



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x_2 = -1 + \sqrt{3}:$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = 6\sqrt{3} - 4$$

$$a_3 + 2d = 3\sqrt{3} + 4 - 3\sqrt{3} = 4 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 4 + 8 - 6\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} = a_9$$

$$x = -1 + \sqrt{3} \text{ подходит}$$

$$3) x_3 = -1 - \sqrt{3}:$$

$$a_2 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1 = -6\sqrt{3} - 4$$

$$a_3 + 2d = -3\sqrt{3} + 4 + 3\sqrt{3} = 4 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 4 + 8 + 6\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3} = a_9$$

$$x = -1 - \sqrt{3} \text{ подходит}$$

Ответ: $x_1 = -1$

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_3 &= 3x+3 = a_1 + 2d \\ a_5 &= (x^2+2x)^2 = a_1 + 4d \\ a_9 &= 3x^2 = a_1 + 8d \end{aligned}$$

Здесь a_i - i -ый член арифметической прогрессии.
 d - разность прогрессии.

x - ?

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+3 = a_1 + 2d & (1) \\ (x^2+2x)^2 = a_1 + 4d & (2) \\ 3x^2 = a_1 + 8d & (3) \end{cases} \quad 2d = (x^2+2x)^2 - 3x - 3 \leftarrow (2) - (1)$$

$$\text{Из (1): } a_1 = 3x+3 - 2d = 3x+3 - (x^2+2x)^2 + 3x+3 = 6x+6 - (x^2+2x)^2$$

Подставим в (3):

$$3x^2 = 6x+6 - (x^2+2x)^2 + 4(x^2+2x)^2 - 12x - 12$$

$$3x^2 = 3(x^2+2x)^2 - 6x - 6$$

$$x^2 = (x^2+2x)^2 - 2x - 2$$

$$x^2+2x = (x^2+2x)^2 - 2$$

$$x^2+2x = t$$

$$t = t^2 - 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 2$$

$$x^2+2x = -1$$

$$x^2+2x+1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x^2+2x = 2$$

$$x^2+2x-2 = 0$$

$$D/4 = 1+2 = 3$$

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} 1) x_1 = -1: \quad a_3 &= 0 & d &= \frac{1}{2} \\ a_5 &= 1 & a_1 &= -1 \\ a_9 &= 3 \end{aligned}$$

$$a_3 + 2d = 0 + 1 = 1 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 1 + 2 = 3 = a_9$$

$x = -1$ подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4y + 8x = ?$ наибольшее значение

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих системе.

Ниже будет описано построение, график ищите на следующей странице решения.

I. $|x - 3y| \leq 3$



$$\begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq +1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

II. $|3x - y| \leq 1$



$$\begin{cases} 3x \leq y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq 1 + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq -1 + 3x \end{cases}$$

Из графика мы видим, что фигурой, удовлетворяющей системе, является параллелограмм (т.е. прямые $y = -1 + \frac{x}{3}$, $y = \frac{x}{3}$, $y = +1 + \frac{x}{3}$ параллельны друг другу и прямые $y = -1 + 3x$, $y = 3x$, $y = +1 + 3x$ параллельны друг другу параллельными переносом).

