



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — целые положительные числа, значения  $\alpha$ , тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \alpha^3 &= \sqrt{\frac{15\alpha + 6}{(\alpha - 3)^3}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \alpha^3 &= \alpha + 4 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \alpha^{11} &= \sqrt{(5\alpha + 6)(\alpha - 3)} \end{aligned} \right.$$

или  $\beta \alpha$  не зависят

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \sqrt{\alpha - 3} \\ \alpha^2 &= \frac{\sqrt{(15\alpha + 6)(\alpha - 3)}}{\alpha + 4} \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \alpha \leq -\frac{6}{15} \\ \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\alpha = 5$  — решение  
ОДЗ:

Ответ  $\alpha = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x - 6 \cos^2 x + 3 + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x - 6 \cos^2 x + 6 \cos x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

свернем по формуле

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x\right)^3 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cos^2 x \cdot \left(-2^{-\frac{1}{3}}\right) + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cos x \cdot \left(-2^{-\frac{2}{3}}\right) - 2 + 2 + 3 = p$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = p - 5$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-2^{\frac{2}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x \leq 2^{\frac{2}{3}}$$

$$-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \leq p - 5 \leq \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$p \in \left[ \left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5, \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5 \right] \text{ если } p \text{ или } p$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x = \pm \arccos \left( \frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑ решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

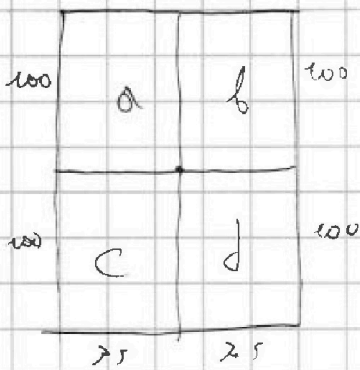
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача: В прямоугольнике со сторонами 100 и 75...

будем рассматривать 1 червячок



Введем 1 червячок со св. сегментов  
можно пойти по 4-м сторонам  
1 из 3-х способов сегментации:

- 1) один сегмент
- 2) ср. сег. верх.
- 3) ср. сег. вниз.
- 4) ~~по диагонали~~

Дважды можно  
найти сегменты  
или сегменты

1) Два сегмента горизонтально вверху и внизу, или в лев.

уже определены сегменты

из всех ~~25~~ 30000 ч.м. можно выбрать  $C_{30000}^4$

Возможны: а) в четв. а. 4 точки, тогда всего будет 4-х способов

$$C_{7500}^4 \cdot 3 \quad \text{каждо способ вверху и внизу}$$

б) в четв. а. 3 точки, в четв. в. 1 точка:

2.  $C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$  (в точку сверху можно ср. сег. верх. сегментов)  
наименьшее количество ч.м. и ч.м.  
каждо введ. 3 и 1 точка

в) в четв. а. 3 точки, в четв. с. 1 ч.

$$C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 \cdot 2$$

2 в а, 2 в в:

$$C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2 - C_{7500}^2$$

каждо

Итого:  $3 \cdot C_{7500}^4 + 4 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 2 \cdot C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 + 56242499 \cdot C_{7500}^2$

каждо количество сегментов, когда сегменты совпадают с центральными



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p$  - простое число

$a, b, c$  - целые.

но у.с.л.

$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \rightarrow a=b \text{ (возм. } a>b)$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \rightarrow a-b=1-p^2, \quad 1-p^2 < 0, \text{ т.к. } p \geq 2$$

(строгие у.с.л.)  
 $a < b$  (строгие у.с.л.)

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

1)  $p^2 = 3m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow p=3$

$$\begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a-b = 3k+1 \\ a-b = 3k+2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2)  $p^2 = 3k+2$  возм.  $p$  не цел.  
 $p^2 - 2 = 3k$

1)  $\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$

$$b^2 + b = 812$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$b = \frac{56}{2} =$$

$$\begin{cases} b=28, & a=36, & c=27 \\ b=29, & a=-21, & c=-30 \end{cases}$$

Answers:  $(36; 28; 27)$

$(-21; -29; -30)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$S_{AA_1M} = S_{AA_1N} = S_{AA_1M} = 5 = S_{AA_1M} \cdot AC = S_{AA_1M} \cdot 5$   
 $S_{AA_1M} = 5 \Rightarrow AN = 2,5$   
 $S_{AA_1M} = 4$

