = 2\sqrt{3-x}(2\sqrt{x+6} + 1)$$

$$x+6 + 4\sqrt{x+6} + 14\sqrt{x+6} = (3-x)(4(x+6) + 1 + 4\sqrt{x+6})$$

$$x+55 + 14\sqrt{x+6} = (3-x)(4x + 25 + 4\sqrt{x+6})$$