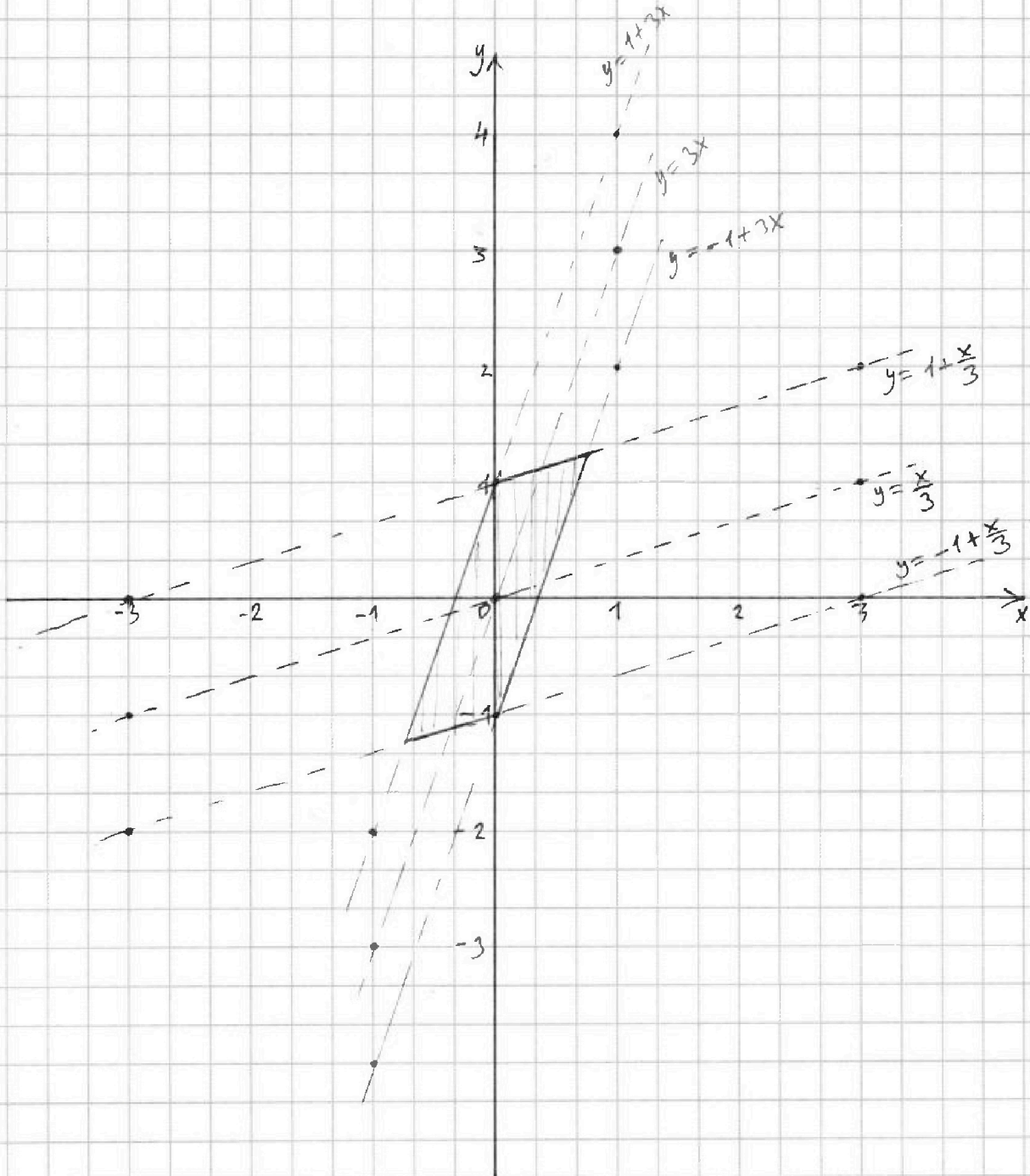


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем координату правой верхней вершины параллелограмма.

$$y = -1 + 3x = 1 + \frac{x}{3}$$

$$-3 + 9x = 3 + x$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Это $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$. Симметричная ей относительно начала координат вершина будет иметь координату $(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$.

Пусть $4y + 8x = a$. Нам нужно найти наибольшее значение a . Преобразуем выражение.

$$y = -2x + \frac{a}{4}$$

Наибольшее значение a достигается тогда, когда из прямых, параллельных $y = -2x$ мы выберем ту, которая пересекает заштрихованную область в точке с самой большой ординатой.

Значит, $y = -2x + \frac{a}{4}$ проходит через точку $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$. У нее как раз самая большая ордината из всех точек параллелограмма.

Подставим координаты в уравнение: $\frac{5}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{a}{4}$

$$\Rightarrow a = 11.$$

Сделаем проверку: $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$

$$|x - 3y| = 3 \leq 3 \quad 4y + 8x = 5 + 6 = 11$$

$$|3x - y| = 1 \leq 1$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $m+n=k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Из (2) получим уравнение на k :

$$(k-9)k = 75q^2$$

$$k^2 - 9k - 75q^2 = 0$$

$$\Delta = 9^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5^2 q^2$$

Чтобы k было натуральным, дискриминант должен быть полным квадратом.

$$\Delta = 3(27 + 4 \cdot 5^2 \cdot q^2)$$

Чтобы дискриминант был полным квадратом, необходимо $27 + 4 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3$

$$4 \cdot 5^2 \cdot q^2 \div 3 \Rightarrow q=3, \text{ т.к. } q\text{-простое}$$

Тогда получим уравнение $k^2 - 9k - 75 \cdot 9 = 0$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 9 \cdot 75 = 9(9 + 300) = 9 \cdot 309 = 9 \cdot 3 \cdot 103$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{103}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Противоречие. Этот случай также невозможен. Других случаев нет. Значит, таких пар (m, n) не существует.

Ответ: таких нет.

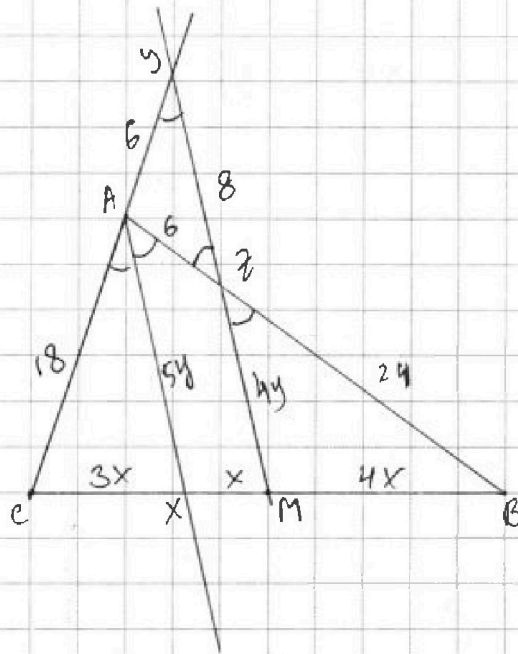


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AC &= 18 \\ AZ &= 6 \\ YZ &= 8 \end{aligned}$$