$\triangle AMN \cong \triangle NMA_1$   
 по гипотенузе и катету  $\Rightarrow MN = NM$   
 $AM \perp MC$   
 $AN \perp NC$   
 MC - высота  $\triangle AMN$  и  $\triangle ANM$

---

$\perp$   
 высота  $AN \perp MC$   
 высота  $AM \perp NC$   
 $AN = AM$

$AM = AN$  ( $\triangle AMN = \triangle ANM$  по 2-м катетам)

$AA_1QP \perp AMC$  (т.к.  $AA_1QP$  - плоск. через  $AN \perp MC$ )  
 по теореме о перпендикулярности плоскостей

$P, Q$  - середины  $AC$  и  $A_1C_1$

$AN = AP$  - высота,  $AN \perp AC$  и медианой  $\triangle AMC$

$BP \perp AP \Rightarrow BP \perp AA_1QP$  (по св.  $BP \perp AP$  и  $BP \perp AA_1$ )

$BP \perp PQ$  (по св.  $BP \perp AP$  и  $BP \perp AA_1$ )

$\angle APB = 90^\circ$  в крив.  $BPQ$   $\Rightarrow BPQ$  - прямоугольный

$QB_1 = PB$   
 $QB_1 \parallel PB \Rightarrow PBQB_1$  -  $\square$   $S_{PBQB_1} = 4 = PB \cdot B_1Q = 2 \cdot 2$