$$BC = ?$$

1) Т.к. AX — бис-са $\angle CAB$, то $\angle CAH = \angle BAH = \alpha$. Т.к. $ZM \parallel AX$, $\angle BZM = \angle BAH = \alpha$ как соответственные. $\angle YZA = \angle BZM = \alpha$ как вертикальные. $\angle AYZ = \angle CAB - \angle AZY = 2\alpha - \alpha = \alpha$ по св-ву внешнего угла Δ . Тогда ΔAYZ — р/б (равнобедренный) по признаку. $\Rightarrow AY = AZ = 6$.

2) Пусть $CX = 3x, x > 0$. Запишем Тл о пропорциональных отрезках для угла YCM и прямых AX и YM :

$$\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM}$$

$$3 = \frac{18}{6} = \frac{3x}{xM} \Rightarrow xM = x$$

3) M — середина BC , поэтому $CM = MB = CX + XM = 3x + x = 4x$.

4) Запишем Тл о пропорциональных отрезках для $\angle ABX$ и прямых ZM и AX :

$$\frac{BZ}{6} = \frac{BZ}{ZA} = \frac{BM}{MX} = \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow BZ = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Пусть $ZM = 4y, y > 0$. $\triangle ZBM \sim \triangle ABX$ по двум углам ($\angle B$ - общий, $\angle BZM = \angle BAX = \alpha$).

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{ZM}{AX} = \frac{24}{24+6} = \frac{4}{5} = \frac{4y}{AX} \Rightarrow AX = 5y$$

~~6) Запишем Th косинусов для $\triangle CAH$:~~

~~$$9x^2 = 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \cos \alpha$$~~

6) $\triangle ACX \sim \triangle YCM$ по двум углам ($\angle A$ - общий, $\angle CAH = \angle CYM = \alpha$).

$$\Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{AX}{YM} = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4} = \frac{5y}{4y+8}$$

$$\Leftrightarrow y > 0$$

$$12y + 24 = 20y$$

$$8y = 24$$

$$y = 3 \Rightarrow AX = 15, ZM = 12$$

7) Запишем Th косинусов:

$$\triangle CAH: 9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$$

$$x^2 = 36 + 25 - 60 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle BZM: 16x^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cos \alpha$$

$$x^2 = 36 + 9 - 36 \cos \alpha \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим: $9 - 36 \cos \alpha = 25 - 60 \cos \alpha$

$$24 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 45 - 36 \cdot \frac{2}{3} = 45 - 24 = 21, x = \sqrt{21}, \text{ т.к. } x > 0$$

$$BC = 8x = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \quad (2)$$

Заметим, что $x \geq 0, y \geq 0$, т.к. определены \sqrt{x} и \sqrt{y} . Преобразуем (2):

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) =$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2)$$

Разделим (2) на множители:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left[(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right] = 0$$

$$\begin{matrix} \Uparrow \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{matrix}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \quad (*)$$

Заметим, что левая часть (*) всегда положительна, т.к. $x, y \geq 0$. Тогда из совокупности может выполняться только $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$. Подставим это в (1):

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad (**)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 6+5x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \\ -1 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-1 \leq x \leq 6}$

$$-x^2 + 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$\xrightarrow{x} \quad \text{---}$
 $-1 \quad 6 \quad \text{---} \quad x \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ при } x_1 = -1, x_2 = 6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5x^2 - 5y^2 = 5(x-y)(x+y) = 5(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{6-x}(2\sqrt{x+1} + 1)$$

$$x+26+10\sqrt{x+1} = (6-x)(4(x+1)+1+4\sqrt{x+1})$$

$$x+26+10\sqrt{x+1} = (6-x)(4(x+1)+1) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$$

$$t^2 + 25 + 10t = (6-t^2+1)(4t+1) + 4(6-t^2+1)t$$

~~XXXXXXXXXX~~

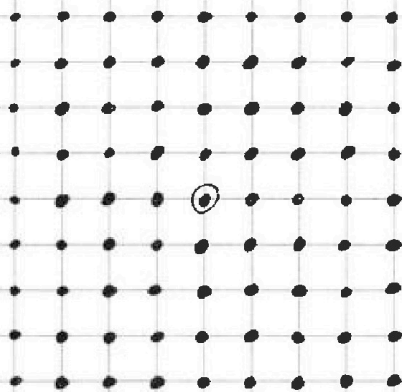


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов $9 \cdot 9 = 81$.

Квадрат нужно поворачивать на 90° , тогда он переходит сам в себя. При этом сама в себя из узлов переходит только центральный узел (отмечен \odot на рисунке). Значит, для каждой раскраски есть еще 3, которые

переводятся в неё поворотом на 90° , 180° или 270° .
Общее кол-во способов покрасить 2 клетки в белый равно

$$C_{81}^2$$

Однако разных раскрасок будет в 4 раза меньше, т.е.

$$\frac{C_{81}^2}{4} = \frac{80 \cdot 81}{2 \cdot 4} = 810.$$

Ответ: 810.

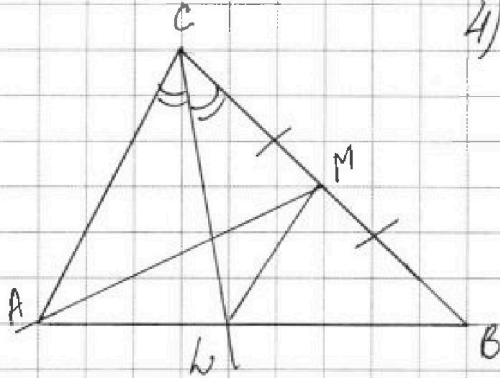


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

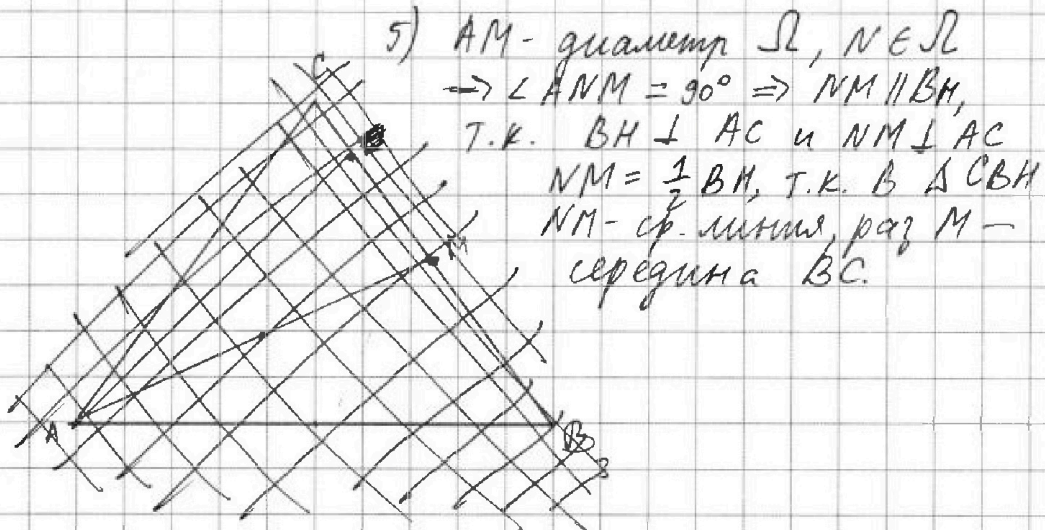
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

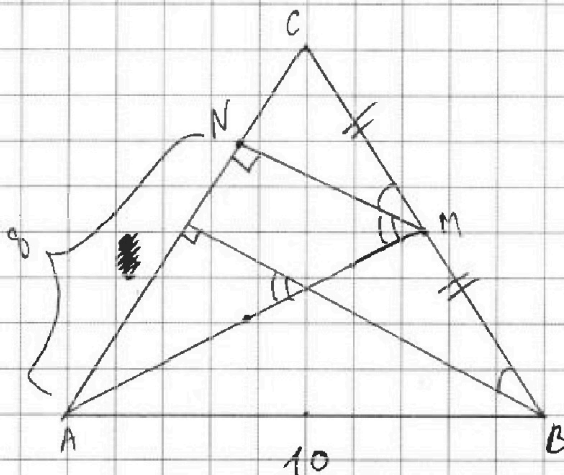
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4) Тогда LM - ср. линия $\triangle ABC$,
т.к. $LM \parallel AC$ и M - середина
 BC . Значит, L - середина
 AB . CL - биссектриса и
медиана $\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б
 $\Rightarrow AC = BC$.



5) AM - диаметр Ω , $N \in \Omega$
 $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow NM \parallel BH$,
т.к. $BH \perp AC$ и $NM \perp AC$
 $NM = \frac{1}{2} BH$, т.к. B в $\triangle CBH$
 NM - ср. линия, раз M -
середина BC .



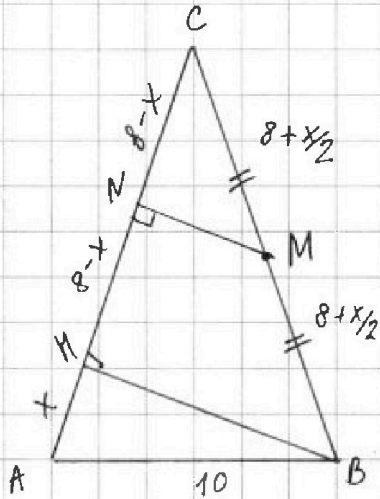


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6) Пусть $AN = x, x > 0$,
Тогда $NC = AC - AN = 8 - x$.