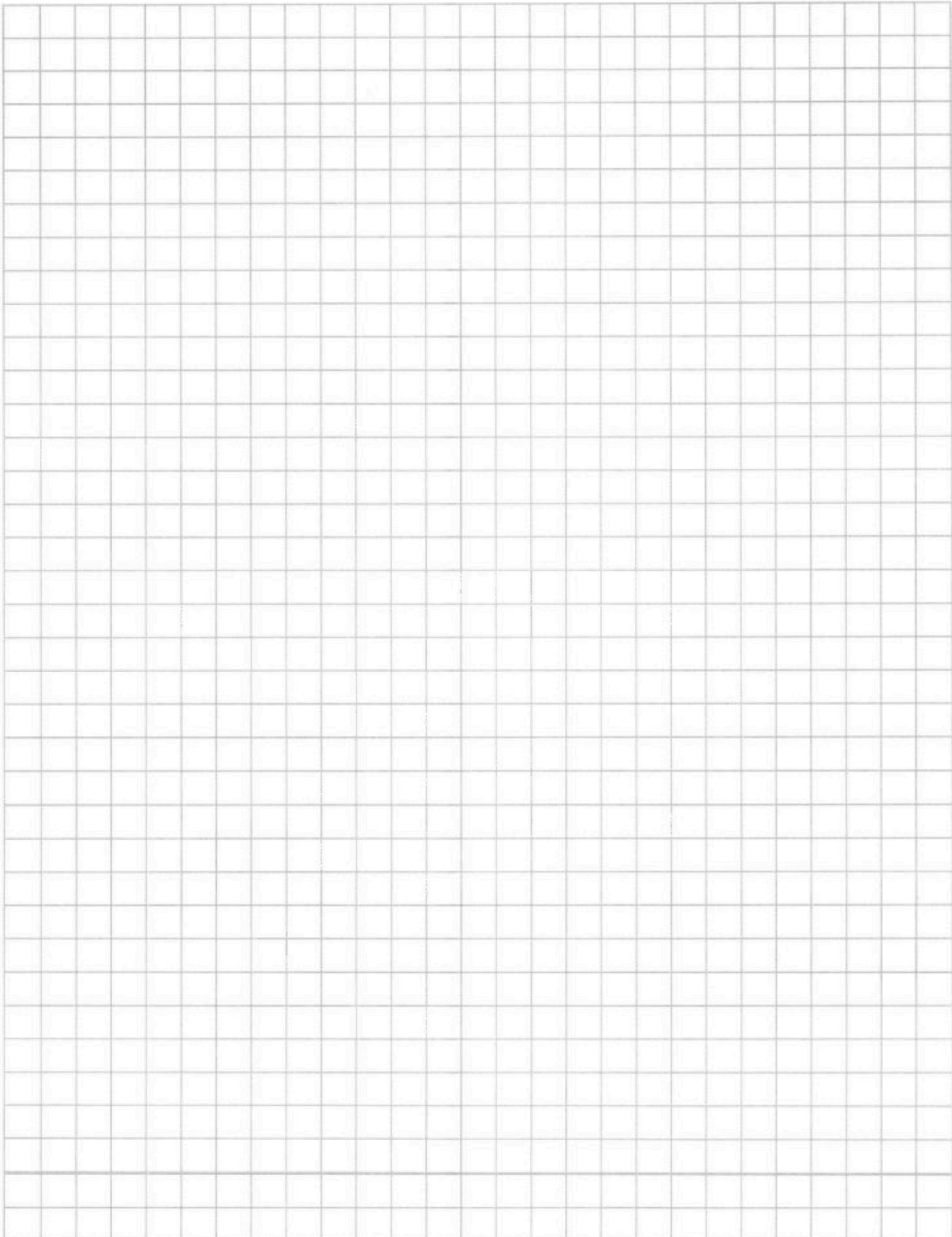


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos^3 x - 6 \cos^2 x - \cos x + 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x = p$$

$$2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$2 \cos^2 x (\cos x - 2) + 3 \cos (\cos x - 2) = p - 3$$

$$(2 \cos^2 x + 3) (\cos x - 2) = p - 3$$

$$a - b = 3k + 1$$

1) пусть  $a - c = 1$   $b - c = p^2$

2) пусть  $b - c = 1$   $a - c = p^2$

$$a - c = b - c$$

$$a - b = 0$$

1)  $1 - p^2 = 3k + 1$  невозм.

2)  $p^2 - 1 = 3k + 1$

$$\frac{a-b}{79}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 57 \\ \hline 114 \\ 399 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 12 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$203$$

$$3248$$

$$100 \cdot 3249$$

97

$$p^2 = 3k + 1$$

$$p = 3$$

$$p^2 = 3k + 2 = 3m - 1$$

$$a - c = 3k + 2$$

$$a - b = 3k - 1$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b - c = 1$$

$$\begin{array}{r} 3^8 \\ \hline 7500 \end{array}$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 5 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$(2 \cos^3 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -7$$

$$-15 \leq z \leq 19$$

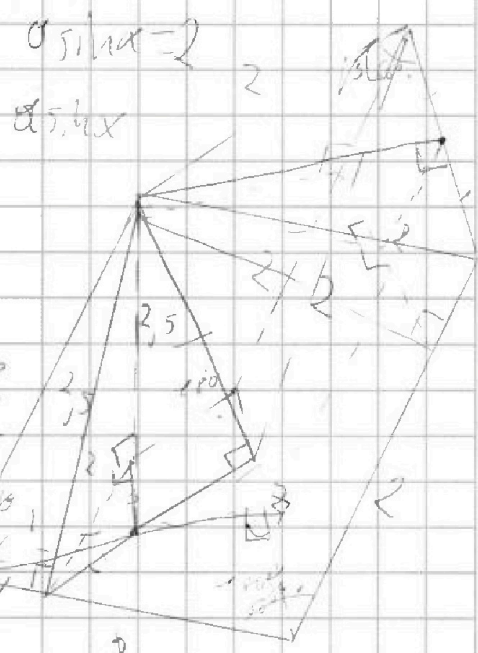
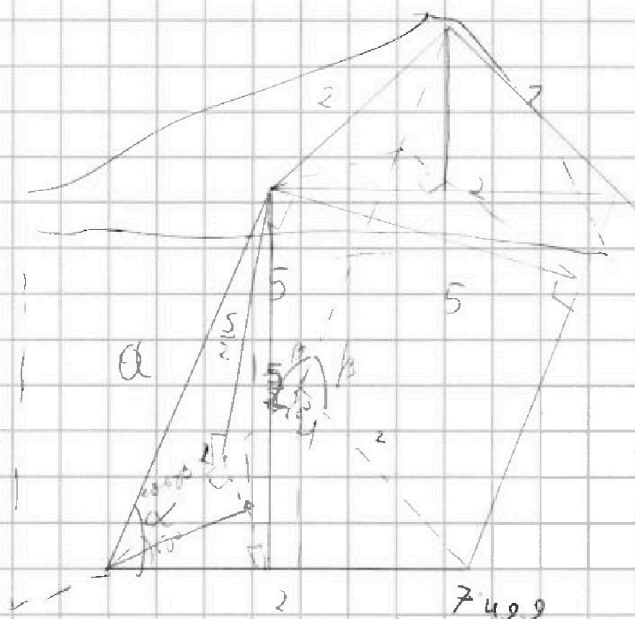
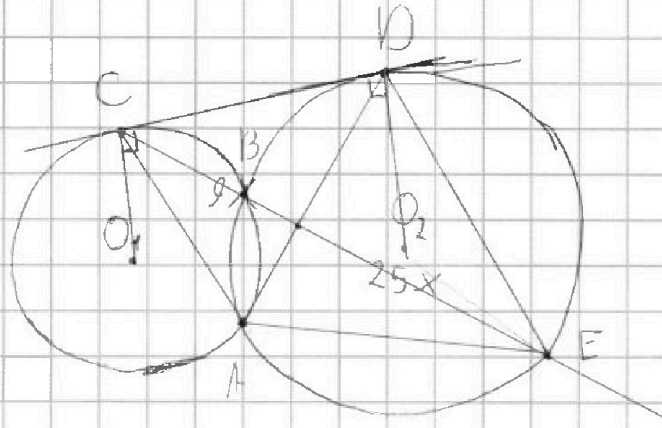