$NM = NC = 8 - x$, т.к. N - середина AC .

~~AC = CB = 16 + x~~
 $AC = CB = 16 + x \Rightarrow CM = MB = 8 + \frac{x}{2}$.

7) $BH = \sqrt{100 - x^2}$ по Тл Пифагора.

$NM = \sqrt{\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2}$ по Тл Пифагора.

$BH = 2NM$, т.к. NM - ср. линия $\triangle ABC$.
Получим уравнение:

$$\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2}$$



$$100 - x^2 = 4\left(\left(8 + \frac{x}{2}\right)^2 - (8 - x)^2\right) =$$

$$= 4\left(16 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}x = \left(16 - \frac{x}{2}\right) \cdot 6x = 96x - 3x^2$$

$$100 - x^2 = 96x - 3x^2$$

$$2x^2 - 96x + 100 = 0$$

$$x^2 - 48x + 50 = 0$$

$$D/4 = 24^2 - 50 = 526 = 2 \cdot 263$$

$$x_{1,2} = 24 \pm \sqrt{526}$$

~~Второй корень не подходит~~

~~Корень не подходит~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x < 10$, т.к. AN — катет в $\text{пр/уг } \triangle ANB$.
Тогда из двух значений x мы выбираем
 $x = 24 - \sqrt{526}$.

$$AC = CB = 16 + x = 40 - \sqrt{526}.$$

Ответ: $40 - \sqrt{526} = AC = BC$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

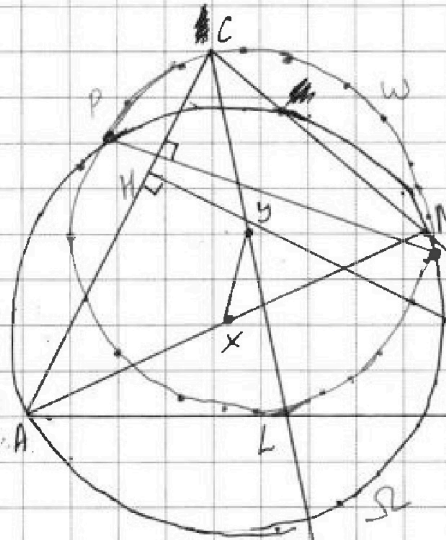
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть H - основание перпендикуляра из B на AC .

$$AB = 10, AM = 8$$

$$AC = ?$$

$$BC = ?$$

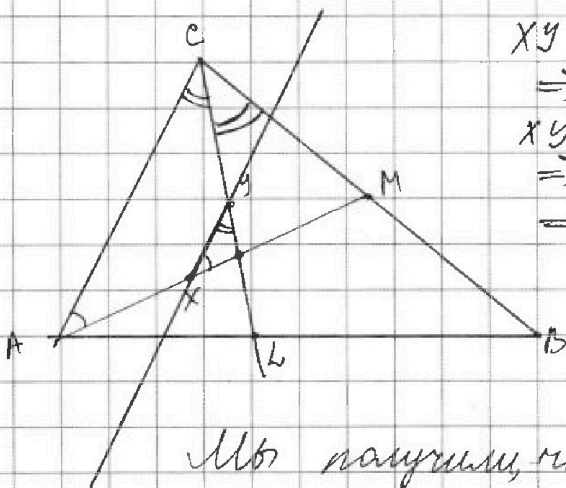


$$1) PQ \parallel BH \Rightarrow PQ \perp AC$$

2) PQ - общая хорда Ω и Ω' , она \perp линии центров. Пусть X - середина AM , Y - середина CM .

Тогда XY - линия центров. $\Rightarrow AC \parallel XY$.

3) Изобразим отдельно $\triangle ABC$ без Ω и Ω' .



$XY \parallel AC$, Y - середина CM

$\Rightarrow XY$ - ср. линия $\triangle ABL$

$XY \parallel AC$, X - середина AM

$\Rightarrow XY$ - ср. линия $\triangle ACM$

$\Rightarrow XY$ пересекает CM и AH в их серединах.

$\Rightarrow XY$ - ср. линия $\triangle LCM$ и $\triangle LAM \Rightarrow AC \parallel XY \parallel LM$.

Мы получили, что в $\triangle ABC$ $AC \parallel LM$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$4 + 25 - 4 \cdot 15 \cos \alpha = X^2$~~

$$4 + 25 - 4 \cdot 15 \cos \alpha = X^2$$

~~$36 + 9 - 36 \cos \alpha = X^2$~~

$$29 - 60 \cos \alpha = 45 - 36 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 29 - 45 =$$

$$24^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$$12^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$36 + 25 - 60 \cos \alpha = X^2$$

$$36 + 9 - 36 \cos \alpha = X^2$$

$$25 - 60 \cos \alpha = 9 - 36 \cos \alpha$$

$$16 = 24 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$X^2 = 36 + 9 - 36 \cdot \frac{2}{3} = 45 - 24 = 21$$

$$BC = 8X = 8\sqrt{21}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (6-x)(x+1)$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1}(1 - \sqrt{6-x}) + \sqrt{6-x}(-1 - \sqrt{x+1}) = -5$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1}$$

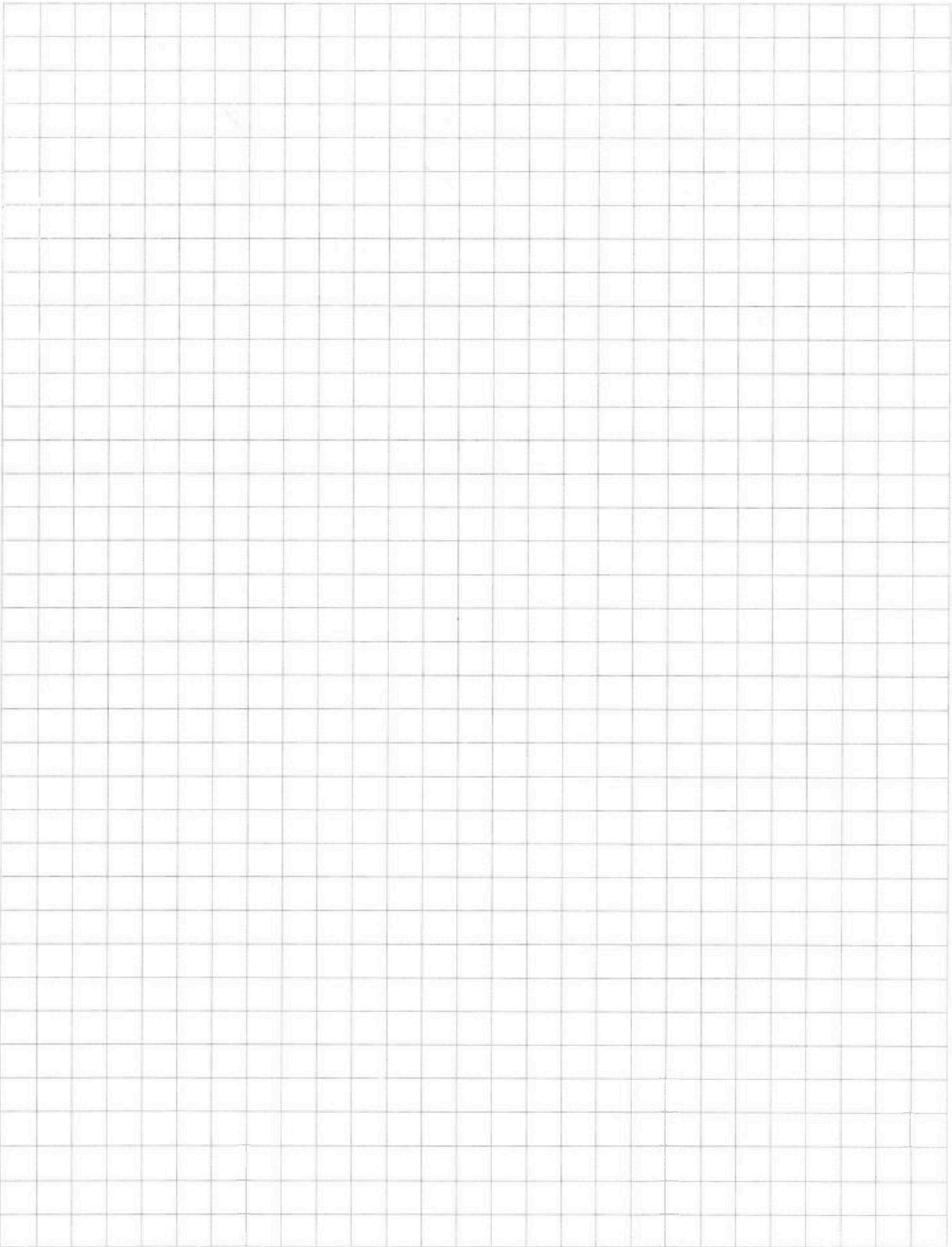


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x+1 + 6-x + 25 + 10\sqrt{x+1} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - 10\sqrt{6-x} =$$

$$= 2(6+5x-x^2)$$

$$32 + 10\sqrt{x+1} - 2\sqrt{6+5x-x^2} - 10\sqrt{6-x} = 2(6+5x-x^2)$$

$$x = -1: 0 - \sqrt{7} + 5 = 0$$

$$x = 6: \sqrt{7} - 0 + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 25 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + 6-x + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