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

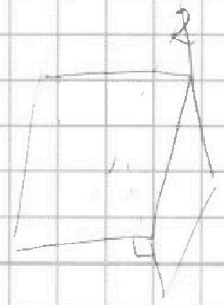
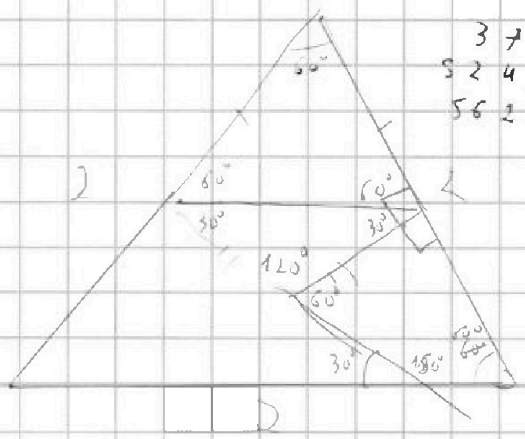
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



7499  
2500  
37495  
52493  
56242500



$\frac{2500!}{7499!} = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 \varphi^3 &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ b_1 \varphi^9 &= x+4 \\ b_1 \varphi^{11} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi^8 &= \sqrt{\frac{(15x+6) \cdot (x-3)^4}{(15x+6)}} \\ &= (x-3)^2 \\ \varphi &= \pm (x-3)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \pm b_1 \cdot (x-3)^{\frac{3}{4}} &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{\frac{1}{4}} \\ b_1 &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\varphi^2 = \frac{\sqrt{15x+6}(x-3)}{x+4} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} 15x+6 &= (x+4)^2 \\ 15x+6 &= x^2+8x+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ x &= 5 \text{ или } x = 2 \end{aligned}$$

Объем 5.

~~x = 2~~ *ошибка*

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 x - 2 \cos x + 2 \cos x + 6 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3 &= 0 \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 &= 0 \\ (4 \cos^3 x) + (3 \cdot 1 \cos^2 x + 2) + 3 &= 0 \\ (2 \cos x - \frac{1}{2})^3 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -2 \frac{1}{2} \leq 2 \cos x - \frac{1}{2} \leq -2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(2x) \cos x - \sin 2x \sin x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = 0$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - (2 \sin x \cos x) + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} (2 \cos^2 x - 1) \cdot (\cos x - 3) - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) + 6 \cos x &= 0 \\ -2 \cos x (-2 - \cos^2 x) &= 0 \end{aligned}$$