~~$$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + 6-x + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$~~

$$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6+5x-x^2) + (6-x) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

$$x+26 + 10\sqrt{x+1} = 2(6-x)(x+1) + (6-x) + 4(6-x)\sqrt{x+1}$$

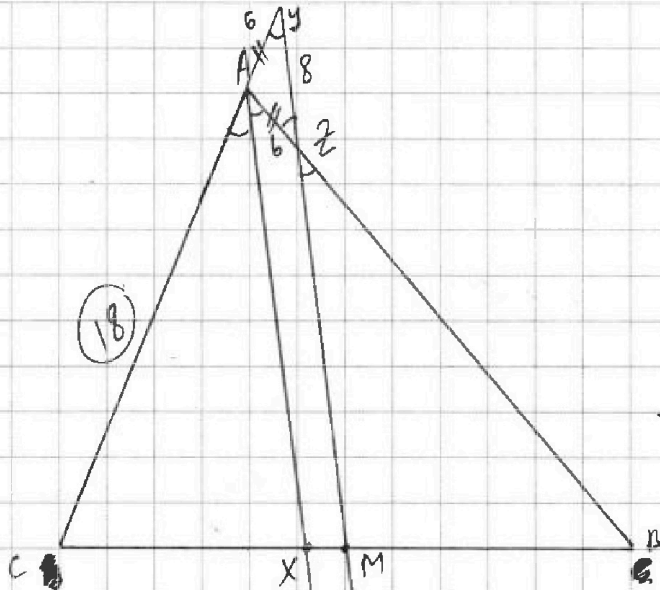


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

$$BC = ?$$

$$526 = 2 \cdot 263$$

$$\begin{array}{r} 263 \overline{) 17} \\ \underline{17} \\ 93 \end{array}$$

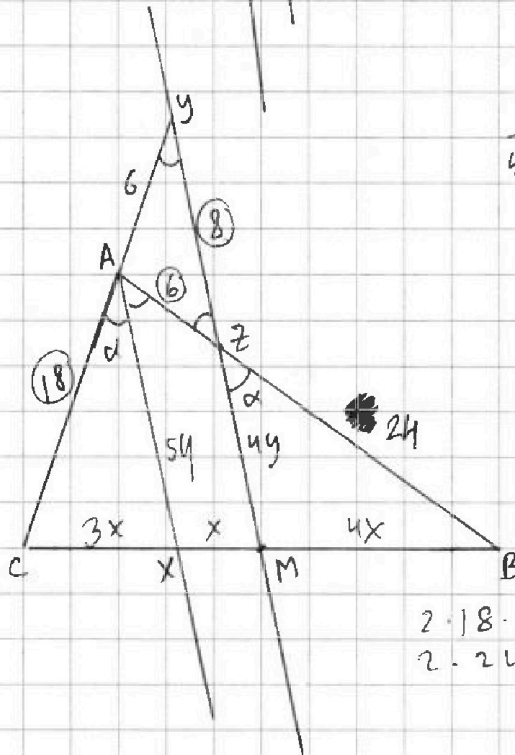
$$\begin{array}{r} 263 \overline{) 19} \\ \underline{19} \\ 73 \end{array}$$

$$263 \overline{) 23}$$

$$263 \overline{) 27}$$

$$263 \overline{) 29}$$

$$29 \cdot 7 =$$



$$\frac{5y}{4y+8} = \frac{3}{4}$$

$$12y + 24 = 20y$$

$$8y = 24$$

$$y = 3$$

$$\begin{cases} 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha = 9x^2 \\ 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cos \alpha = 16x^2 \end{cases}$$

$$2 \cdot 18 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 24 \cdot 12 = 2^6 \cdot 3^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} mn(m+n-3) = 13p^2 \\ (m+n-9)(m+n) = 75q^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} m+n-3 &= \frac{13p^2}{mn} \\ m+n-9 &= \frac{75q^2}{m+n} \end{aligned}$$

$$\frac{13p^2}{mn} - 6 = \frac{75q^2}{m+n}$$

$k = m+n$ $p=3$

$$(k-9)k = 75q^2 \quad 300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$k^2 - 9k - 75q^2 = 0 \quad \frac{13 \cdot 9}{mn} - 6 = \frac{75q^2}{m+n}$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 75q^2 = \frac{13 \cdot 3}{mn} - 2 = \frac{25q^2}{m+n}$$

$$= 81 + 300q^2 =$$

\downarrow

$$= 3(27 + 100q^2) \quad 75q^2 = 75 \cdot 9$$

\downarrow $q=3$

~~etc~~

$$k^2 - 9k - 75 \cdot 9 = 0$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 75 \cdot 9 = 9(9 + 300) = 9 \cdot 309$$

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$m=n=1$$

$$2 \cdot (-7) = -14$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$m=n=2$$

$$4 \cdot (-5) = -20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(-1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} = 2$$

$$2 - 3\sqrt{3}$$

$$2d = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3} - 2$$

$$6\sqrt{3} - 4$$

3

$$(-1 - \sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} = 2$$

$$12 + 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3+4+5+5+4+4+6} = 31$$

$$2d = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$0,8 \cdot 31 = 24,8 \rightarrow 25$$

$$-6\sqrt{3} - 4$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$1) \begin{cases} x \leq 3y \\ 3y - x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{x}{3} \\ y \leq 1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x \leq 3 \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 1 + \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 3y \\ x - 3y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{3} \\ y \geq -1 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$1) \begin{cases} 3x \leq y \\ y - 3x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x \\ y \leq 1 + 3x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x \geq y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq 3x - 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m, n) \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$13p^2$$

~~$$75q^2$$~~

$$m+n \geq 2$$

p, q простые

$$\begin{cases} (m+n-9)(m+n) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

$$m+n-9 = \frac{13p^2}{m+n}$$

~~$$m+n-3 = \frac{75q^2}{mn}$$~~

$$\frac{13p^2}{m+n} + 6 = \frac{75q^2}{mn}$$

~~$$\frac{13p^2}{m+n} : 3$$~~

$$p = 3$$

$$13 \cdot 9 = 117$$

$$m+n = k$$

$$\frac{117}{m+n} = m+n-9$$

$$\frac{117}{k} = k-9$$

$$117 \cdot 4 = 400 + 40 + 28 = 468$$

$$117 = k^2 - 9k$$

$$k^2 - 9k - 117 = 0$$

~~$$D = 81 + 4 \cdot 13 \cdot 9 = 81 + 468 = 549$$~~

$$9(9+52) = 9 \cdot 61$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{61}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) X_2 = -1 + \sqrt{3} :$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 2$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$d = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

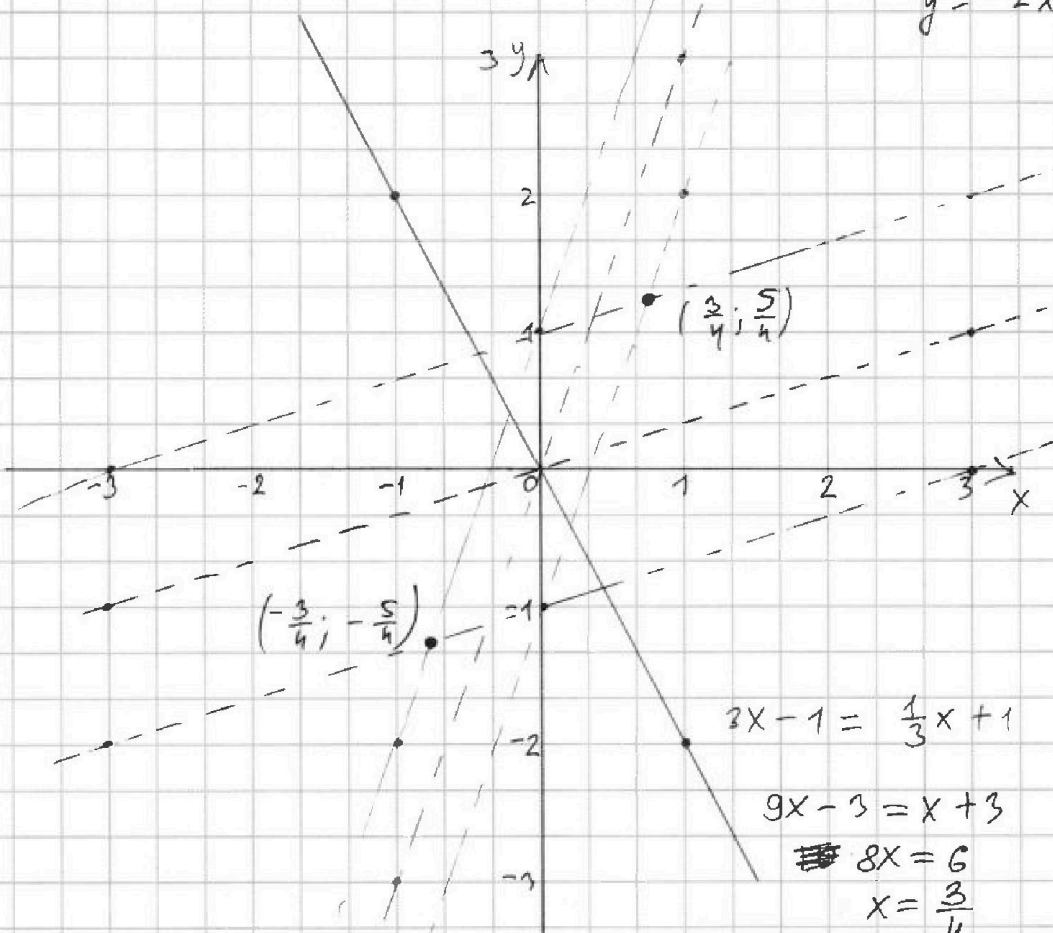
$$a_1 = 6\sqrt{3} - 2$$

$$a_3 + 2d = 3\sqrt{3} + 2 - 3\sqrt{3} = 2 = a_5$$

$$a_5 + 4d = 2 + 4 - 6\sqrt{3} =$$

$$4y + 8x = a$$

$$y = -2x + \frac{a}{4}$$



$$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$9x - 3 = x + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\frac{5}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{a}{4}$$

$$a = 11$$

$$x - 3y = \frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$3x - y = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$